

Подписано электронной подписью:
Вержицкий Данил Григорьевич
Должность: Директор КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»
Дата и время: 2024-02-21 00:00:00
471086fad29a3b30e244e728abc3661ab35e9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кузбасский гуманитарно-педагогический институт

Факультет информатики, математики и экономики

УТВЕРЖДАЮ
Декан
А.В. Фомина
«09» февраля 2023 г.

Рабочая программа дисциплины

К.М.07.02 Алгебра и геометрия

Направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Программа бакалавриата

Квалификация выпускника
бакалавр

Форма обучения
Очная

Год набора 2023

Новокузнецк 2023

Оглавление

| | |
|---|----|
| 1 Цель дисциплины | 3 |
| Формируемые компетенции, индикаторы достижения компетенций, знания, умения, навыки | 3 |
| Место дисциплины..... | 3 |
| 2 Объём и трудоёмкость дисциплины по видам учебных занятий. Формы промежуточной аттестации. | 3 |
| 3. Учебно-тематический план и содержание дисциплины..... | 4 |
| 3.1 Учебно-тематический план | 4 |
| 4 Порядок оценивания успеваемости и сформированности компетенций обучающегося в текущей и промежуточной аттестации..... | 5 |
| 5 Материально-техническое, программное и учебно-методическое обеспечение дисциплины | 7 |
| 5.1 Учебная литература | 7 |
| 5.2 Материально-техническое и программное обеспечение дисциплины..... | 8 |
| 5.3 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы..... | 9 |
| 6 Иные сведения и (или) материалы..... | 9 |
| 6.1.Примерные темы письменных учебных работ | 9 |
| 6.2. Примерные вопросы и задания / задачи для промежуточной аттестации | 14 |

1 Цель дисциплины.

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося должна быть сформирована компетенция основной профессиональной образовательной программы бакалавриата ОПК-1.

Формируемые компетенции, индикаторы достижения компетенций, знания, умения, навыки

Таблица 1 – Индикаторы достижения компетенций, формируемые дисциплиной

| Код и название компетенции | Индикаторы достижения компетенции по ОПОП | Знания, умения, навыки (ЗУВ), формируемые дисциплиной |
|--|--|---|
| ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | 1.1 строго доказывает математические утверждения, основываясь на фактах и концепциях теорий в области математических и естественных наук, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах; 1.2 Решает практические задачи на основе фундаментальных знаний в области математических и естественных наук 1.3 Решает профессиональные задачи в исследовательской и прикладной деятельности, используя основы современных математических теорий | Знать: – основные факты, концепции и принципы алгебры и геометрии. Уметь: – грамотно пользоваться языком алгебры и геометрии; – строго доказывать математические утверждения в области алгебры и геометрии, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах; – применять знания алгебры и геометрии для решения практических задач. Владеть: способностью решать профессиональные задачи в исследовательской и прикладной деятельности, используя основы алгебры и геометрии. |

Место дисциплины

Дисциплина включена в модуль «Математическое моделирование в задачах профессиональной деятельности» ОПОП ВО. Дисциплина осваивается на 1 курсе в 1-2 семестрах.

2 Объём и трудоёмкость дисциплины по видам учебных занятий.

Формы промежуточной аттестации.

Таблица 2 – Объем и трудоемкость дисциплины по видам учебных занятий

| Общая трудоемкость и виды учебной работы по дисциплине, проводимые в разных формах | Объём часов по формам обучения |
|---|--------------------------------|
| | ОФО |
| 1 Общая трудоемкость дисциплины | 360 |
| 2 Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) (всего) | 160 |
| Аудиторная работа (всего): | 160 |
| в том числе: | |
| лекции | 64 |
| практические занятия, семинары | 96 |
| Внеаудиторная работа (всего): | |
| 3 Самостоятельная работа обучающихся (всего) | 128 |

| | |
|--|----|
| 4 Промежуточная аттестация обучающегося: - экзамен (1 семестр); - экзамен (2 семестр). | 72 |
|--|----|

3. Учебно-тематический план и содержание дисциплины.

3.1 Учебно-тематический план

Таблица 3 - Учебно-тематический план очной формы обучения

| № недели п/п | Разделы и темы дисциплины по занятиям | Общая трудоёмкость (всего час.) | Трудоемкость занятий (час.) | | | Формы текущего контроля и промежуточной аттестации успеваемости |
|------------------|---|---------------------------------|-----------------------------|-----------|-----------|---|
| | | | ОФО | | СРС | |
| | | | Аудиторн. занятия | лекц. | | |
| Семестр 1 | | | | | | |
| | 1. Матричная алгебра | 22 | 8 | 6 | 8 | |
| 1 | 1.1 Матрицы, операции над матрицами | 8 | 2 | 2 | 4 | Индивидуальное задание |
| 2 | 1.2. Определители, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам ряда | 6 | 2 | 2 | 2 | |
| 3 | 1.3. Обратная матрица. Ранг матрицы | 8 | 4 | 2 | 2 | |
| | 2. Системы линейных уравнений | 26 | 8 | 10 | 8 | |
| 4 | 2.1. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными методом Крамера. | 6 | 2 | 2 | 2 | Контрольная работа Кейс-задание |
| 5 | 2.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений и матричных уравнений с помощью обратной матрицы. | 6 | 2 | 2 | 2 | |
| 6 | 2.3. Теорема Кронекера-Капелли. | 6 | 2 | 2 | 2 | |
| 7 | 2.4. Решение систем m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными методом Гаусса. | 8 | 2 | 4 | 2 | |
| | 3. Векторная алгебра (геометрические векторы) | 28 | 4 | 4 | 20 | |
| 8 | 3.1. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами. | 9 | 1 | 1 | 7 | Контрольная работа |
| 9 | 3.2. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. | 9 | 1 | 1 | 7 | |
| 10 | 3.3. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства, приложения | 10 | 2 | 2 | 6 | |
| | 4. Аналитическая геометрия на плоскости | 28 | 8 | 8 | 12 | |
| 11 | 4.1. Система координат на плоскости. Основные задачи. | 6 | 2 | 2 | 2 | Индивидуальное задание |
| 12 | 4.2. Прямая на плоскости. Способы задания. | 8 | 2 | 2 | 4 | |
| 13 | 4.3. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. | 8 | 2 | 2 | 4 | |
| 14 | 4.4. Линии второго порядка. | 6 | 2 | 2 | 2 | |
| | 5. Аналитическая геометрия в пространстве | 40 | 8 | 16 | 16 | |
| 15 | 5.1. Плоскость. Различные уравнения плоскости. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. | 10 | 2 | 4 | 4 | Контрольная работа |
| 16 | 5.2. Прямая в пространстве. Способы задания. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. | 10 | 2 | 4 | 4 | |
| 17 | 5.3. Взаимное расположение прямой и плоскости в | 10 | 2 | 4 | 4 | |

| № недели п/п | Разделы и темы дисциплины по занятиям | Общая трудоёмкость (всего час.) | Трудоемкость занятий (час.) | | | Формы текущего контроля и промежуточной аттестации успеваемости |
|----------------------------|---|---------------------------------|-----------------------------|-----------|------------|---|
| | | | ОФО | | СРС | |
| | | | Аудиторн. занятия | лекц. | | |
| | пространстве. | | | | | |
| 18 | 5.4. Поверхности второго порядка | 10 | 2 | 4 | 4 | |
| | Промежуточная аттестация - экзамен | 36 | | | | экзамен |
| ИТОГО по 1 семестру | | 180 | 36 | 44 | 64 | 36 |
| Семестр 2 | | | | | | |
| | 1. Комплексные числа | 26 | 4 | 8 | 14 | |
| 1 | 1.1. Определение комплексного числа. Комплексная плоскость. Форма записи комплексных чисел. | 13 | 2 | 4 | 7 | Контрольная работа |
| 2 | 1.2. Операции над комплексными числами. | 13 | 2 | 4 | 7 | |
| | 2. Линейные пространства | 62 | 12 | 20 | 30 | |
| 3 | 2.1. Линейные векторные пространства. Линейная зависимость векторов. | 12 | 2 | 4 | 6 | Контрольная работа Коллоквиум |
| 4 | 2.2. Размерность и базис векторного пространства. | 16 | 2 | 8 | 6 | |
| 5 | 2.3. Переход к новому базису. | 8 | 2 | 2 | 4 | |
| 6 | 2.4. Линейные подпространства. Сумма и пересечение линейных подпространств. | 8 | 2 | 2 | 4 | |
| 7 | 2.5. Евклидовы пространства. | 10 | 2 | 2 | 6 | |
| 8 | 2.6. Ортонормированная система векторов. Ортогональное дополнение | 8 | 2 | 2 | 4 | |
| | 3. Линейные операторы | 40 | 10 | 20 | 10 | |
| 9 | 3.1. Линейные операторы и их свойства. | 8 | 2 | 4 | 2 | Контрольная работа |
| 10 | 3.2. Матрицы оператора в разных базисах. Определитель оператора в разных базисах. | 8 | 2 | 4 | 2 | |
| 11 | 3.3. Преобразование матрицы линейного оператора. | 8 | 2 | 4 | 2 | |
| 12 | 3.4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. | 8 | 2 | 4 | 2 | |
| 13 | 3.5. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду | 8 | 2 | 4 | 2 | |
| | 4. Квадратичные формы | 16 | 2 | 4 | 10 | |
| 14 | 4.1. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. | 7 | 1 | 2 | 4 | Контрольная работа |
| 15 | 4.2. Критерий Сильвестра | 9 | 1 | 2 | 6 | |
| 16 | Промежуточная аттестация - экзамен | 36 | | | | экзамен |
| ИТОГО по 2 семестру | | 180 | 28 | 52 | 64 | 36 |
| Всего: | | 360 | 64 | 96 | 128 | 72 |

4 Порядок оценивания успеваемости и сформированности компетенций обучающегося в текущей и промежуточной аттестации.

Для положительной оценки по результатам освоения дисциплины обучающемуся необходимо выполнить все установленные виды учебной работы. Оценка результатов работы обучающегося в баллах (по видам) приведена в таблице 4.

Таблица 4 - Балльно-рейтинговая оценка результатов учебной работы

обучающихся по видам (БРС)

1 семестр

| Учебная работа (виды) | Сумма баллов | Виды и результаты учебной работы | Оценка в аттестации | Баллы (17 недель) |
|--|--------------|---|--|--------------------|
| Текущая учебная работа в семестре | 60 | Индивидуальное задание (2 задания) | За ИЗ от 5 до 10 баллов 5 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 10-20 |
| | | Контрольные работы (защита контрольной работы) (3 работы) | За одну КР от 5 до:10 баллов 5 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 15 - 30 |
| | | Кейс-задание | 6 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 6- 10 |
| Итого по текущей работе в семестре | | | | 31 - 60 |
| Промежуточная аттестация (экзамен) | 40 | Решение задачи 1. | 5 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 5 - 10 |
| | | Решение задачи 2. | 5 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 5 - 10 |
| | | Вопрос билета №1 | 5 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 5 - 10 |
| | | Вопрос билета №2 | 5 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 5- 10 |
| Итого по промежуточной аттестации (экзамену) | | | | 20 – 40 б. |
| Суммарная оценка по дисциплине: Сумма баллов текущей и промежуточной аттестации | | | | 50 – 100 б. |

2 семестр

| Учебная работа (виды) | Сумма баллов | Виды и результаты учебной работы | Оценка в аттестации | Баллы (17 недель) |
|--|--------------|---|--|--------------------|
| Текущая учебная работа в семестре | 60 | Контрольные работы (защита контрольной работы) (4 работы) | За одну КР от 5 до:10 баллов 5 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 20- 40 |
| | | Коллоквиум | 11 баллов (пороговое значение) 20 баллов (максимальное значение) | 11- 20 |
| Итого по текущей работе в семестре | | | | 31 - 60 |
| Промежуточная аттестация (экзамен) | 40 | Решение задачи 1. | 5 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 5 - 10 |
| | | Решение задачи 2. | 5 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 5 - 10 |
| | | Вопрос билета №1 | 5 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 5 - 10 |
| | | Вопрос билета №2 | 5 баллов (пороговое значение) 10 баллов (максимальное значение) | 5- 10 |
| Итого по промежуточной аттестации (экзамену) | | | | 20 – 40 б. |
| Суммарная оценка по дисциплине: Сумма баллов текущей и промежуточной аттестации | | | | 50 – 100 б. |

В промежуточной аттестации оценка выставляется в ведомость в 100-балльной шкале и в буквенном эквиваленте (таблица 5)

Таблица 5 – Соотнесение 100-балльной шкалы и буквенного эквивалента оценки

| Сумма набранных баллов | Уровни освоения дисциплины и компетенций | Экзамен | | Зачет |
|------------------------|--|---------|----------------------|----------------------|
| | | Оценка | Буквенный эквивалент | Буквенный эквивалент |
| 86 - 100 | Продвинутый | 5 | отлично | Зачтено |
| 66 - 85 | Повышенный | 4 | хорошо | |
| 51 - 65 | Пороговый | 3 | удовлетворительно | |
| 0 - 50 | Первый | 2 | неудовлетворительно | Не зачтено |

5 Материально-техническое, программное и учебно-методическое обеспечение дисциплины.

5.1 Учебная литература

Основная учебная литература

1. Рудык, Б.М. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебн. пособие / Б.М. Рудык – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2013. – 318 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=363158>

2. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебн. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2015. – 592 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=494895>

Дополнительная учебная литература

1. Шершнева, В.Г. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии [Электронный ресурс]: учебн. пособие / В.Г. Шершнева – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2014. – 168 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=318084>

2. Индивидуальные задания по высшей математике: [Электронный ресурс]: учебн. пособие. В 4 ч. Ч. 1 Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А.П. Рябушко – 7-е изд. - Электрон. текстовые дан. – Минск : Выш. шк., 2013. – 304 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=508859>

3. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум [Электронный ресурс]: учебн. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2015. – 352 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=476097>

4. Бутузов В. Ф. Линейная алгебра в вопросах и ответах [Текст] : учебное пособие для вузов / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, А. А. Шишкин ; под ред. В. Ф. Бутузова. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 247 с.

5. Ильин В. А. Линейная алгебра [Текст] : учебник. - Издание 6-е, стереотипное. - Москва : Физматлит, 2005. - 280 с. - (Курс высшей математики и математической физики ; вып. 4). - Гриф МО "Рекомендовано".

6. Линейная алгебра [Текст] : методические указания к практической и самостоятельной работам / Новокузнецкий филиал-институт ГОУ ВПО "КемГУ", Факультет информационных технологий, Кафедра математики и математического моделирования; сост. Ю. В. Шпакова. - Новокузнецк, 2010. - 27 с.

7. Канатников, А. Н. Аналитическая геометрия [Текст] : учебник для вузов. - Москва : Академия, 2009. - 208 с. - (Университетский учебник). - Гриф МО "Рекомендовано"

8. Алгебра и геометрия : [Электронный ресурс] учеб. пособие : / Г.И. Шуман, О.А. Волгина, Н.Ю. Голодная. – Электрон. текстовые дан.– М. : РИОР : ИНФРА-М, 2018. — (Высшее образование). – 160 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=908228>

9. Алгебра и геометрия. Сборник задач и решений с применением системы

Marle [Электронный ресурс]: учеб. пособие / М.Н. Кирсанов, О.С. Кузнецова. – Электрон. текстовые дан.— М.: ИНФРА-М, 2017. — 272 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=648409>

10. Линейная алгебра и многомерная геометрия [Электронный ресурс]: учеб. пособие /ЕфимовН.В., РозендорнЭ.Р., 3-е изд. – Электрон. текстовые дан. - М.: Физматлит, 2004. - 464 с.: ISBN 978-5-9221-0386-5 <http://znanium.com/bookread2.php?book=544609>

5.2 Материально-техническое и программное обеспечение дисциплины.

Учебные занятия по дисциплине проводятся в учебных аудиториях КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»:

| | |
|--|--|
| <p>404 Учебная аудитория для проведения:</p> <ul style="list-style-type: none"> - занятий лекционного типа; - групповых и индивидуальных консультаций; - текущего контроля и промежуточной аттестации. <p>Специализированная (учебная) мебель: доска меловая, кафедра, столы, стулья.</p> <p>Оборудование: <i>переносное</i> - ноутбук, экран, проектор.</p> <p>Используемое программное обеспечение: MSWindows (MicrosoftImaginePremium 3 year по лицензионному договору № 1212/КМР от 12.12.2018 г. до 12.12.2021 г.), LibreOffice (свободно распространяемое ПО), Яндекс.Браузер (отечественное свободно распространяемое ПО).</p> <p>Интернет с обеспечением доступа в ЭИОС.</p> | <p>Учебный корпус №4.</p> <p>654079, Кемеровская область, г. Новокузнецк, пр-кт Metallургов, д. 19</p> |
| <p>603 Учебная аудитория для проведения:</p> <ul style="list-style-type: none"> - занятий лекционного типа; - занятий семинарского (практического) типа; - групповых и индивидуальных консультаций; - текущего контроля и промежуточной аттестации. <p>Специализированная (учебная) мебель: доска меловая, столы, стулья.</p> <p>Оборудование для презентации учебного материала: <i>переносное</i> - ноутбук, экран, проектор.</p> <p>Используемое программное обеспечение: MSWindows (MicrosoftImaginePremium 3 year по лицензионному договору № 1212/КМР от 12.12.2018 г. до 12.12.2021 г.), LibreOffice (свободно распространяемое ПО), Mрich 2 (свободно распространяемое ПО), FoxitReader (свободно распространяемое ПО), Firefox 14 (свободно распространяемое ПО), QGIS (свободно распространяемое ПО), UML-диаграммы (бесплатная версия).</p> <p>Интернет с обеспечением доступа в ЭИОС.</p> | <p>Учебный корпус №4.</p> <p>654079, Кемеровская область, г. Новокузнецк, пр-кт Metallургов, д. 19</p> |
| <p>604 Учебная аудитория для проведения:</p> <ul style="list-style-type: none"> - занятий лекционного типа; - занятий семинарского (практического) типа; - групповых и индивидуальных консультаций; - текущего контроля и промежуточной аттестации. <p>Специализированная (учебная) мебель: доска меловая, столы, стулья.</p> <p>Оборудование для презентации учебного материала: <i>переносное</i> - ноутбук, экран, проектор.</p> <p>Используемое программное обеспечение: MSWindows (MicrosoftImaginePremium 3 year по лицензионному договору № 1212/КМР от 12.12.2018 г. до 12.12.2021 г.), LibreOffice (свободно распространяемое ПО), FoxitReader (свободно распространяемое ПО), Firefox 14 (свободно распространяемое ПО), Яндекс.Браузер (отечественное свободно распространяемое ПО).</p> <p>Интернет с обеспечением доступа в ЭИОС.</p> | <p>Учебный корпус №4.</p> <p>654079, Кемеровская область, г. Новокузнецк, пр-кт Metallургов, д. 19</p> |

5.3 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы.

Перечень СПБД и ИСС по дисциплине

1. *Общероссийский математический портал (информационная система)* - <http://www.mathnet.ru/>
2. *Mathcad-справочник по высшей математике* - <http://www.exponenta.ru/soft/Mathcad/learn/learn.asp>

6 Иные сведения и (или) материалы.

6.1. Примерные темы письменных учебных работ

6.1.1. Индивидуальное задание по теме «Матричная алгебра»

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

2. Доказать тождество:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

3. Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Найти ранг матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & -5 & 2 & -8 & -11 \\ 2 & 4 & 2 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

6.1.2. Контрольная работа по теме «Системы линейных уравнений»

1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

- а) методом Крамера;
- б) методом Гаусса;

2. Решить систему линейных уравнений

Найти общее решение, частное, сделать

в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 = 5, \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 1, \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 = 11. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + 3X_3 - X_4 + X_5 = 3 \\ 3X_1 + 4X_2 - X_3 + 4X_4 = 2 \\ X_1 + 5X_2 - 4X_3 + 5X_4 - X_5 = -1 \\ 4X_1 + 9X_2 - 5X_3 + 9X_4 - X_5 = 1 \end{cases}$$

6.1.3. Кейс-задание по теме «Системы линейных уравнений»

Автозавод известного бренда производит 4 вида легковых автомобилей закрытого типа: седан, лимузин, универсал и купе. При этом используются материалы четырех типов: М1, М2, М3, М4. Нормы расхода каждого из них на один вид автомобиля и объем расхода материала на 1 день заданы таблицей (см. таблицу). Найти ежедневный объем выпуска каждого вида автомобиля.

| Вид материала | Нормы расхода материала на один автомобиль, ед. изм. | | | | Расход материала на 1 день, ед. изм. |
|---------------|--|-----------|------|---------|--------------------------------------|
| | седан | универсал | купе | лимузин | |
| М1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 1120 |
| М2 | 2 | 1 | 5 | 2 | 1360 |
| М3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 980 |
| М4 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1030 |

6.1.4. Контрольная работа по темам: «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия в пространстве»

Даны координаты вершин пирамиды $A_1(4, 2, 5)$, $A_2(0, 7, 2)$, $A_3(0, 2, 7)$, $A_4(1, 5, 0)$. Найти: а) длину ребра A_1A_2 ; б) площадь грани $A_1A_2A_3$; в) объём пирамиды; г) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; д) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; е) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; ж) длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

6.1.5. Индивидуальное задание по теме «Аналитическая геометрия на плоскости»

1. Уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-5=0$. Составить уравнения трех остальных сторон квадрата, если $(-1;0)$ – точка пересечения его диагоналей.
2. Даны уравнения одной из сторон ромба $2x+y-5=0$ и одной из его диагоналей $y-1=0$. Диагонали ромба пересекаются в точке $(3;1)$. Найти уравнения остальных сторон ромба.
3. Уравнения двух сторон параллелограмма $x+2y+2=0$ и $x+y=0$, а уравнение одной из его диагоналей $x+2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма.

- Даны две вершины $A(-3, 3)$ и $B(5, -1)$ и точка $D(4, 3)$ пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон.
- Даны вершины $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(4, 1)$ трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции.
- Даны уравнения двух сторон треугольника $5x - 4y + 15 = 0$ и $4x + y - 9 = 0$. Его медианы пересекаются в точке $(0, 2)$. Составить уравнение третьей стороны треугольника.
- Даны две вершины $A(2; -2)$, $B(3; -1)$ и точка $P(1; 0)$ пересечения медиан треугольника ABC . Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину C .

6.1.6. Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

- Дано: $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 + 2i$. Найти: $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2 .
- Дано: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$. Найти z_1^5 , $\sqrt[3]{z_2}$.
- Решить уравнение: а) $x^2 + x + 4 = 0$ б) $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$
- Построить на комплексной плоскости множество точек z , удовлетворяющих условиям:
 $\operatorname{Re} z \leq 2$; $|\operatorname{Im} z| \leq 1$

6.1.7. Контрольная работа по теме «Линейные пространства»

- Показать, что векторы $a = (2, 3, 4)$, $b = (2, 1, 5)$, $c = (-1, 0, 1)$ образуют базис и найти координаты вектора $d = (3, -4, 2)$ в этом базисе.
- В базисе e_1, e_2, e_3 задан вектор $x = (2, 3, 4)$. Найти координаты этого вектора в базисе

$$e_1^*, e_2^*, e_3^*, \text{ если } \begin{cases} e_1 - 2e_2 + 3e_3 = e_1^*, \\ 2e_1 + 3e_2 - 4e_3 = e_2^*, \\ 3e_1 - 2e_2 - 5e_3 = e_3^*. \end{cases}$$

- В евклидовом пространстве R^4 подпространство L задано системой уравнений

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 - X_3 + X_4 = 0, \\ 2X_1 + X_2 - 3X_3 = 0, \\ 3X_1 + 4X_2 - 4X_3 + X_4 = 0. \end{cases}$$

Найти ортогональный базис в L .

6.1.8. Коллоквиум

- Является ли линейным пространством множество, всех:
 - матриц размера $m \times n$;
 - диагональных матриц порядка n ;
 - невырожденных матриц.
- Являются ли векторы $\vec{a}_1 = (5; 4; 3)$, $\vec{a}_2 = (3; 3; 2)$, $\vec{a}_3 = (8; 1; 3)$ линейно зависимыми?
- Показать, что система векторов $\vec{e}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{e}_2 = (3; 0; 2)$, $\vec{e}_3 = (-2; 1; 1)$ образует базис в R^3 и найти координаты вектора $\vec{c} = (4; 2; -1)$ в этом базисе.

$$4. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Множество решений однородной системы образует линейное пространство. Найти размерность этого пространства и какой-нибудь базис в нем.

$$5. \text{ Дана матрица } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ перехода от базиса } (e_1, e_2, e_3) \text{ к базису } (c_1, c_2, c_3). \text{ Найти}$$

координаты векторов e_1, e_2, e_3 в базисе c_1, c_2, c_3 .

6. Является ли линейным подпространством в пространстве матриц порядка n подмножество, образованное всеми:
- матрицами с нулевой первой строкой;
 - нижнетреугольными матрицами;
 - невырожденными матрицами.

7. Подпространства $L_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $L_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ натянуты на следующие системы векторов: $\vec{a}_1 = (1; 2; 1)$, $\vec{a}_2 = (1; 1; -1)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 3)$;
 $\vec{b}_1 = (2; 3; -1)$, $\vec{b}_2 = (1; 2; 2)$, $\vec{b}_3 = (1; 1; -3)$. Найти базисы и размерности подпространств L_1 , L_2 , $L_1 + L_2$.

8. Найти базис линейной оболочки системы векторов: $\vec{e}_1 = (1; 0; 0; -1)$, $\vec{e}_2 = (2; 1; 1; 0)$,
 $\vec{e}_3 = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{e}_4 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{e}_5 = (0; 1; 2; 3)$.

9. Векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортогональный базис. Найти скалярное произведение векторов $\vec{x} = 2e_1 - 3e_2 + 4e_3$ и $\vec{y} = e_1 + e_2 - 5e_3$ и их длины, если $|e_1| = 1$, $|e_2| = 2$, $|e_3| = 2$.

10. Для каких векторов неравенство Коши-Буняковского превращается в равенство?

11. В евклидовом арифметическом пространстве R^4 найти угол между векторами $\vec{a} = (2; 1; 1; 0)$ и $\vec{b} = (1; 2; 3; 4)$.

12-14. В евклидовом пространстве R^4 подпространство V задано системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Найти по одному ортогональному базису в пространствах V , его ортогональном дополнении W и R^4 .

15. Является ли оператор $A(x) = (x_1 - x_2; 2x_1 + x_3; x_2 - 2x_3)$ линейным, если вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$?

16-17. Линейный оператор задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ в некотором базисе. Найти

базис ядра и дефект линейного оператора.

18. Найти (в том же базисе) координаты вектора $y = A(x)$, если оператор задан матрицей $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{x} = 2e_1 + e_2 - e_3.$$

19-20. Матрица линейного оператора в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти

матрицу этого оператора в базисе (c_1, c_2, c_3) , если

$$\vec{c}_1 = 2e_1 + e_2 - e_3, \quad \vec{c}_2 = e_1 + 3e_2 + e_3, \quad \vec{c}_3 = e_1 - 2e_2 + 3e_3.$$

6.1.9. Контрольная работа по теме «Линейные операторы. Квадратичные формы»

1. Найти матрицу A^* линейного оператора в базисе e_1^*, e_2^* , заданного матрицей A в базисе

$$e_1, e_2 \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} e_1^* = e_2 \\ e_2^* = e_1 + e_2 \end{cases}$$

2. Линейный оператор задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найти базис ядра и дефект линейного оператора.

3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A в базисе e_1, e_2, e_3 .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к диагональному виду матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$
Записать ее в матричном виде.
6. Привести квадратичную форму к каноническому виду. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2x_3$.
7. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму
 $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$.

6.2. Примерные вопросы и задания / задачи для промежуточной аттестации

Таблица 6 - Примерные теоретические вопросы и практические задания к экзамену

Семестр 1

| Разделы и темы | Примерные теоретические вопросы | Примерные практические задания |
|---|--|--|
| 1. Матричная алгебра | | |
| 1.1 Матрицы, операции над матрицами | 1. Матрицы, виды матриц 2. Операции над матрицами. | 1. Найти матрицу $D=ABC-3E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = (2 \ 0 \ 5)$, E – единичная матрица. 2. Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A : $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. |
| 1.2. Определители, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам ряда | 3. Свойства определителей. 4. Вычисление определителей. | 3. Вычислить определитель матрицы A $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. 4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$ |
| 1.3. Обратная матрица. Ранг матрицы | 5. Обратная матрица. Теорема о существовании обратной матрицы. | 5. Найти матрицу $B = 11 \cdot (A-1) + A$, |

| | | | |
|---|----|--|--|
| | 6 | Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы, его вычисление. | $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ <p>6. Найти ранг матрицы A:</p> $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -4 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ |
| 2. Системы линейных уравнений | | | |
| 2.1. Решение систем n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными методом Крамера. | 7 | Системы линейных алгебраических уравнений. | 7. Решить систему линейных уравнений методом Крамера. $\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = -1, \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 = -4, \\ 4X_1 + X_2 + 4X_3 = -2. \end{cases}$ |
| | 8 | Решение систем линейных уравнений методом Крамера. | 8. $\begin{cases} X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 6, \\ 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 20, \\ 3X_1 - 2X_2 - 5X_3 = 6. \end{cases}$ |
| 2.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений и матричных уравнений с помощью обратной матрицы. | 9 | Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы. | 9. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы. $\begin{cases} X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 6, \\ 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 20, \\ 3X_1 - 2X_2 - 5X_3 = 6. \end{cases}$ |
| | 10 | Решение матричных уравнений | 10. Решить матричное уравнение. Сделать проверку. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 2.3. Теорема Кронекера-Капелли. | 11 | Исследование систем линейных уравнений. | 11. Совместна ли система? $\begin{cases} X_1 + 2X_2 - 3X_3 + X_4 - 3X_5 = 2, \\ 2X_1 - X_2 + X_3 - 4X_4 + X_5 = 1, \\ 3X_1 + X_2 - 2X_3 - 3X_4 - 2X_5 = 3. \end{cases}$ |
| | 12 | Теорема Кронекера-Капелли. | 12. $\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = -1, \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 = -4, \\ 4X_1 + X_2 + 4X_3 = -2. \end{cases}$ |
| 2.4. Решение систем m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными методом Гаусса. | 13 | Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. | 13. Решить систему методом Гаусса, найти общее решение. частное, сделать проверку. $\begin{cases} X_1 + 2X_2 - 3X_3 + X_4 - 3X_5 = 2, \\ 2X_1 - X_2 + X_3 - 4X_4 + X_5 = 1, \\ 3X_1 + X_2 - 2X_3 - 3X_4 - 2X_5 = 3. \end{cases}$ |
| | 14 | Однородные системы линейных уравнений. | 14. Найти ФНР однородной системы. $\begin{cases} X_1 + 3X_2 - X_3 + X_4 = 0, \\ 2X_1 + X_2 - 3X_3 = 0, \\ 3X_1 + 4X_2 - 4X_3 + X_4 = 0. \end{cases}$ |

| 3. Векторная алгебра (геометрические векторы) | | |
|--|---|---|
| 3.1. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами. | 15 Линейные операции над векторами. 16 Ортогональная проекция вектора на ось. Свойства проекции. | 15. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = 120^\circ$, причем $ a = 3$ и $ b = 5$. Найти $ a + b $ и $ a - b $. 16. Найти $np_{\vec{c}}(2\vec{a} + 3\vec{b})$, если $\vec{a} = (1; 2; -4)$, $\vec{b} = (5; 3; 2)$, $\vec{c} = (-3; 2; 1)$. |
| 3.2. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. | 17 Разложение вектора по базису. Направляющие косинусы. Операции над векторами в координатной форме. 18 Скалярное произведение векторов, его свойства и приложения. | 17. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{a}_1 = (1; 2; 0)$, $\vec{a}_2 = (3; -1; 1)$, $\vec{a}_3 = (0; 1; 1)$ базис в R^3 . 18. Найти угол ВСА в треугольнике ABC, если $A(1; 3; 2)$, $B(3; 4; 2)$, $C(2; 5; 1)$. |
| 3.3. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства, приложения | 19 Векторное произведение векторов, его свойства и приложения. 20 Смешанное произведение векторов, его свойства и приложения. | 19. Найти площадь треугольника ABC, если $A(1; 3; 2)$, $B(3; 4; 2)$, $C(2; 5; 1)$. 20. Найти объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$, если $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(8; 7; 4)$, $A_3(5; 10; 4)$, $A_4(4; 7; 8)$. |
| 4. Аналитическая геометрия на плоскости | | |
| 4.1. Система координат на плоскости. Основные задачи. | 21 Прямоугольная и полярная системы координат на плоскости. 22 Деление отрезка в данном отношении. | 21. Найти координаты точек в полярной системе координат. $A(-1; 1)$, $B(0; -1)$, $C(\sqrt{3}; 1)$. 22. Даны две вершины треугольника $A(3; 8)$, $B(10; 2)$ и точка пересечения медиан $M(1; 1)$. Найти координаты третьей вершины треугольника. |
| 4.2. Прямая на плоскости. Способы задания. | 23 Уравнение прямой с угловым коэффициентом, общее уравнение прямой, уравнение прямой, проходящей через одну и две заданные точки. 24 Уравнение прямой в отрезках на осях, нормальное уравнение прямой, полярное уравнение прямой. | 23. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат под углом 45° к прямой $y = 4 - 2x$. 24. Уравнение одной из сторон квадрата $X + 3Y - 5 = 0$. Составить уравнения трех остальных сторон квадрата, если $(-1, 0)$ – точка пересечения его диагоналей. |
| 4.3. Угол между двумя прямыми. Расстояние | 25 Угол между двумя прямыми на | 25. Среди прямых найти параллельные и перпендикулярные. |

| | | |
|---|--|---|
| от точки до прямой. | <p>плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.</p> <p>26 Взаимное расположение прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой.</p> | <p>а) $x-2y+3=0$; б) $-2x+4y+5=0$; в) $-2x+y-3=0$; г) $-2x+4y-6=0$.</p> <p>26. Показать, что прямые $3x+y-2=0$ и $6x+2y+1=0$ параллельны и найти расстояние между ними.</p> |
| 4.4. Линии второго порядка. | <p>27 Исследование формы эллипса по его уравнению.</p> <p>28 Исследование формы гиперболы по ее уравнению.</p> <p>29 Каноническое уравнение параболы (вывод и исследование).</p> | <p>27. На прямой $x+5=0$ найти точку, одинаково удаленную от левого фокуса и верхней вершины эллипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$</p> <p>28. Через точку $M(0;-1)$ и правую вершину гиперболы $3x^2-4y^2=12$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.</p> <p>29. Написать уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2 = 4x$ и касающейся ее директрисы. Найти точки пересечения параболы и окружности.</p> |
| 5. Аналитическая геометрия в пространстве | | |
| 5.1. Плоскость. Различные уравнения плоскости. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. | <p>30 Общее уравнение плоскости. Уравнения плоскости, проходящей через одну и три заданные точки. Уравнение плоскости в отрезках на осях.</p> <p>31 Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.</p> | <p>30. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки $P(4;-2;1)$ и $Q(2;4;-3)$.</p> <p>31. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;2;-2)$ и параллельной плоскости $x-2y-3z=0$</p> <p>32. Найти угол между плоскостями $x-2y-3z=0$ и $2x-4y+5z-1=0$</p> |
| 5.2. Прямая в пространстве. Способы задания. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. | <p>32 Общие уравнения прямой линии в пространстве. Векторное, параметрические и канонические уравнения прямой.</p> <p>33 Угол между двумя прямыми в пространстве. Условие параллельности и</p> | <p>33. Уравнения прямой $\begin{cases} 2x + y + 8z - 16 = 0 \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ написать в канонической форме.</p> <p>34. Найти угол прямой $\begin{cases} y + 2z - 1 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ с прямой, проходящей через начало координат и через точку $M(2;2;-2)$.</p> |

| | | |
|---|---|---|
| | перпендикулярности прямых. | |
| 5.3. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. | 34 Расстояние от точки до прямой в пространстве. 35 Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. | 35. Найти расстояние между параллельными прямыми. $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$; $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ 36. Найти угол прямой $\begin{cases} y+2z-1=0 \\ x-2z+1=0 \end{cases}$ с плоскостью $x-2y-3z+3=0$ |
| 5.4. Поверхности второго порядка | 36 Поверхности второго порядка. Эллипсоиды, гиперболоиды. 37 Поверхности второго порядка. Параболоиды, конусы. | 37. Составить уравнение сферы, если точки $M(4;-1;-3)$ и $N(0;3;-1)$ являются концами одного из ее диаметров. 38. Определить вид поверхности $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 2z = 0$ |

Семестр 2

| Разделы и темы | Примерные теоретические вопросы | Примерные практические задания |
|---|--|--|
| 1. Комплексные числа | | |
| 1.1. Определение комплексного числа. Комплексная плоскость. Форма записи комплексных чисел. | 1. Определение комплексного числа. Геометрическое изображение комплексных чисел. 2. Формы записи комплексных чисел. | 1. Дано: $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 + 2i$. Найти: $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2 . 2. Дано: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$. Найти z_1^5 , $\sqrt[3]{z_2}$. |
| 1.2. Операции над комплексными числами. | 3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме записи. 4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи. | 3. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i$; $z_2 = -7 - 2i$. Найти значение выражения $\left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i} \right)^{-4}$ в алгебраической форме, 4. Для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20} , найти корни уравнения $w^3 + z = 0$. |
| 2. Линейные пространства | | |
| 2.1. Линейные векторные пространства. Линейная зависимость векторов. | 5. Линейные пространства. Определение, примеры. 6. Линейная зависимость и независимость | 5. Является ли линейным пространством множество, всех: матриц размера $m \times n$; диагональных матриц порядка n ; невырожденных матриц. 6. Являются ли векторы $\vec{a}_1 = (5; 4; 3)$, |

| | | |
|--|--|---|
| | векторов. | $\vec{a}_2 = (3;3;2)$, $\vec{a}_3 = (8;1;3)$ линейно зависимыми? |
| 2.2. Размерность и базис векторного пространства. | 7. Базис и размерность линейного пространства. 8. Разложение вектора по базису | 7. Показать, что система векторов $\vec{e}_1 = (1;2;3)$, $\vec{e}_2 = (3;0;2)$, $\vec{e}_3 = (-2;1;1)$ образует базис в R^3 и найти координаты вектора $\vec{c} = (4;2;-1)$ в этом базисе. 8. Множество решений однородной системы $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ образует линейное пространство. Найти размерность этого пространства и какой-нибудь базис в нем. |
| 2.3. Переход к новому базису. | 9. Переход к новому базису. | 9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису (c_1, c_2, c_3) . Найти координаты векторов e_1, e_2, e_3 в базисе c_1, c_2, c_3 . 10. В базисе e_1, e_2, e_3 задан вектор $x = (2, 3, 4)$. Найти координаты этого вектора в базисе e_1^*, e_2^*, e_3^* если $\begin{cases} e_1 - 2e_2 + 3e_3 = e_1^*, \\ 2e_1 + 3e_2 - 4e_3 = e_2^*, \\ 3e_1 - 2e_2 - 5e_3 = e_3^*. \end{cases}$ |
| 2.4. Линейные подпространства. Сумма и пересечение линейных подпространств. Линейная оболочка и ее свойства. | 10 Линейные подпространства. Определение, примеры. 11 Пересечение и сумма линейных подпространств. 12 Линейная оболочка и ее свойства. | 11. Является ли линейным подпространством в пространстве матриц порядка n подмножество, образованное всеми: - матрицами с нулевой первой строкой; - нижнетреугольными матрицами; - невырожденными матрицами. 12. Подпространства $L_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $L_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ натянуты на следующие системы векторов: $\vec{a}_1 = (1;2;1)$, $\vec{a}_2 = (1;1;-1)$, $\vec{a}_3 = (1;3;3)$; |

| | | |
|---|--|---|
| | | $\vec{b}_1 = (2;3;-1)$, $\vec{b}_2 = (1;2;2)$, $\vec{b}_3 = (1;1;-3)$. Найти базисы и подпространств L_1 , L_2 , $L_1 + L_2$. 13. Найти базис линейной оболочки системы векторов: $\vec{e}_1 = (1;0;0;-1)$, $\vec{e}_2 = (2;1;1;0)$, $\vec{e}_3 = (1;1;1;1)$, $\vec{e}_4 = (1;2;3;4)$, $\vec{e}_5 = (0;1;2;3)$. |
| 2.5. Евклидовы пространства. | 13 Евклидовы пространства. 14 Свойства нормы вектора. Угол между векторами. | 14. Векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортогональный базис. Найти скалярное произведение векторов $\vec{x} = 2e_1 - 3e_2 + 4e_3$ и $\vec{y} = e_1 + e_2 - 5e_3$ и их длины, если $ e_1 = 1$, $ e_2 = 2$, $ e_3 = 2$. 15. Для каких векторов неравенство Коши-Буняковского превращается в равенство? 16. В евклидовом арифметическом пространстве R^4 найти угол между векторами $\vec{a} = (2;1;1;0)$ и $\vec{b} = (1;2;3;4)$ |
| 2.6. Ортонормированная система векторов. Ортогональное дополнение | 15 Ортогональные и ортонормированные базисы. 16 Ортогональное дополнение. 17 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. | 17. В евклидовом пространстве R^4 подпространство V задано системой уравнений . $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ Найти по одному ортогональному базису в пространствах V , его ортогональном дополнении W и R^4 . |
| 3. Линейные операторы | | |
| 3.1. Линейные операторы и их свойства. | 18 Линейные операторы. Определение, примеры. 19 Ядро, образ, дефект, ранг линейного оператора. | 18. Является ли оператор $A(x) = (x_1 - x_2; 2x_1 + x_3; x_2 - 2x_3)$ линейным, если вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$? 19. Линейный оператор задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ в некотором базисе. Найти базис ядра и дефект линейного оператора. |
| 3.2. Матрицы оператора в разных базисах. Определитель оператора в разных базисах. | 20 Матрица линейного оператора. 21 Матрицы линейного оператора в разных базисах. | 20. Найти (в том же базисе) координаты вектора $y = A(x)$, если оператор задан |

| | | |
|--|---|--|
| | | <p>матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и</p> <p>$\vec{x} = 2e_1 + e_2 - e_3$.</p> <p>21. Матрица линейного оператора в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.</p> <p>Найти матрицу этого оператора в базисе (c_1, c_2, c_3), если $\vec{c}_1 = 2e_1 + e_2 - e_3$, $\vec{c}_2 = e_1 + 3e_2 + e_3$, $\vec{c}_3 = e_1 - 2e_2 + 3e_3$.</p> |
| 3.3. Преобразование матрицы линейного оператора. | 22 Преобразование матрицы линейного оператора. | <p>22. Задано линейное преобразование A, переводящее вектор \vec{x} в вектор \vec{y} и линейное преобразование B, переводящее вектор \vec{y} в вектор \vec{z}. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего вектор \vec{x} в вектор \vec{z}.</p> $\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y_3 = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ z_2 = 5y_1 - y_2 - y_3 \\ z_3 = 3y_1 + 6y_2 + 7y_3 \end{cases}$ $x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} z$ $x \xrightarrow{C} z$ |
| 3.4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. | <p>22 Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.</p> <p>23 Вычисление собственных значений и собственных векторов линейного оператора.</p> | <p>23. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей</p> $1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ <p>24. Пусть линейный оператор, действующий в n-мерном пространстве, имеет в некотором базисе матрицу \bar{A}. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения этого оператора. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, матрицей которого в том же базисе является \bar{A}^n.</p> |
| 3.5. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду | <p>23 Приведение матрицы к диагональному виду.</p> <p>24 Приведение симметрической матрицы к диагональному виду.</p> | <p>25. Привести к диагональному виду матрицу</p> $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ <p>26. Привести к диагональному виду матрицу</p> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 4. Квадратичные формы | | |
| 4.1. Квадратичные формы. Приведение | 25 Определение квадратичной формы. | 27. Привести квадратичную форму к каноническому виду. |

| | | |
|--|---|---|
| квадратичной формы к каноническому виду. | 26 Преобразование квадратичных форм. 27 Квадратичные формы канонического вида. | $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ <p>28. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа</p> $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3,$ $g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_2x_3.$ |
| 4.2. Критерий Сильвестра | 28 Знакоопределенность квадратичных форм. 29 Критерий Сильвестра. | <p>29. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму:</p> <p>а) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$;</p> <p>б) $L(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3$</p> <p>в) $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$.</p> |
| Компетенции | | |
| ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | <p>Задание 1.</p> <p>В городском парке, имеющем форму квадрата со стороной a, установлены две осветительные установки А и В, расположенные в противоположных вершинах этого квадрата. Устройство этих установок таково, что наилучшая освещенность на поверхности парка достигается в таких точках М, для которых выполняется условие: $MA ^2 = 3 MB ^2$. Через все такие точки проложили пешеходную дорожку. В местах пересечения этой дорожки со сторонами квадрата расположены входы в парк. Пусть сторона квадрата равна $a = 36(\sqrt{5} + 1)$ м.</p> <p>Задание:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Вывести уравнение линии, которой принадлежат все точки пешеходной дорожки. 2. Найти расстояние от установки В до ближайшего входа в парк. <p>Задание 2.</p> <p>Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 250 тыс. руб. под 18 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 60 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 7 тыс. руб. Временная база по начислению процентов равна 365 дням.</p> <p>Задание:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Вывести формулу размера долга S (тыс. руб.) фирмы банку через t дней. 2. Через какое наименьшее количество дней после получения кредита фирма может погасить кредит разовым платежом за счет полученной прибыли? | |

Составитель (и):

канд. пед. наук Гридчина В.Б.

(Фамилия, инициалы и должность преподавателя (ей))