МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кузбасский гуманитарно-педагогический институт

Факультет информатики, математики и экономики

УТВЕРЖДАЮ
Декан
А.В. Фомина
«08» февраля 2024 г.

Рабочая программа дисциплины

К.М.07.03 Дифференциальные уравнения

Направление подготовки
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Направленность (профиль) подготовки
ПРОГРАММНОЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Программа бакалавриата

Квалификация выпускника
бакалавр

Форма обучения
Очная

Год набора 2024

Новокузнецк 2024

Оглавление

1 Цель дисциплины.

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося должны быть сформированы компетенции основной профессиональной образовательной программы бакалавриата (далее - ОПОП): ОПК-1.

Формируемые компетенции, индикаторы достижения компетенций, знания, умения, навыки

Таблица 1 – Индикаторы достижения компетенций, формируемые дисциплиной

Код и название компетенции	Индикаторы достижения компетенции по ОПОП	Знания, умения, навыки (ЗУВ), формируемые дисциплиной
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	1.1 строго доказывает математические утверждения, основываясь на фактах и концепциях теорий в области математических и естественных наук, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах; 1.2 Решает практические задачи на основе фундаментальных знаний в области математических и естественных наук 1.3 Решает профессиональные задачи в исследовательской и прикладной деятельности, используя основы современных математических теорий	**Знать:** – основные факты, концепции и принципы теории дифференциальных уравнений. **Уметь:** – грамотно пользоваться языком теории дифференциальных уравнений; – строго доказывать математические утверждения теории дифференциальных уравнений, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах; – применять знания теории дифференциальных уравнений для решения практических задач. **Владеть:** – способностью решать профессиональные задачи в исследовательской и прикладной деятельности, используя основы теории дифференциальных уравнений.

Место дисциплины

Дисциплина включена в модуль «Модуль фундаментальных математических и естественнонаучных дисциплин» ОПОП ВО. Дисциплина осваивается на 2 курсе в 3 семестре.

2 Объём и трудоёмкость дисциплины по видам учебных занятий. Формы промежуточной аттестации.

Таблица 2 – Объем и трудоемкость дисциплины по видам учебных занятий

Общая трудоемкость и виды учебной работы по дисциплине, проводимые в разных формах	Объём часов по формам обучения
	ОФО
1 Общая трудоемкость дисциплины	144
2 Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) (всего)	76
Аудиторная работа (всего):	76
в том числе:	
лекции	18

практические занятия, семинары	58
3 Самостоятельная работа обучающихся (всего)	68
4 Промежуточная аттестация обучающегося – зачет с оценкой (3 семестр)	

3. Учебно-тематический план и содержание дисциплины.

3.1 Учебно-тематический план

Таблица 3 - Учебно-тематический план очной формы обучения

№ недели п/п	Разделы и темы дисциплины по занятиям	Общая трудоёмкость (*всего час.*)	Трудоемкость занятий (час.)			Формы текущего контроля и промежуточной аттестации успеваемости
			Аудиторн. занятия		СРС	
			лекц.	лекц.		
	3 семестр					
	1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.	***36***	***4***	***14***	***18***	
1-2	Основные понятия и определения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.	16	2	6	8	Индивидуальное задание №1,2
3-5	Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах.	20	2	8	10	Индивидуальное задание №3,4
	2. Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка.	***44***	***4***	***16***	***24***	
6	Дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие интегрирование и понижение порядка.	16	2	6	8	Индивидуальное задание №5
7-8	Линейное однородной дифференциальное уравнение порядка n.	14	1	5	8	Индивидуальное задание №6
9	Линейное неоднородное дифференциальное уравнение порядка n.	14	1	5	8	
1	***3 Системы дифференциальных уравнений***	**12**	**2**	**6**	**4**	**Индивидуальное задание №7**
	4. Теория устойчивости.	**14**	**2**	**6**	**6**	**Индивидуальное задание №8**
2	Векторное поле в окрестности особой точки.	6	1	3	2	
3	Устойчивость решений линейных систем.	8	1	3	4	
4	***5. Краевые задачи***	**12**	**2**	**6**	**4**	**Индивидуальное задание №9**
	6. Численно-аналитические методы решения.	**10**	**2**	**4**	**4**	
5	Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов	5	1	2	2	
6	Метод Пикара. Метод малого параметра.	5	1	2	2	
	7. Уравнения в частных	**16**	**2**	**6**	**8**	

№ недели п/п	Разделы и темы дисциплины по занятиям	Общая трудоёмкость *(всего час.)*	Трудоемкость занятий (час.) Аудиторн. занятия лекц.	лекц.	СРС	Формы текущего контроля и промежуточной аттестации успеваемости
	производных					**Индивидуальное задание №10**
7	Первые интегралы автономной системы дифференциальных уравнений.	9	1	4	4	
8	Линейные однородные уравнения первого порядка в частных производных. Квазилинейное уравнение.	7	1	2	4	
	Итого	**144**	**18**	**58**	**68**	

4 Порядок оценивания успеваемости и сформированности компетенций обучающегося в текущей и промежуточной аттестации.

Для положительной оценки по результатам освоения дисциплины обучающемуся необходимо выполнить все установленные виды учебной работы. Оценка результатов работы обучающегося в баллах (по видам) приведена в таблице 4.

Таблица 4 - Балльно-рейтинговая оценка результатов учебной работы обучающихся по видам (БРС)

Учебная работа (виды)	Сумма баллов	Виды и результаты учебной работы	Оценка в аттестации	Баллы
Семестр 3				
Текущая учебная работа в семестре (Посещение занятий по расписанию и выполнение заданий)	**60**	Лекционные занятия (конспект) (8 занятий)	**0,5 балла** посещение 1 лекционного занятия	3 – 4
		Индивидуальные задания (отчет о выполнении индивидуального задания) (4 работы)	**За одно индивидуальное задание от 5 до:** **5 баллов** (выполнено 51 - 65% заданий) **7 балла** (выполнено 66 - 85% заданий) **10 баллов** (выполнено 86 - 100% заданий)	20 - 40
		Тест	**8 балла** (пороговое значение) **16 баллов** (максимальное значение)	8 - 16
Итого по текущей работе в семестре				31 - 60
Промежуточная аттестация (экзамен)	40	Теоретический вопрос 1	**4 балла** (пороговое значение) **8 баллов** (максимальное значение)	4 - 8
		Теоретический вопрос 2	**4 балла** (пороговое значение) **8 баллов** (максимальное значение)	4 - 8
		Решение задачи 1.	**4 балла** (пороговое значение) **8 баллов** (максимальное значение)	4 - 8
		Решение задачи 2.	**4 балла** (пороговое значение) **8 баллов** (максимальное значение)	4 - 8
		Решение задачи 3	**4 балла** (пороговое значение) **8 баллов** (максимальное значение)	4 - 8
Итого по промежуточной аттестации (экзамену)				20 – 40 б.
Суммарная оценка по дисциплине:		Сумма баллов текущей и промежуточной аттестации		51 – 100 б.

В промежуточной аттестации оценка выставляется в ведомость в 100-балльной шкале и в буквенном эквиваленте (таблица 5)

Таблица 5 – Соотнесение 100-балльной шкалы и буквенного эквивалента оценки

Сумма набранных баллов	Уровни освоения дисциплины и компетенций	*Экзамен*		*Зачет*
		Оценка	*Буквенный эквивалент*	*Буквенный эквивалент*
86 - 100	Продвинутый	5	отлично	Зачтено
66 - 85	Повышенный	4	хорошо	
51 - 65	Пороговый	3	удовлетворительно	
0 - 50	Первый	2	неудовлетворительно	Не зачтено

5 Материально-техническое, программное и учебно-методическое обеспечение дисциплины.

5.1 Учебная литература

Основная учебная литература

Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления [Электронный ресурс]: Учебное пособие / В.К. Романко - 4- изд. (эл). - Электрон.текстовые дан. – Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний. – 2015. – 347 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/reader/book/70785/#1

Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению [Электронный ресурс] / В.К Романко и др.; под редакцией В.К. Романко - 5- изд. (эл). - Электрон.текстовые дан. – Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний. – 2015. – 222 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/reader/book/70710/#1

Дополнительная учебная литература

Жабко А.П. Дифференциальные уравнения и устойчивость [Электронный ресурс]: Учебник / А.П. Жабко, Е.Д. Котина, О.Н. Чижова. - Электрон.текстовые дан. – Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2015. – 320 с. - Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/60651/

Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Ю.Н. Бибиков. - 2-е изд. стер. - Электрон.текстовые дан. – Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2011. – 304 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/1542/

Демидович, Б.П. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] / Б.П. Демидович, В.П. Моденов. – 3-е изд., стер. – Электрон.текстовые дан. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2008. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/126/

Альсевич, Л.А. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: практикум / БЛ.А. Альсевич, С.А. Мазаник, Г.А. Расолько, Л.П. Черенкова – Электрон.текстовые дан. – Минск: «Вышэйшая школа», 2012. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=508479

Ибрагимов, Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности. [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2012. — 332 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/5268

Андреев, А.Н. Избранные главы теории дифференциальных уравнений. [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Кемерово : КемГУ, 2012. — 112 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/44307

Практикум и индивидуальные задания по обыкновенным дифференциальным уравнениям (типовые расчеты). [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.А. Болотюк [и др.]. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2014. — 224 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/51934

Борисов, В.Г. Прикладные задачи теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Механическое движение: учебное пособие. [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Кемерово : КемГУ, 2015. — 130 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/80046

5.2 Материально-техническое и программное обеспечение дисциплины.

Учебные занятия по дисциплине проводятся в учебных аудиториях КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»:

404 Учебная аудитория для проведения: - занятий лекционного типа; - групповых и индивидуальных консультаций; - текущего контроля и промежуточной аттестации. **Специализированная (учебная) мебель**: доска меловая, кафедра, столы, стулья. **Оборудование:** *переносное* - ноутбук, экран, проектор. **Используемое программное обеспечение:** MSWindows (MicrosoftImaginePremium 3 year по сублицензионному договору № 1212/КМР от 12.12.2018 г. до 12.12.2021 г.), LibreOffice (свободно распространяемое ПО), Яндекс.Браузер (отечественное свободно распространяемое ПО). **Интернет с обеспечением доступа в ЭИОС.**	Учебный корпус №4. 654079, Кемеровская область, г. Новокузнецк, пр-кт Металлургов, д. 19
603 Учебная аудитория для проведения: - занятий лекционного типа; - занятий семинарского (практического) типа; - групповых и индивидуальных консультаций; - текущего контроля и промежуточной аттестации. **Специализированная (учебная) мебель**: доска меловая, столы, стулья. **Оборудование для презентации учебного материала**: *переносное* - ноутбук, экран, проектор. **Используемое программное обеспечение**: MSWindows (MicrosoftImaginePremium 3 year по сублицензионному договору № 1212/КМР от 12.12.2018 г. до 12.12.2021 г.), LibreOffice (свободно распространяемое ПО), Mpich 2 (свободно распространяемое ПО), FoxitReader (свободно распространяемое ПО), Firefox 14 (свободно распространяемое ПО), QGIS (свободно распространяемое ПО), UML-диаграммы (бесплатная версия). **Интернет с обеспечением доступа в ЭИОС.**	Учебный корпус №4. 654079, Кемеровская область, г. Новокузнецк, пр-кт Металлургов, д. 19
604 Учебная аудитория для проведения: - занятий лекционного типа; - занятий семинарского (практического) типа; - групповых и индивидуальных консультаций; - текущего контроля и промежуточной аттестации. **Специализированная (учебная) мебель**: доска меловая, столы, стулья. **Оборудование для презентации учебного материала**: *переносное* - ноутбук, экран, проектор. **Используемое программное обеспечение**: MSWindows (MicrosoftImaginePremium 3 year по сублицензионному договору № 1212/КМР от 12.12.2018 г. до 12.12.2021 г.), LibreOffice (свободно распространяемое ПО), FoxitReader (свободно распространяемое ПО), Firefox 14 (свободно распространяемое ПО), Яндекс.Браузер (отечественное свободно распространяемое ПО). **Интернет с обеспечением доступа в ЭИОС.**	Учебный корпус №4. 654079, Кемеровская область, г. Новокузнецк, пр-кт Металлургов, д. 19

5.3 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы.

Перечень СПБД и ИСС по дисциплине

1. Общероссийский математический портал (информационная система) - http://www.mathnet.ru/
2. Экспонента центр инженерных технологий и моделирования - http://www.exponenta.ru
3. Science Direct содержит более 1500 журналов издательства Elsevier, среди них издания по математике и информатике. https://www.sciencedirect.com

6 Иные сведения и (или) материалы.

6.1. Темы письменных учебных работ

Таблица 6 - Темы письменных учебных работ

Раздел	Темы	Контрольные точки
Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.	Основные понятия и определения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.	Индивидуальное задание №1
	Решение задач, приводящих к составлению дифференциальных уравнений	Индивидуальное задание №2
	Уравнения первого порядка, интегрируемые заменой.	Индивидуальное задание №3
	Метод интегрирующего множителя. Уравнения, неразрешенные относительно производной.	Индивидуальное задание №3
Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка.	Дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие интегрирование и понижение порядка.	Индивидуальное задание №5
	Линейное однородной дифференциальное уравнение порядка n. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение порядка n.	Индивидуальное задание №6
Системы дифференциальных уравнений	Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	Индивидуальное задание №7
Теория устойчивости.	Фазовые траектории в окрестности точки покоя. Критерий устойчивости по собственным числам. Устойчивость по первому приближению.	Индивидуальное задание №8
Краевые задачи. Численно-аналитические методы решения.	Решение краевых задач. Решение задачи Штурма-Лиувилля. Построение функции Грина. Метод Пикара. Метод малого параметра.	Индивидуальное задание №9
Уравнения в частных производных	Первые интегралы автономной системы дифференциальных уравнений. Линейные однородные уравнения первого порядка в частных производных. Квазилинейное уравнение. Классификация уравнений второго порядка с двумя переменными. Начально-краевая задача .	Индивидуальное задание №10

6.2. Примерные вопросы и задания / задачи для промежуточной аттестации

РАЗДЕЛ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.

Основные понятия и определения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Примерные теоретические вопросы

1. Дифференциальное уравнение, порядок, общее, частное, особое решения, интегральная кривая, поле направлений, изоклины.
2. Начальные условия. Задача Коши. Геометрический смысл задачи Коши.
3. Задача об изогональных траекториях.
4. Метод изоклин для решения дифференциального уравнения первого порядка.
5. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка (доказательство Пикара).
6. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка (доказательство со ссылкой на принцип сжатых отображений).
7. Принцип сжимающих отображений (доказательство).
8. ДУ – 1, разрешенные относительно y'. Метод разделения переменных.

Примерные практические задания

1. Составить дифференциальное уравнение семейства линий $(x\text{-}a)^2+by^2=1$.
2. Составить дифференциальное уравнение траекторий, пересекающих линии семейства $y=Cx^4$ под углом $\varphi=90°$.
3. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения $y'=2x$, определив области убывания и возрастания, линии экстремумов, установить направление вогнутости, найти линии точек перегибов.
4. Для какого значения h теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y'=xy+0,5$ в точке $y(0)=0$ гарантирует существование единственного решения ($a=b=0,5$)?
5. По виду уравнения $y'=2\sqrt{y}$ определить кривые, подозрительные на особые решения и проверить будут ли они особыми.
6. Проинтегрировать дифференциальное уравнение и выделить интегральные кривые, проходящие через заданные точки. Предварительно выяснить вопрос об их существовании и единственности. Сделать рисунок. $y'=2\sqrt{y}$, $M_1(0,0)$, $M_2(-1,1)$.

Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах.

Примерные теоретические вопросы

1. Однородные ДУ-1 и приводящиеся к ним. Обобщенные однородные ДУ.
2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Их свойства. Методы решения: Бернулли, метод вариации постоянной. Уравнение Бернулли и его приведение к линейному.
3. Уравнение Риккати, его свойства и метод решения. Обобщенное уравнение Риккати.
4. Уравнения в полных дифференциалах. Теорема об условии Эйлера.
5. Утверждение о наличии интегрирующего множителя у уравнений первого порядка.
6. Утверждение о наличии бесконечного числа интегрирующих множителей у уравнений первого порядка.
7. Утверждение о формуле, задающей всевозможные интегрирующие множители уравнения первого порядка.
8. Способы поиска интегрирующего множителя, в случае если известно от какой функции

он зависит.
9. Интегрирующий множитель для линейного и однородного уравнений.
10. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Неполные уравнения. Общий метод введения параметра.
11. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши уравнения, неразрешенного относительно производной.
12. Уравнения Лагранжа и Клеро. Особые решения уравнений, не разрешенных относительно производных. Дискриминантная кривая. Огибающая.

Примерные практические задания

1. Решить однородное уравнение $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$.
2. Решить уравнение, приводящееся к однородному $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$.
3. Решить обобщенное однородное уравнение $(y^4-3x^2)dy+xydx=0$.
4. Решить линейное уравнение $xy'-y=x^2\cos x$;
5. Решить уравнение Бернулли $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$,
6. Решить уравнение Риккати $y'=-y^2+1+x^2$.
7. Решить уравнение в полных дифференциалах $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$.
8. Метод разбиения уравнения на два вспомогательных для поиска интегрирующего множителя.
9. Решить уравнение $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$ методом интегрирующего множителя
10. Решить уравнение $y'+2xy=xe^{-x^2}$; методом интегрирующего множителя
11. Решить уравнение $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$ методом интегрирующего множителя
12. Найти общее решение уравнения $8y'^3=27y$ методом введения параметра.
13. Найти общее решение уравнения $6yy'^2=2xy'^3+3x^4$ методом введения параметра.
14. Найти общее решение уравнения $y'^2=4y^3(1-y)$ методом введения параметра. Найти дискриминантную кривую. Выделить те ее ветви, которые являются особым решением. Сделать чертеж. Исключив из общего решения параметр, если это возможно, найти огибающую.

РАЗДЕЛ 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка.

Дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие интегрирование и понижение порядка.

Примерные теоретические вопросы

1. ДУ – n. Приведение к системе нормальных ДУ Задача Коши для ДУ -n. и для системы. Геометрический и механический смысл задачи Коши.
2. Дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие интегрирование: $y^{(n)}=f(x)$, $F(y^{(n)},y^{(n-2)})=0$, $F(y^{(n)},x)=0$, $F(y^{(n)},y^{(n-1)})=0$.
3. Неполные и однородные уравнения высшего порядка – методы понижения порядка.

Примерные практические задания

1. Решить неполное уравнение высшего порядка $y''^3+xy''=2y'$
2. Решить неполное уравнение высшего порядка $yy''+y=y'$.
3. Решить уравнение $x^2yy''=(y-xy')^2$, пользуясь его однородностью
4. Решить уравнение $y''=xy'+y+1$, выделив точную производную.

Линейное однородной дифференциальное уравнение порядка n.

Примерные теоретические вопросы

1. ЛОДУ – n. Свойства частных решений.
2. Линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Его обращение. Формула Хевисайда.
3. Определитель Вронского, теорема о неравенстве нулю определителя Вронского линейно-независимой системы функций.
4. Определитель Вронского, теорема о равенстве нулю определителя Вронского линейно-зависимой системы функций.
5. Построение линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений. Формула Лиувилля-Остроградского.
6. Понижение порядка линейных однородных уравнений порядка n по известным частным решениям.
7. Характеристическое уравнение линейного однородного уравнения порядка n. Построение фундаментальной системы решений в случае простых и кратных действительных и комплексных корней характеристического уравнения.
8. Теорема о тождественности линейных однородных уравнений порядка n, имеющих одну и ту же фундаментальную систему решений.
9. Теорема о линейной зависимости n+1 частных решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n.
10. Теорема о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения порядка n.
11. Теорема об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения порядка n.

Примерные практические задания

1. Найти общее решение уравнения $(x^2-2x+3)y'''-(x^2+1)y''+2xy'-2y=0$, пользуясь формулой Лиувилля-Остроградского, зная его частные решения $y_1=x, y_2=e^x$.
2. Найти общее решение линейного однородной дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $y''-2y'+y=0$.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение порядка n.

Примерные теоретические вопросы

1. ЛНДУ – n. Свойства частных решений.
2. Метод вариации постоянных для ЛНДУ –n.
3. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка n.
4. Понижение порядка линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка n.
5. Метод неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения ЛНДУ-n. с постоянными коэффициентами и правой частью в виде многочлена и e^{ax}.
6. Метод неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения ЛНДУ-n. с постоянными коэффициентами и правой частью в виде тригонометрических функций.
7. Уравнения порядка n, с переменными коэффициентами, допускающие интегрирование. (Эйлера, Лагранжа).
8. Уравнения порядка n, с переменными коэффициентами, допускающие интегрирование. (Бесселя, Чебышёва).
9. Приведение уравнений второго порядка к простейшим формам (самосопряженному уравнению, уравнению, не содержащему члена с первой производной).

Примерные практические задания

1. Решить методом вариации постоянных линейное неоднородное уравнение второго

порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

2. Решить методом неопределенных коэффициентов линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$.
3. Решить уравнение Эйлера $x^2 y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$.

РАЗДЕЛ 3. Системы дифференциальных уравнений

Примерные теоретические вопросы

1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача и теорема Коши. Приведение канонической системы к системе уравнений первого порядка.
2. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Метод Эйлера для автономных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
3. Метод исключения.

Примерные практические задания

1. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$ методом Эйлера.
2. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$ методом исключения.

РАЗДЕЛ 4. Теория устойчивости.

Векторное поле в окрестности особой точки.

Примерные теоретические вопросы

1. Фазовое пространство. Фазовый поток. Фазовые траектории. Особые точки. Векторное поле в окрестности неособой точки (теорема).
2. Векторное поле в окрестности особой точки. Фазовые траектории автономной системы в окрестности особых точек.

Примерные практические задания

1. Изобразить фазовые траектории системы $\begin{cases} \dot{x} - x + y - 2 = 0, \\ \dot{y} - 2x + y - 3 = 0. \end{cases}$, указав направление движения

Устойчивость решений линейных систем.

Примерные теоретические вопросы

1. Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Устойчивость решений линейных систем. Критерий устойчивости по собственным числам системы.
2. Функция Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости.
3. Исследование устойчивости по первому приближению. Теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости по первому приближению.

Примерные практические задания

1. Исследовать особую точку системы $\begin{cases} \dot{x} - x + y - 2 = 0, \\ \dot{y} - 2x + y - 3 = 0. \end{cases}$ на устойчивость, с помощью собственных чисел.
2. С помощью функции Ляпунова вида $V(x, y) = ax^2 + by^2$ исследовать устойчивость точки

(0,0) системы $\begin{cases}\dot{x} = -2y - x^3,\\ \dot{y} = x - y^3.\end{cases}$

3. Для системы $\begin{cases}\dot{x} = -\sin y,\\ \dot{y} = 2x + \sqrt{1-3x-\sin y}.\end{cases}$ найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

РАЗДЕЛ 5. Краевые задачи

Примерные теоретические вопросы

1. Краевая задача. Устойчивость по Эйлеру. Критерий устойчивости по Эйлеру. Задача Штурма-Лиувилля.
2. Функция Грина. Теоремы о существовании функции Грина и о решении краевой задачи при помощи функции Грина.

Примерные практические задания

1. Найти решение уравнения, удовлетворяющее указанным краевым условиям $y'' + y = 1, \quad y(0) = y(\pi) = 0$.
2. Найти собственные значения и собственные функции $y'' - 4y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
3. Построить функцию Грина и записать с ее помощью решение уравнения $x^2 y'' + 2xy' = f(x); \quad y(1) = 0, y'(3) = 0.$

РАЗДЕЛ 6. Численно-аналитические методы решения.

Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов

Примерные теоретические вопросы

1. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов (метод последовательного дифференцирования и метод неопределенных коэффициентов).
2. Теорема о голоморфном решении задачи Коши.

Примерные практические задания

1. Найти в виде степенного ряда решение, задачи Коши $(1-x)y'' - 2y' + y = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$. Вычислить коэффициенты ряда до коэффициента при x^4 включительно.

Метод Пикара. Метод малого параметра.

Примерные теоретические вопросы

1. Метод Пикара.
2. Лемма о дифференциальных неравенствах.
3. Лемма Адамара.
4. Теорема о непрерывной дифференцируемости решения по параметру. Метод малого параметра.

Примерные практические задания

1. Методом Пикара решить задачу Коши $x' = t^2 + x^2; \quad x(0) = 2,\ a = \frac{1}{2}, b = 1.$. Найти два последовательных приближения и оценить погрешность.
2. Найти два члена разложения решения по степеням малого параметра μ $y' = y + \mu(x + y^2); \quad y(0) = 1.$

РАЗДЕЛ 7. Уравнения в частных производных

Первые интегралы автономной системы дифференциальных уравнений.

Примерные теоретические вопросы

1. Первые интегралы автономной системы дифференциальных уравнений. Критерий первого интеграла.
2. Лемма о виде первых интегралов системы после замены переменных. Утверждение о бесконечном множестве нетривиальных первых интегралов. Независимые первые интегралы.
3. Теорема о существовании независимых первых интегралов в окрестности неособой точки.
4. Теорема о понижении порядка системы при помощи независимых первых интегралов.

Примерные практические задания

1. Найти два независимых первых интеграла, проверить их независимость, построив матрицу Якоби. Используя найденные первые интегралы, решить систему $\begin{cases} \dot{x} = x^2 y - x, \\ \dot{y} = -xy^2, \\ \dot{z} = z. \end{cases}$.

Линейные однородные уравнения первого порядка в частных производных. Квазилинейное уравнение.

Примерные теоретические вопросы

1. Уравнения в частных производных первого порядка. Решение. Интегральная поверхность.
2. Линейные однородные уравнения первого порядка в частных производных. Характеристическая система. Характеристика. Теорема о решении линейного однородного уравнения в частных производных в окрестности точки.
3. Задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных, геометрический смысл. Характеристическая точка, геометрический смысл. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного однородного уравнения в частных производных в окрестности не характеристической точки.
4. Квазилинейное уравнение. Теорема о связи между характеристиками и интегральной поверхностью.
5. Приведение квазилинейного уравнения к линейному однородному. Характеристическая система. Общее решение.
6. Задача Коши для квазилинейного уравнения. Геометрический смысл. Характеристическая точка. Геометрический смысл

Примерные практические задания

1. Найти общее решение и решить задачу Коши $x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial u}{\partial y} + (z + x^4 y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \frac{2z - x^2}{2x^2}$ при $xy = -1$.
2. Найти общее решение и решить задачу Коши $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 - 1$.

Кейс-задания

Компетенция	Задания
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	**Кейс-задание 1** **Ситуация:** Пусть материальная точка массой m=1 брошена под углом к горизонту с приложенной силой f(t). Учитывая, что на тело действует сила сопротивления, пропорциональная его скорости, движение материальной точки описывается дифференциальным уравнением второго порядка $mx'' + bx' = f(t) + mg$, где b – коэффициент сопротивления, mg – сила тяжести, t – время в секундах, x=x(t) – траектория свободного падения (g=10).
	1) Вычислить частное решение уравнения при $f(t) = \cos t + \sin t$ и b=3
	2) Рассчитать уравнение траектории полета точки, являющееся решением уравнения при $f(t) = 4t$ и b=2, если в начальный момент времени точка имела координату x(0)=1 и скорость $x'(0) = 1$
	3) Найти значения коэффициентов в частном решении $x(t) = At^3 + Bt^2 + Ct$ заданного уравнения, если $f(t) = 12t^2$ и b=1
	Кейс-задание 2 **Ситуация:** Если в одной и той же местности проживают две популяции, имеющие схожий рацион питания, то они начинают конкурировать между собой из-за источника питания. Если за x обозначить численность одной популяции, а за y – численность другой популяции, то модель изменения численности таких популяций записывается в виде задачи Коши: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(1 - x - b_1 y)x, \quad x(0) = x_0, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2(y^* - y - b_2 x)y, \; y(0) = y_0 \end{cases}$ y^* - предельная численность второй популяции, a_1, a_2, b_1, b_2 – коэффициенты, учитывающие особенности каждой популяции и их взаимовлияние.
	1) Найти положения равновесия для данной системы уравнений. Проведя исследование нетривиального положения равновесия, выяснить какие ограничения необходимо наложить на коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2, чтобы ни одна популяция не вымерла (система оставалась в данном положении равновесия, а не переходила в одно из нулевых)

Компетенция	Задания
	2) Исследовать на устойчивость каждое положение равновесия, в зависимости от значений параметров a_1, a_2, b_1, b_2, y^*.
	3) Построить решения данной системы уравнений в виде степенного ряда.

Составитель (и): канд. техн. наук, доцент Решетникова Е.В.

(*фамилия, инициалы и должность преподавателя (ей)*)