Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.А. Вячкина, Е. С. Вячкин

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Методические указания к выполнению внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине для обучающихся очной формы по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии» 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий»

Новокузнецк

2020

УДК [378.146:519.8](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.18я73
В 99

Вячкина Е. А., Вячкин Е. С.

В 99 Теория игр и исследование операций: методические указания к выполнению внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине для обучающихся очной формы по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий» / Е.А. Вячкина, Е. С. Вячкин; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 40 с.

Методические указания содержат шесть контрольных работ с подробным примером решения, вопросы к зачету, задачи к зачету, пример теста и список рекомендуемой литературы.

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения направлений 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии» и 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий»

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 6 от 17.01.2020

Заведующий каф. МФММ
_______________ / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 7от 12.03.2020

Председатель методической комиссии ФИМЭ
_______________ / Г.Н. Бойченко

УДК [378.146:519.8](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.18я73
В 99

Текст представлен в авторской редакции

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания адресованы студентам очной формы обучения, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии» и 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий» и направлены на оказание помощи студентам в выполнении внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине «Теория игр и исследование операций».

Дисциплина «Теория игр и исследование операций» является обязательной дисциплиной при подготовке бакалавров в области математического моделирования и математического обеспечения информационных технологий.

В рамках дисциплины изучается три основных раздела: «Принятие решений, элементы теории игр, линейные модели», «Сетевые модели» и «Вероятностные модели, имитационное моделирование».

В первом разделе рассматриваются основные задачи линейного программирования, матричные игры и игры с природой, критерии принятия решений в условиях неопределенности. Все представленные темы имеют важное практическое значение для производства и бизнеса.

Второй раздел позволяет студентам освоить сетевые модели и задачи динамического программирования.

В третьем разделе студенты изучают теоретические основы вероятностного и имитационного моделирования.

В методические рекомендации включены варианты контрольных работ с демонстрационным примером, вопросы и задачи к зачету, пример теста и список рекомендуемой литературы.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Цель: Научиться решать системы линейных уравнений методом Жордана–Гаусса.
Задание: Составить и решить методом Жордана-Гаусса систему из трех линейных уравнений, основная матрица которой не содержит нулевых строк и столбцов. Подтвердить полученный результат, решив систему методами Крамера и Гаусса.

Пример решения

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=12, \\ 2y-x+2z=1, \\ 3x-5y-7z=0. \end{cases}$$

Решение.

Запишем расширенную матрицу в виде таблицы (таблица 1.1).

Таблица 1.1

$\boxed{2}$	3	-4	12
-1	2	2	1
3	-5	-7	0

Выберем первый элемент первой строки разрешающим и по правилу прямоугольника, преобразуем все элементы таблицы.

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{a} & - & b & & 1 & - & b/a \\ | & & | & \Rightarrow & | & & | \\ c & - & d & & 0 & - & \frac{ad-bc}{a} \end{array}$$

Получим таблицу 1.2.

Таблица 1.2

1	3/2	-2	6
0	$\boxed{7/2}$	0	7
0	-19/2	-1	-18

Выберем второй элемент второй строки в качестве базисного элемента и пересчитаем все элементы таблицы. Получим таблицу 1.3.

Таблица 1.3

1	0	-2	3
0	1	0	2

0	0	-1	1

Далее базисным станет третий элемент третьей строки. Результат вычислений показан в таблице 1.4

Таблица 1.4

1	0	0	1
0	1	0	2
0	0	1	-1

Перепишем таблицу в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = -1. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили решение системы.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Цель: Освоить графический и симплексный методы решения задач линейного программирования.

Задание: Для изготовления различных изделий А и В используются три вида сырья. На производство единицы изделия А требуется затратить: сырья первого вида – a_1 кг, второго вида – a_2 кг, третьего вида – a_3 кг. На производство единицы изделия В требуется затратить: сырья первого вида – b_1 кг, второго – b_2 кг, третьего – b_3 кг. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве p_1 кг, второго – p_2 кг, третьего – p_3 кг. Прибыль от реализации единицы готового изделия А составляет α руб., изделия В – β руб. Составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

1. Осуществить математическую запись задачи линейного программирования;
2. Найти оптимальное решение задачи:
   а) графическим методом;
   б) симплексным методом.

№	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	p_1	p_2	p_3	α	β
1	16	8	5	4	6	9	784	552	567	6	4
2	12	10	3	3	5	6	684	650	558	6	2
3	8	6	4	3	6	9	862	864	945	3	2
4	11	8	3	5	4	5	671	588	423	3	4
5	15	11	9	4	5	10	1095	865	1080	3	2
6	4	6	2	5	3	0	600	540	120	6	7
7	6	5	3	3	10	12	714	910	948	3	9
8	9	6	3	4	7	8	801	807	768	3	2
9	3	4	3	5	8	11	453	616	627	1	3
10	10	5	4	9	11	15	1870	1455	1815	7	9

№	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	p_1	p_2	p_3	α	β
11	5	3	2	2	3	3	505	393	348	7	4
12	7	6	1	3	3	2	1365	1245	650	6	5
13	6	4	3	2	3	4	600	510	600	6	3
14	5	4	3	3	3	4	750	631	720	5	6
15	8	б	3	2	3	2	840	870	540	6	2
16	3	3	2	2	3	5	273	300	380	4	5
17	9	б	4	5	8	16	1431	1224	1 256	3	2
18	4	3	2	3	4	6	480	444	546	2	4
19	4	3	3	3	4	5	540	393	450	5	6
20	2	3	2	3	6	8	438	672	672	3	8

Пример решения

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используются 4 вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Вид ресурса	**Запас ресурса**	**Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции**	
		$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$
$\mathbf{S_1}$	18	1	3
$\mathbf{S_2}$	16	2	1
$\mathbf{S_3}$	5	-	1
$\mathbf{S_4}$	21	3	-

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2 составляет 2 и 3 денежные единицы соответственно. Необходимо составить такой план производства, при котором прибыль от реализации двух видов продукции будет максимальной.

<u>Решение.</u>

При составлении экономико-математической модели задачи получаем следующую систему ограничений и целевую функцию:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, & (I) \\ 2x_1 + x_2 \le 16, & (II) \\ \quad\quad x_2 \le 5, & (III) \\ 3x_1 \quad\quad \le 21. & (IV) \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

При этом по смыслу задачи $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$. (V, VI)

Необходимо найти число единиц продукции P_1 и P_2, запланированных к производству ($x_1,\ x_2$).

а) Графическое решение задачи

Изобразим многоугольник решений. Для этого сначала построим границы полуплоскостей, то есть прямые (рисунок 2.1):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18, & (I) \\ 2x_1 + x_2 = 16, & (II) \\ \quad\quad x_2 = 5, & (III) \\ 3x_1 \quad\quad = 21. & (IV) \end{cases}$$

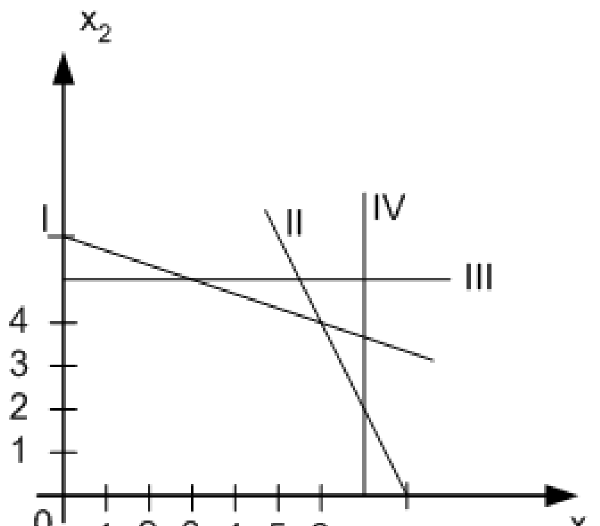


Рисунок 2.1

Для определения искомой полуплоскости необходимо задать произвольную контрольную точку, не лежащую на ее границе – построенной прямой. Если неравенство выполняется в контрольной точке, то оно выполняется и во всех точках полуплоскости, содержащей контрольную точку, и не выполняется во всех точках другой полуплоскости. В качестве контрольной точки удобно взять начало координат O(0;0). С учетом естественных условий (V, VI), накладываемых на переменные, получается многоугольник решений (рисунок 2.2).

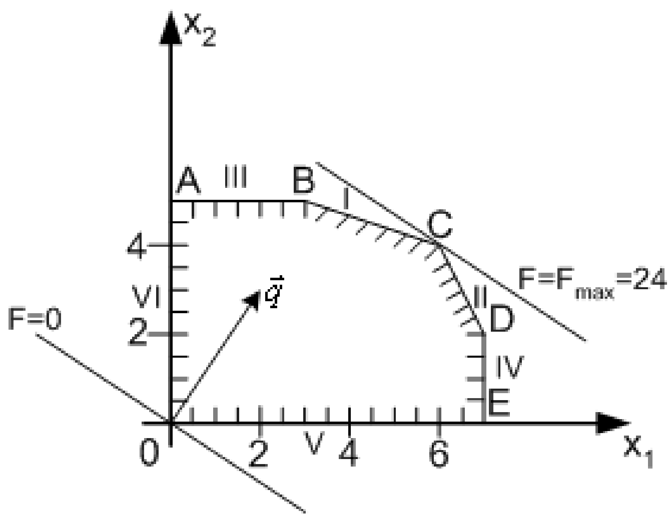


Рисунок 2.2

Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то целевая функция принимает максимальное (или минимальное) значение в одной из угловых точек многоугольника решений. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы среди вершин многоугольника OABCDE найти точку $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, в которой целевая функция $F = 2x_1 + 3x_2$ принимает максимальное значение. Чтобы определить эту вершину, проведем прямую $F = 0$ (т.е. $2x_1 + 3x_2 = 0$), а затем определим направление возрастания целевой функции (градиент $\vec{q}$). Для линейной функции градиент всегда равен вектору, составленному из коэффициентов этой функции, и перпендикулярен прямой $F = 0$. Для нашей целевой функции $F = 2x_1 + 3x_2$ градиент $\vec{q} = (2;3)$ (рисунок 2.2). Таким образом, двигая прямую $F = 0$ в сторону вектора $\vec{q}$, находим точку максимума С.

Координаты точки С найдем, решая систему уравнения прямых *I* и *II*, пересекающихся в точке С:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18, \\ 2x_1 + x_2 = 16. \end{cases}$$

Ответ: $x^* = (6,4)$ – точка максимума. $F^* = 24$ – максимальное значение целевой функции.

<u>б) Симплексный метод</u>

Для решения задачи симплексным методом необходимо с помощью дополнительных неотрицательных переменных привести задачу к каноническому виду, т.е. свести систему неравенств к системе равенств. Так как в исходной системе во всех неравенствах стоит знак «≤» то, чтобы свести ее к системе равенств необходимо прибавить к каждому неравенству новую дополнительную переменную:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ \qquad x_2 \le 5, \\ 3x_1 \qquad \le 21. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ \qquad x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 \qquad + x_6 = 21. \end{cases}$$

Для заполнения симплексной таблицы перенесем все неизвестные целевой функции $F = 2x_1 + 3x_2$ влево, получим $F - 2x_1 - 3x_2 = 0$.

Теперь заполним таблицу 2.2:

Таблица 2.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Правая часть	Базисные переменные
1	1	3	1	0	0	0	18	x_3
2	2	1	0	1	0	0	16	x_4
3	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0	5	x_5
4	3	0	0	0	0	1	21	x_6
F	-2	-3	0	0	0	0	0	

Для нахождения первоначального опорного плана разобьем переменные на 2 группы: основные (базисные) и неосновные. В качестве базисных выбираем такие m положительных переменных, каждая их которых входит только в одно из m уравнений системы ограничений. Базисные переменные записываются в последний столбец таблицы 2.2. Если переменная является базисной, то ее значение равно соответствующему значению, стоящему в правой части таблицы 2.2, если переменная не является базисной, значит, она равна 0. Таким образом, первоначальный опорный план выглядит следующим образом: $X_0 = (0;0;18;16;5;21)$, $F_0 = 0$.

Чтобы план был оптимальным (т.е. целевая функция достигала максимума) необходимо, чтобы коэффициенты при переменных, стоящих в целевой функции, являлись положительными, либо равнялись 0. В нашем плане имеются отрицательные коэффициенты целевой функции (последняя строка таблицы 2.2), а значит план не оптимальный.

Для улучшения плана, выберем разрешающий элемент в столбце, содержащем наименьший отрицательный коэффициент в целевой функции. В нашем случае это столбец x_2 (таблица 2.2). Этот элемент должен быть обязательно положительным. Если таких элементов несколько, то находят отношения правых частей к соответствующим элементам разрешающего столбца, и за разрешающий выбирают тот элемент, для которого это отношение минимально. Для нашего случая получаем несколько отношений: $\min\left(\frac{18}{3};\frac{16}{1};\frac{5}{1}\right) = 5$. Выделяем этот элемент в прямоугольник (таблица 2.2).

Пересчитываем элементы таблицы по методу Жордана-Гаусса (таблица 2.3).

Таблица 2.3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Правая часть	Базис
1	$\boxed{1}$	0	1	0	-3	0	3	x_3
2	2	0	0	1	-1	0	11	x_4
3	0	1	0	0	1	0	5	x_2
4	3	0	0	0	0	1	21	x_6
F	-2	0	0	0	3	0	15	

Новый опорный план $X_1 = (0;5;3;11;0;21)$ при значении целевой функции $F_1 = 15$ не является оптимальным, так как есть столбец с отрицательным коэффициентом в целевой функции (столбец x_1). Выбираем в этом столбце новый разрешающий элемент $\min\left(\frac{3}{1};\frac{11}{2};\frac{21}{3}\right) = 3$ и пересчитываем таблицу (таблица 2.4).

Таблица 2.4.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Правая часть	Базис
1	1	0	1	0	-3	0	3	x_1
2	0	0	-2	1	$\boxed{5}$	0	5	x_4
3	0	1	0	0	1	0	5	x_2
4	0	0	-3	0	9	1	12	x_6
F	0	0	2	0	-3	0	21	

Новый опорный план $X_2 = (3;5;0;5;0;12)$ при значении целевой функции $F_2 = 21$ также не является оптимальным, так как в столбце x_5 отрицательный коэффициент в целевой функции. Выбираем в этом столбце новый разрешающий элемент $\min\left(\frac{5}{5};\frac{5}{1};\frac{12}{9}\right) = 1$ и пересчитываем таблицу (таблица 2.5).

Таблица 2.5.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Правая часть	Базис
1	1	0	-1/5	3/5	0	0	6	x_1
2	0	0	-2/5	1/5	1	0	1	x_5
3	0	1	2/5	-1/5	0	0	4	x_2
4	0	0	3/5	-9/5	0	1	3	x_6
F	0	0	4/5	3/5	0	0	24	

Получившийся опорный план $X^* = (6;4;0;0;1;3)$ при значении целевой функции $F^* = 24$ является оптимальным и совпадает с решением, полученным графическим способом.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Цель: Научиться составлять двойственную задачу и решать ее с помощью симплекс-метода и с помощью теорем двойственности.

Задание: Принимая задачу из домашней контрольной работы № 2 за исходную, составить и решить симметричную двойственную ей задачу. Дать экономическую интерпретацию двойственной задачи.

Пример решения

Составить двойственную задачу для демонстрационного примера из темы 2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ \qquad x_2 \le 5, \\ 3x_1 \qquad \le 21. \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0,$

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max.$

и решить ее с помощью теорем двойственности.

Решение.

Составим расширенную матрицу исходной системы. Для составления двойственной задачи транспонируем ее.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 18 \\ 2 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 5 \\ \underline{3} & \underline{0} & \underline{21} \\ 2 & 3 & F \end{array}\right) \qquad A^T = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ \underline{3} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{3} \\ 18 & 16 & 5 & 21 & f \end{array}\right)$$

Получим расширенную матрицу двойственной задачи. Запишем математическую модель полученной задачи:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + \quad 3y_4 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \qquad \ge 3. \end{cases}$$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0,$

$f = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \to \min.$

Двойственная задача решается либо с помощью симплексного метода, либо с помощью теорем двойственности с использованием связи между решениями исходной и двойственной задачи.

Попробуем решить нашу двойственную задачу, используя эту связь.

Для нашей исходной задачи оптимальное решение $X^* = (6; 4; 0; 0; 1; 3)$. Целевая функция $F^* = 24$.

Используем 1 теорему двойственности: если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны $F^* = f^*$. Получим $f^* = 24$.

Поставим в соответствие переменные исходной и двойственной задачи (таблица 3.1). По теореме о том, что положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи, найдем нулевые значения переменных двойственной задачи.

Таблица 3.1

Переменные исходной задачи	
Основные	Дополнительные
6 4 x_1 x_2 $\updownarrow$ $\updownarrow$ y_5 y_6 0 0	0 0 1 3 x_3 x_4 x_5 x_6 $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ y_1 y_2 y_3 y_4 0 0
Дополнительные	Основные
Переменные двойственной задачи	

Осталось выяснить чему будут равны двойственные переменные y_1, y_2. Используем вторую теорему двойственности: компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи.

Для этого из таблицы 2.5 выпишем значения коэффициентов целевой функции:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Правые части
…	…	…	…	…	…	…	…
F	0	0	4/5	3/5	0	0	24

Так как переменным x_3 и x_4 соответствуют переменные y_1, y_2, то $y_1 = \frac{4}{5}, y_2 = \frac{3}{5}$.

В итоге получаем оптимальное решение двойственной задачи $Y^* = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; 0; 0; 0; 0\right)$.

Если подставить полученное решение в систему ограничений, то все неравенства будут выполняться, и значение целевой функции будет равно $f^* = 24$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Цель: Научиться решать транспортную задачу с использованием различных методов определения первоначального опорного плана.

Задание: Решить транспортную задачу распределения груза от 4 поставщиков 5 потребителям, условие которой задано матрицей стоимостей перевозки единицы груза **C**, матрицей запасов **A** и матрицей потребностей **B**. Матрицы **A**, **B** и **C** представлены ниже в таблице. Матрица **C** выбирается из варианта, номер которого равен сумме двух последних цифр номера зачетной книжки, матрица-столбец **A** выбирается из варианта, номер которого совпадает с последней цифрой, а матрица строка **B** выбирается по предпоследней цифре. Число 0 соответствует числу 10.

Номер Варианта	C	A	B
1	$\begin{bmatrix} 4 & 21 & 12 & 8 & 1 \\ 20 & 8 & 25 & 15 & 23 \\ 17 & 1 & 11 & 5 & 3 \\ 23 & 10 & 24 & 6 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21 \\ 21 \\ 23 \\ 23 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 22 & 22 & 22 & 11 & 11 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 6 & 11 & 20 & 17 & 8 \\ 1 & 25 & 3 & 18 & 17 \\ 9 & 39 & 16 & 30 & 31 \\ 23 & 15 & 4 & 3 & 28 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 \\ 17 \\ 18 \\ 13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 12 & 14 & 16 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 24 & 10 & 25 \\ 30 & 2 & 22 & 16 & 7 \\ 30 & 24 & 27 & 29 & 10 \\ 15 & 17 & 21 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 24 \\ 15 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 13 & 14 & 31 & 9 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 21 & 19 & 11 & 12 & 12 \\ 26 & 29 & 14 & 1 & 26 \\ 39 & 1 & 22 & 8 & 25 \\ 53 & 23 & 40 & 26 & 28 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 24 \\ 12 \\ 18 \\ 16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 13 & 26 & 10 & 10 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 25 & 28 & 20 & 15 & 7 \\ 27 & 5 & 11 & 23 & 10 \\ 1 & 25 & 14 & 16 & 16 \\ 8 & 6 & 4 & 16 & 18 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 14 \\ 18 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 & 11 & 30 \end{bmatrix}$

Номер Варианта	C	A	B
6	$\begin{bmatrix} 14 & 25 & 18 & 19 & 23 \\ 2 & 17 & 16 & 24 & 2 \\ 29 & 3 & 7 & 15 & 22 \\ 5 & 20 & 17 & 23 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 33 \\ 25 \\ 25 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 33 & 11 & 11 & 11 & 34 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 19 & 1 & 25 \\ 8 & 27 & 30 & 7 & 22 \\ 10 & 20 & 19 & 26 & 20 \\ 18 & 28 & 25 & 7 & 22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18 \\ 23 \\ 17 \\ 22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21 & 21 & 9 & 9 & 20 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 30 & 20 & 27 & 15 & 26 \\ 25 & 6 & 28 & 20 & 5 \\ 19 & 24 & 11 & 29 & 23 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 33 \\ 33 \\ 33 \\ 11 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 22 & 22 & 22 & 22 & 22 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} 11 & 10 & 15 & 8 & 7 \\ 12 & 14 & 29 & 20 & 20 \\ 18 & 7 & 5 & 25 & 29 \\ 24 & 4 & 30 & 24 & 23 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 24 \\ 15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 & 15 & 10 \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} 29 & 53 & 39 & 29 & 22 \\ 15 & 33 & 16 & 3 & 3 \\ 16 & 27 & 16 & 3 & 5 \\ 35 & 50 & 39 & 20 & 23 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 33 \\ 18 \\ 32 \\ 17 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} 12 & 6 & 29 & 19 & 21 \\ 14 & 3 & 30 & 10 & 10 \\ 15 & 27 & 28 & 11 & 24 \\ 1 & 23 & 25 & 15 & 13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 13 \\ 27 \\ 16 \\ 14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} 26 & 12 & 22 & 11 & 23 \\ 20 & 23 & 25 & 22 & 9 \\ 23 & 15 & 11 & 22 & 7 \\ 1 & 26 & 10 & 11 & 19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 16 \\ 13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$
13	$\begin{bmatrix} 29 & 4 & 7 & 6 & 16 \\ 21 & 13 & 25 & 21 & 7 \\ 20 & 10 & 12 & 6 & 2 \\ 17 & 7 & 4 & 6 & 19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 14 \\ 18 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}$

Номер Варианта	C	A	B
14	$\begin{bmatrix} 20 & 5 & 27 & 10 & 26 \\ 7 & 17 & 18 & 21 & 28 \\ 27 & 21 & 9 & 23 & 26 \\ 1 & 13 & 17 & 23 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 13 & 12 & 20 \end{bmatrix}$
15	$\begin{bmatrix} 17 & 29 & 2 & 8 & 18 \\ 14 & 8 & 25 & 15 & 21 \\ 29 & 11 & 15 & 13 & 20 \\ 27 & 15 & 19 & 8 & 14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 32 \\ 8 \\ 13 \\ 27 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 & 15 & 20 \end{bmatrix}$
16	$\begin{bmatrix} 14 & 4 & 27 & 29 & 23 \\ 17 & 7 & 16 & 19 & 2 \\ 20 & 12 & 15 & 29 & 5 \\ 14 & 24 & 18 & 7 & 13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18 \\ 14 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 11 & 11 & 9 & 21 \end{bmatrix}$
17	$\begin{bmatrix} 30 & 17 & 26 & 14 & 3 \\ 18 & 14 & 27 & 6 & 20 \\ 8 & 24 & 17 & 17 & 26 \\ 1 & 18 & 21 & 16 & 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 11 & 11 & 11 & 16 \end{bmatrix}$
18	$\begin{bmatrix} 17 & 10 & 7 & 5 & 13 \\ 12 & 28 & 25 & 9 & 10 \\ 14 & 15 & 18 & 9 & 28 \\ 52 & 16 & 21 & 12 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 34 \\ 18 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 30 \end{bmatrix}$

Пример решения

Имеются 3 поставщика и 4 потребителя. Запасы поставщиков и спросы потребителей, а также затраты на перевозку единицы груза для каждой пары «поставщик-потребитель» приведены в таблице 4.1. Найти объемы перевозок для каждой пары «поставщик-потребитель» так, чтобы:

1. запасы всех поставщиков были реализованы;
2. спросы всех потребителей были удовлетворены;
3. суммарные затраты на перевозку груза были бы минимальны.

Таблица 4.1

$i \backslash j$	1	2	3	4	a_i
1	2 x_{11}	1 x_{12}	3 x_{13}	2 x_{14}	90
2	2 x_{21}	3 x_{22}	3 x_{23}	1 x_{24}	70

3	3 x_{31}	3 x_{32}	2 x_{33}	1 x_{34}	50
b_j	80	60	40	30	210

Решение.

1. Построим математическую модель исходной задачи.

Система ограничений:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 70, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30, \\ x_{ij} \ge 0,\ i = 1,2,3; \qquad j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F=2\cdot x_{11}+x_{12}+3\cdot x_{13}+2\cdot x_{14}+2\cdot x_{21}+3\cdot x_{22}+3\cdot x_{23}+x_{24}+3\cdot x_{31}+3\cdot x_{32}+2\cdot x_{33}+x_{34}\to min$$

2. Составим первоначальный план перевозок.

Первоначальный опорный план можно определить, например, по правилу «северо-западного угла».

Для этого вначале клетка, находящаяся в левом верхнем углу, заполняется максимально возможным количеством груза. Затем заполняется соседняя по строке или столбцу клетка, исходя из оставшихся возможностей и т.д. Заполнение клеток продолжается до распределения всего груза (таблица 4.2).

Таблица 4.2

$i \backslash j$	1	2	3	4	a_i
1	2 80	1 10	3	2	90
2	2	3 50	3 20	1	70
3	3	3	2 20	1 30	50
b_j	80	60	40	30	210

Замечание: число занятых клеток должно быть равно: $m+n–1$, где m – количество поставщиков, n – количество потребителей.

Если число заполненных клеток окажется меньше, чем $m+n–1$, то с помощью условных поставок, равных нулю, заполнить недостающие для выполнения условия клетки и продолжить решение. Предпочтительнее те клетки, в которых стоимость перевозки меньше.

В решаемой задаче число занятых клеток равно 6 и соответствует формуле $m+n–1$.

Проверим первоначальный план на оптимальность. Для этого составим двойственную задачу. Введем следующие двойственные переменные:

$y_1 = u_1, y_2 = u_2, y_3 = u_3,$

$y_4 = v_1, y_5 = v_2, y_6 = v_3, y_7 = v_4,$

где $u_i, i = 1,2,3; v_j, j = 1,2,3,4-$ так называемые потенциалы поставщиков и потребителей соответственно. Тогда двойственная задача выглядит следующим образом: найти максимальное значение функции

$f = 90u_1 + 70u_2 + 50u_3 + 80v_1 + 60v_2 + 40v_3 + 30v_4,$

при следующих значениях: $\begin{cases} u_1 + v_1 \le 2, \\ u_1 + v_2 \le 1, \\ u_1 + v_3 \le 3, \\ u_1 + v_4 \le 2, \\ u_2 + v_1 \le 2, \\ u_2 + v_2 \le 3, \\ u_2 + v_3 \le 3, \\ u_2 + v_4 \le 1, \\ u_3 + v_1 \le 3, \\ u_3 + v_2 \le 3, \\ u_3 + v_3 \le 2, \\ u_3 + v_4 \le 1. \end{cases}$

Исходя из теоремы о том, что если некоторая переменная в оптимальном плане исходной задачи строго больше нуля, то при подстановке оптимального плана двойственной задачи в систему ограничений соответствующее неравенство обращается в равенство, составляются критерии оптимальности опорных планов транспортных задач. В рассматриваемой задаче получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_2 = 1, \\ u_2 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_3 = 2, \\ u_3 + v_4 = 1. \end{cases}$$

Полагая $u_1 = 0$, находим решение $u_2 = 2$, $u_3 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 1$, $v_4 = 0$.

Подставляя полученные значения потенциалов в неравенства, не вошедшие в систему уравнений, получаем

$$u_1 + v_3 \le 3, \qquad 1 \le 3, \qquad (а)$$

$$u_1 + v_4 \le 2, \qquad 0 \le 2, \qquad (б)$$

$$u_2 + v_1 \le 2, \qquad 4 \le 2, \qquad (в)$$

$$u_2 + v_4 \le 1, \qquad 2 \le 1, \qquad (г)$$

$$u_3 + v_1 \le 3, \qquad 3 \le 3, \qquad (д)$$

$$u_3 + v_2 \le 3, \qquad 2 \le 3, \qquad (e)$$

План является оптимальным только в том случае, если все ограничения двойственной задачи выполняются. В примере не выполняются неравенства *(в)* и *(г)*. Это означает, что план не является оптимальным.

3. Составим новый опорный план.

Для этого необходимо в клетку, в которой не выполняется неравенство, загрузить груз. В нашем случае таких клеток 2: клетка (2,1) и (2,4).

Пустая клетка является предпочтительной для загрузки в том случае, если в соответствующем неравенстве имеет место наибольшее отличие между левой и правой частями. В примере такой клеткой является клетка (2,1).

В выбранной для загрузки клетке ставится знак «+» и строится замкнутый контур (цикл), одна из вершин которого находится в этой клетке, а все остальные – в занятых клетках. Такой контур имеет произвольную конфигурацию, и может быть построен только единственным образом.

Затем в занятых клетках, где находятся вершины контура, проставляют последовательно знаки «+», «–», «+», «–», «+» и т.д. (таблицу 4.3).

Таблица 4.3

$i \backslash j$	1	2	3	4	a_i
1	2 – 80	1 + 10	3	2	90
2	+	3 – 50	3 20	1	70
3	3	3	2 20	1 30	50
b_j	80	60	40	30	210

Знак «+» означает, что в этой клетке необходимо добавить некоторое количество груза, а знак «–» означает уменьшение груза. Вычитают (добавляют) минимальное количество груза, содержащегося в клетках со знаком «–». В данной задаче эта величина равняется 50. В результате получаем следующий опорный план (таблица 4.4).

Таблица 4.4

		$v_1=2$	$v_2=1$	$v_3=3$	$v_4=2$	
		1	2	3	4	a_i
$u_1=0$	1	2 30	1 60	$3\le 3$	$2\le 2$	90
$u_2=0$	2	2 50	$1\le 3$	3 20 –	$2\le 1$ +	70
$u_3=-1$	3	$1\le 3$	$0\le 3$	2 + 20	1 – 30	50
	b_j	80	60	40	30	210

Целевая функция при этом плане равна $F_1 = 350$.

Определив потенциалы и проверив неравенства, приходим к выводу, что план не является оптимальным и требуется его улучшение.

4. Улучшим план.

В таблице 4.4 видно, что перспективной клеткой является клетка (2,4), так как только в ней не выполняется неравенство. Другие вершины контура находятся в клетках (2,3), (3,3) и (3,4). Следующий план представлен в таблице 4.5.

Таблица 4.5

		$v_1=2$	$v_2=1$	$v_3=2$	$v_4=1$	
		1	2	3	4	a_i
$u_1=0$	1	2 30	1 60	$2\le 3$	$1\le 2$	90
$u_2=0$	2	2 50	$1\le 3$	$2\le 3$	1 20	70
$u_3=0$	3	$2\le 3$	$1\le 3$	2 40	1 10	50
	b_j	80	60	40	30	210

Целевая функция принимает значение $F_2 = 330$.

Т.к. все неравенства в пустых клетках таблицы 4.5 выполняются, то полученный план является оптимальным.

Замечание: если при проверке последнего плана на оптимальность окажется, что хотя бы одно из неравенств системы ограничений, не вошедшее в систему уравнений, будет выполняться как равенство при найденных значениях потенциалов, то задача имеет не единственное решение.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Цель: Научиться решать матричные игры в чистых и смешанных стратегиях.

Задачи: Отрасли А и В осуществляют капиталовложения в три объекта. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль отрасли А в зависимости от объема финансирования выражается элементами платежной матрицы. Для упрощения задачи принять, что убыток отрасли В равен прибыли отрасли А. Найти оптимальные стратегии отраслей. Вариант выбирается по сумме двух последних цифр номера зачетной книжки.

Номер Варианта	Платежная Матрица	Номер Варианта	Платежная Матрица
1	$\begin{bmatrix} 21 & 12 & 18 \\ 25 & 15 & 13 \\ 11 & 24 & 10 \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} 20 & 13 & 18 \\ 21 & 15 & 14 \\ 11 & 24 & 10 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 13 & 18 & 17 \\ 16 & 30 & 31 \\ 28 & 44 & 25 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 18 \\ 23 & 15 & 13 \\ 21 & 24 & 10 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 24 & 30 & 25 \\ 33 & 22 & 16 \\ 31 & 28 & 29 \end{bmatrix}$	15	$\begin{bmatrix} 16 & 12 & 18 \\ 35 & 15 & 23 \\ 31 & 24 & 10 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 21 & 19 & 11 \\ 26 & 29 & 14 \\ 31 & 10 & 22 \end{bmatrix}$	16	$\begin{bmatrix} 43 & 29 & 39 \\ 15 & 33 & 16 \\ 16 & 27 & 16 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 25 & 10 & 28 \\ 27 & 5 & 11 \\ 25 & 34 & 16 \end{bmatrix}$	17	$\begin{bmatrix} 29 & 21 & 19 \\ 30 & 10 & 10 \\ 28 & 11 & 24 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 14 & 25 & 18 \\ 17 & 16 & 24 \\ 29 & 13 & 17 \end{bmatrix}$	18	$\begin{bmatrix} 26 & 26 & 12 \\ 20 & 23 & 25 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 18 & 23 & 24 \\ 27 & 30 & 15 \\ 19 & 26 & 20 \end{bmatrix}$	19	$\begin{bmatrix} 29 & 14 & 7 \\ 21 & 13 & 25 \\ 20 & 10 & 12 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 27 & 15 & 26 \\ 28 & 20 & 5 \\ 11 & 29 & 23 \end{bmatrix}$	20	$\begin{bmatrix} 20 & 27 & 10 \\ 28 & 13 & 24 \\ 18 & 34 & 26 \end{bmatrix}$

Номер Варианта	Платежная Матрица	Номер Варианта	Платежная Матрица
9	$\begin{bmatrix} 15 & 18 & 27 \\ 12 & 14 & 29 \\ 18 & 7 & 5 \end{bmatrix}$	21	$\begin{bmatrix} 17 & 29 & 2 \\ 14 & 8 & 25 \\ 29 & 11 & 15 \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} 24 & 4 & 27 \\ 17 & 7 & 16 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix}$	22	$\begin{bmatrix} 30 & 17 & 26 \\ 18 & 14 & 27 \\ 8 & 24 & 7 \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} 17 & 10 & 7 \\ 12 & 28 & 25 \\ 14 & 15 & 18 \end{bmatrix}$	23	$\begin{bmatrix} 4 & 25 & 18 \\ 17 & 16 & 24 \\ 29 & 13 & 17 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} 9 & 25 & 18 \\ 37 & 16 & 24 \\ 29 & 3 & 17 \end{bmatrix}$	24	$\begin{bmatrix} 34 & 25 & 18 \\ 17 & 19 & 24 \\ 29 & 13 & 20 \end{bmatrix}$

Пример решения

Пример 1. Решить в чистых стратегиях матричную игру, заданную платежной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение: Найдем нижнюю (α) и верхнюю (β) чистые цены игры.

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	9	5	6	7	5
A_2	1	4	3	8	1
A_3	6	3	2	-4	-4
β_j	9	5	6	8	5/ 5

Как видно из таблицы, $\alpha = \beta = 5$.

Таким образом, седловой точкой является пара стратегий (A_1, B_2), а седловым элементом – $a_{12} = 5$. Чистая цена игры равна $v = 5$. Итак, игра решена в чистых стратегиях.

A_1 является оптимальной стратегией для игрока А, и любое отклонение от этой стратегии приведет к уменьшению его выигрыша, если игрок В использует свою оптимальную стратегию B_2.

Аналогично, всякое отклонение игрока В от стратегии B_2 приведет к увеличению его проигрыша, если игрок А использует стратегию A_1.

Пример 2. Решить в смешанных стратегиях матричную игру, заданную матрицей $\begin{pmatrix} 50 & 15 & 20 \\ 25 & 40 & 30 \\ 10 & 30 & 60 \end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u>

Зачастую ни одна из чистых стратегий не является выигрышной в 100% случаев. В этом случае решение в чистых стратегиях невозможно и оптимальное решение получается чередованием чистых стратегий. Положим p_i – вероятность выигрыша игрока А, в случае применения i-ой стратегии, q_j – вероятность проигрыша игрока В, в случае применения j-ой стратегии.

1. Составляем задачу линейного программирования для определения оптимальной смешанной стратегии игрока А.

Система ограничений $\begin{cases} 50p_1 + 25p_2 + 10p_3 \geq v, \\ 15p_1 + 40p_2 + 30p_3 \geq v, \\ 20p_1 + 30p_2 + 60p_3 \geq v, \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0, \end{cases}$

где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Для решения задачи сделаем замену: $\frac{p_1}{v} = x_1, \frac{p_2}{v} = x_2, \frac{p_3}{v} = x_3$. Тогда система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} 50x_1 + 25x_2 + 10x_3 \geq 1, \\ 15x_1 + 40x_2 + 30x_3 \geq 1, \\ 20x_1 + 30x_2 + 60x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \qquad (5.1)$$

где $x_1 + x_2 + x_3 = 1/v$. Так как игрок А стремится максимизировать свой выигрыш v, то это эквивалентно минимизации величины $1/v$. Задача нахождения оптимальной смешанной стратегии игрока, сводится к следующей задаче линейного программирования: при ограничениях (5.1) найти минимальное значение функции $F_1 = x_1 + x_2 + x_3$.

2. Составляем задачу линейного программирования для определения оптимальной смешанной стратегии игрока В.

Система ограничений: $\begin{cases} 50q_1 + 15q_2 + 20q_3 \leq v, \\ 25q_1 + 40q_2 + 30q_3 \leq v, \\ 10q_1 + 30q_2 + 60q_3 \leq v, \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0, \end{cases}$

где $q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

Для решения задачи сделаем замену: $\frac{q_1}{v} = y_1, \frac{q_2}{v} = y_2, \frac{q_3}{v} = y_3$. Тогда система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} 50y_1 + 15y_2 + 20y_3 \le 1, \\ 25y_1 + 40y_2 + 30y_3 \le 1, \\ 10y_1 + 30y_2 + 60y_3 \le 1, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

где $y_1 + y_2 + y_3 = 1/v$. Аналогично, так как игрок В стремится минимизировать свой проигрыш, то задача нахождения оптимальной стратегии игрока сводится к следующей задаче линейного программирования: при ограничениях (5.2) найти максимальное значение функции $F_2 = y_1 + y_2 + y_3$.

Полученные задачи линейного программирования являются двойственными. Поэтому решим одну из них симплексным методом, а решение второй задачи получим, используя теоремы двойственности. Удобнее начать решение симплексным методом с задачи линейного программирования для определения оптимальной смешанной стратегии игрока В.

Решая эту задачу симплексным методом, находим ее оптимальный план: $x_1^* = 0{,}0102$, $x_2^* = 0{,}0180$, $x_3^* = 0{,}0043$ и $F_1 = 0{,}0325$,а затем цену игры $v = \frac{1}{F_1} = 30{,}77$ и компоненты оптимальной смешанной стратегии по обратным формулам: $p_1 = x_1 \cdot v,\ p_2 = x_2 \cdot v,\ p_3 = x_3 \cdot v$. Получаем $p_1^* = 0{,}314$, $p_2^* = 0{,}554$, $p_3^* = 0{,}132$.

Затем, с помощью теорем двойственности, находим оптимальный план для первого игрока: $y_1^*=0{,}0133$, $y_2^*=0{,}0094$, $y_3^*=0{,}0098$,а затем компоненты оптимальной смешанной стратегии $q_1^* = 0{,}409$, $q_2^* = 0{,}289$, $q_3^* = 0.302$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Цель: Научиться решать задачи принятия решений в условиях неопределенности с помощью различных критериев.

Задание:. Решить всеми возможными критериями. Вариант выбирается по последней цифре номера зачетной книжки.

Варианты 1-2. Розничное торговое предприятие разработало несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учетом меняющейся конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний величины прибыли представлены в виде матрицы выигрышей. Определить оптимальный план продажи товаров:

1. $\lambda = 0,4$

План продажи	Величина прибыли (д.е.) при конъюнктуре рынка			
	$К_1$	$К_2$	$К_3$	$К_4$
$П_1$	5,0	4,5	5,1	4,0
$П_2$	4,2	5,6	3,9	4,3
$П_3$	3,6	4,1	4,8	4,0
$П_4$	3,5	3,9	4,6	3,8

2. $\lambda = 0,6$

План продажи	Величина прибыли (д.е.) при конъюнктуре рынка			
	$К_1$	$К_2$	$К_3$	$К_4$
$П_1$	5	2	1	2
$П_2$	4	2	3	3
$П_3$	1	5	1	2
$П_4$	2	1	4	1

Варианты 3-5. Экономисты оптового торгового предприятия на основе возможных вариантов поведения потребителей $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ разработали несколько своих хозяйственных планов $О_1$, $О_2$, $О_3$, $О_4$, а результаты всех возможных исходов представили в виде матрицы прибыли (выигрышей). Определить оптимальный план нового предприятия:

3. $\lambda = 0,5$

Хозяйственный План	Прибыль по каждому варианту, д.е.			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$

O_1	2,3	3,4	3,0	3,4
O_2	3,0	2,9	2,6	3,7
O_3	12,8	3,8	3,6	3,0
O_4	4,0	2,9	4,0	4,2

4. $\lambda = 0,7$

Хозяйственный План	Прибыль по каждому варианту, д.е.			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
O_1	3	6	8	4
O_2	9	7	5	2
O_3	10	2	7	6
O_4	4	8	1	11

5. $\lambda = 0,6$

Хозяйственный план	Прибыль по каждому варианту, д.е.				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
O_1	0,8	1,4	3,2	2,6	2,2
O_2	4,2	0,1	1,6	2,2	3,4
O_3	2,6	3,8	6,2	0,4	3,2
O_4	1,4	4,0	2,0	5,2	0,6

Варианты 6-7. Розничное предприятие торговли формирует заявку на новые товары H_1, H_2, H_3, заменяющие старые товары, хорошо известные покупателю. Методы изучения спроса позволили составить матрицу условных вероятностей P_{ij} продажи старых товаров C_1, C_2, C_3, при наличии конкурирующих новых товаров в торговой сети. Составить план заказ на товары, чтобы обеспечить оптимальное соотношение между их продажей:

6.

Старые товары	Новые товары		
	H_1	H_2	H_3
C_1	0,6 9	0,3 6	0,1 4
C_2	0,2 8	0,7 3	0,1 7
C_3	0,1 5	0,4 5	0,5 8

7.

Старые товары	Новые товары		
	H_1	H_2	H_3
C_1	0,7 6	0,1 7	0,2 5
C_2	0,6 7	0,2 5	0,2 8

C_3	0,6 5	0,3 3	0,1 6

Варианты 8-10. Предприятие общественного питания планирует выпуск трех партий новых ранее не производимых полуфабрикатов $П_1$, $П_2$, $П_3$ в условиях неясной рыночной конъюнктуры, относительно которой известны лишь отдельные возможные состояния $Р_1$, $Р_2$, $Р_3$, $Р_4$, а также возможные объемы товарооборота по каждому варианту и их условные вероятности $Р_{ij}$, которые представлены в правом верхнем углу клетки таблицы. Определить предпочтительный план выпуска полуфабрикатов:

8.

Партии полуфабрикатов	Объем товарооборота при различных состояниях рыночной конъюнктуры			
	$Р_1$	$Р_2$	$Р_3$	$Р_4$
$П_1$	0,4 2,2	0,1 3,8	0,2 2,8	0,3 3,2
$П_2$	0,3 2,6	0,2 2,4	0,1 3,1	0,4 3,3
$П_3$	0,2 3,0	0,3 2,0	0,2 1,8	0,3 2,3

9.

Партии полуфабрикатов	Объем товарооборота при различных состояниях рыночной конъюнктуры			
	$Р_1$	$Р_2$	$Р_3$	$Р_4$
$П_1$	0,2 2,4	0,3 0,9	0,2 1,7	0,3 1,2
$П_2$	0,3 1,4	0,2 1,8	0,1 1,3	0,4 1,6
$П_3$	0,4 1,2	0,1 2,0	0,2 1,8	0,3 1,3

10.

Партии полуфабрикатов	Объем товарооборота при различных состояниях рыночной конъюнктуры			
	$Р_1$	$Р_2$	$Р_3$	$Р_4$
$П_1$	0,3 1,2	0,2 2,1	0,1 1,7	0,4 2,0
$П_2$	0,4 1,5	0,1 1,3	0,2 1,6	0,3 1,8
$П_3$	0,2 1,7	0,3 1,6	0,2 1,9	0,3 1,4

Пример решения

Фермер имеет возможность посеять одну из трех культур A_1 , A_2 , A_3, урожайность которых, а значит и доход фермера, зависит от условий погоды B_1 (лето сухое), B_2 (лето нормальное) и B_3 (лето дождливое). Матрица доходов фермера имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 50 & 15 & 20 \\ 25 & 40 & 30 \\ 10 & 30 & 60 \end{pmatrix}.$$

Требуется дать рекомендации на посев, используя критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Севиджа и Гурвица, если известны распределения вероятностей доходов фермера в зависимости от условий погоды : $q_1 = 0{,}3$, $q_2 = 0{,}5$, $q_3 = 0{,}3$, а также показатель оптимизма $\lambda = 0{,}8$.

<u>Решение</u>.

1. Критерий Байеса. Оптимальное решение вычисляется по формуле: $\max_i(v_i)$, где $v_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + ... + a_{in}p_n$

Средние выигрыши фермера по критерию Байеса составляют следующие суммы:

$v_1 = 50\cdot 0.3 + 15\cdot 0.5 + 20\cdot 0.2 = 26.5$;

$v_2 = 25\cdot 0.3 + 40\cdot 0.5 + 30\cdot 0.2 = 33.5$;

$v_3 = 10\cdot 0.3 + 30\cdot 0.5 + 60\cdot 0.2 = 30$.

Таким образом, максимальный выигрыш составляет 33.5 ден.ед., что соответствует стратегии A_2.

2. Критерий Лапласа. В этом случае оптимальное решение вычисляется по формуле $\max_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$.

Средние выигрыши фермера по критерию Лапласа составляют следующие суммы:

$v_1 = \frac{1}{3}(50+15+20) = 28\frac{1}{3}$;

$v_2 = \frac{1}{3}(25+40+30) = 31\frac{2}{3}$;

$v_3 = \frac{1}{3}(10+30+60) = 33\frac{1}{3}$.

Таким образом, максимальный выигрыш составляет 33,3 д.е., что соответствует стратегии A_3.

3. Критерий Вальда. В этом случае оптимальное решение вычисляется по формуле $\max_i\left(\min_j a_{ij}\right)$

			min
50	15	20	15
25	40	30	25
10	30	60	10

Средние выигрыши фермера по критерию Вальда составляют следующие суммы:

$v_1 = 15$;

$v_2 = 25$;

$v_3 = 10$.

Таким образом, максимальный выигрыш составляет 25 д.е., что соответствует стратегии A_2.

4. Критерий Сэвиджа. В этом случае оптимальное решение вычисляется по формуле $\max\limits_i\left(\min\limits_j r_{ij}\right)$, где r_{ij} матрица рисков.

Таким образом, для решения задачи с помощью критерия Сэвиджа необходимо составить матрицу рисков $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$. Для этого в матрице доходов находим максимальное значение в столбце и из него вычитаем элементы соответствующего столбца в матрице доходов.

	50	15	20
	25	40	30
	10	30	60
max	50	40	60

В полученной матрице рисков находим максимальный элемент в каждой строке, а из них выбираем минимальный.

			max
0	25	40	40
25	0	30	30
40	10	0	40

В результате получаем, что оптимальным решением по критерию Сэвиджа является стратегия A_2.

5. Критерий Гурвица. Оптимальному решению по этому критерию соответствует $\max\limits_i\left\{\lambda \max\limits_j a_{ij} + (1-\lambda)\min\limits_j a_{ij}\right\}$,

Суммы выигрышей игрока по критерию Гурвица следующие:

$v_1 = 0.2 \cdot 50 + 0.8 \cdot 15 = 22$;

$v_2 = 0.2 \cdot 40 + 0.8 \cdot 25 = 28$;

$v_3 = 0.2 \cdot 60 + 0.8 \cdot 10 = 20$.

Итак, наибольшая сумма составляет 28 д.е. и соответствует стратегии A_2.

Вывод. Рекомендовать для посева культуру A_2.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Предмет и основной метод исследования операций. Математическая модель и ее составные части.
2. Общая постановка задачи использования ресурсов и ее математическая модель.
3. Общая постановка и математическая модель сбалансированной транспортной задачи.
4. Общая постановка основной задачи линейного программирования
5. Основные определения теории линейного программирования и свойства решений основной задачи.
6. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
7. Алгоритм графического решения задач линейного программирования.
8. Сущность симплексного метода и его алгоритм.
9. Общая постановка и экономическая интерпретация двойственной задачи.
10. Основные виды двойственных пар задач.
11. Теоремы о связи между решениями исходной и двойственной задач в линейном программировании.
12. Метод «северо-западного угла» нахождения первоначального плана перевозок.
13. Метод наименьшей стоимости для нахождения первоначального плана перевозок.
14. Метод потенциалов решения транспортной задачи.
15. Основные понятия теории игр: игра, партия, стратегия, оптимальная стратегия, ход.
16. Решение матричной игры в чистых стратегиях.
17. Понятие смешанных стратегий в матричной игре и условие их оптимальности.
18. Решение матричной игры в смешанных стратегиях.
19. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования.
20. Критерии принятия решений в условиях неопределенности.
21. Сетевая модель и ее основные элементы. Понятие пути, резерва времени работы. Нахождение критического пути.
22. Нахождение максимального потока по сети.
23. Принцип оптимальности Беллмана. Задача о распределении средств между предприятиями.
24. Потоки событий.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ НА ЗАЧЕТ

1. Решите задачу линейного программирования графическим или симплексным методом.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 4, \\ x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Розничное торговое предприятие разработало несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учетом меняющейся конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний величины прибыли представлены в виде матрицы выигрышей. Определить оптимальный план продажи товаров, если $\lambda = 0,7$

План продажи	Величина прибыли (д.е.) при конъюнктуре рынка			
	$К_1$	$К_2$	$К_3$	$К_4$
$П_1$	5,0	4,5	5,1	4,0
$П_2$	4,2	5,6	3,9	4,3
$П_3$	3,6	4,1	4,8	4,0
$П_4$	3,5	3,9	4,6	3,8

3. Решите задачу линейного программирования графическим или симплексным методом

$$F = x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4. Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. Первый завод поставляет 90 платформ грузовиков, второй – 30 платформ, третий – 40 платформ. Требуется поставить платформы следующим потребителям: первому – 70 штук, втором – 30, третьем – 20, четвертому – 40 штук. Стоимость перевозки одной платформы от поставщика до потребителя указана в следующей таблице (д.е.):

Поставщики	Потребители			
	1	2	3	4
I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

Составьте оптимальный план доставки грузовых автомобилей

5. Решите задачу линейного программирования графическим или симплексным методом

$F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \le 4, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. Решите задачу линейного программирования графическим или симплексным методом

$F = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \le 3, \\ x_2 \le 2, \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 16, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7. Решите задачу линейного программирования графическим или симплексным методом

$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 0{,}6, \\ x_1 + 0{,}4x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8. Решите задачу линейного программирования графическим или симплексным методом

$F = 2x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \le 3, \\ x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

9. Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции $F = 2x_1 + 7x_2$ при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

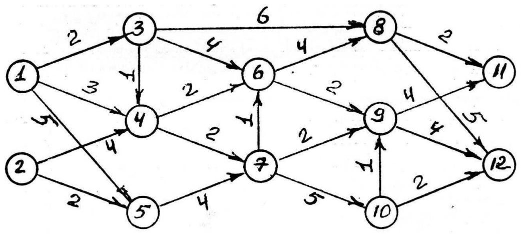
10. В пунктах А и В находятся соответственно 150 и 90 т горючего. Пунктам 1, 2, 3 требуются соответственно 60, 70, 110 т горючего. Стоимость

перевозки 1 т горючего из пункта А в пункты 1, 2, 3 равна соответственно 60, 10, 40 тыс. руб. за 1 т соответственно, а из пункта В в пункты 1, 2, 3 - 120, 20, 80 тыс. руб. за 1 т соответственно. Составьте план перевозок горючего, минимизирующий общую сумму транспортных расходов.

11.Игрок А записывает одно из двух чисел: 1 или 2, игрок В – одно из трех чисел 1, 2 или 3. Если оба числа одинаковой четности, то выигрывает игрок А, и выигрыш равен сумме этих чисел. Если четности выбранных игроками чисел не совпадают, то В выигрывает, выигрыш равен сумме этих чисел. Построить платежную матрицу игры и решить задачу в чистых или смешанных стратегиях.

12. Возможно строительство четырех типов электростанций: А1 (тепловых), А2 (приплотинных), А3 (бесшлюзовых), А4 (шлюзовых). Состояния природы обозначим через Р1, Р2, Р3, Р4. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояния природы и задана матрицей. Дать рекомендации какую электростанцию строить, используя следующие критерии оптимальности: а) критерий Лапласа; б) критерий Вальда; в) критерий Севиджа; г) критерий Гурвица с коэффициентом пессимизма λ; д) критерий Байеса.

13.Вычислить максимальный и минимальный поток по сети



14.Мебельный салон продает в год около 1000 спальных гарнитуров по цене 50 тыс. руб. Размещение одного заказа на поставку гарнитуров обходится в 40 тыс. руб. Годовая стоимость хранения гарнитура составляет 25% его цены. Салон может получать 3%-ную скидку у поставщика, если размер заказа составит не менее 200 гарнитуров. Следует ли салону заказывать 200 или более гарнитуров и пользоваться скидкой?

ПРИМЕР ТЕСТА НА ЗАЧЕТ

<table>
<tr><td>1</td><td>Записать формулу для расчета симплекс-методом в случае, если а – разрешающий элемент:
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Определить какие двойственные переменные будут равны нулю, если решение исходной задачи:
Основные переменные:
$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$
Дополнительные переменные:
$x_4 = 2$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Разрешающим элементом в симплексной таблице может быть … число.</td><td>1) любое
2) только целое
3) только положительное
4) только равное 1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Найти верхнюю цену игры
$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Преобразовать открытую транспортную задачу в закрытую:
<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>60</td></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>120</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3</td><td>7</td><td>4</td><td>100</td></tr>
<tr><td>20</td><td>110</td><td>40</td><td>150</td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Привести двойственную задачу к каноническому виду:
$\begin{cases} x_1 + x_2 < 2 \\ -x_1 + 2x_2 < 4 \\ x_1 + 2x_2 < 8 \end{cases}$
$F = 2x_1 - 6x_2 \to max$</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>Ребро сети называется насыщенным, если</td><td>1) $x_{ij} < r_{ij}$ 2) $x_{ij} > r_{ij}$
3) $x_{ij} \le r_{ij}$ 4) $x_{ij} = r_{ij}$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Решить задачу с помощью критерия Вальда</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 18 & 25 \\ 8 & 7 & 8 & 23 \\ 21 & 18 & 12 & 21 \\ 30 & 22 & 19 & 15 \end{bmatrix}$$</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>Что показывает вектор градиента</td><td>а) направление наискорейшего увеличения значения функции
б) направление наискорейшего уменьшения значения функции</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Выбрать базисные столбцы
<table>
<tr><td></td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td><td>Пр.ч.</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>7</td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>F</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>Укажите, что из перечисленного является правилами выбора разрешающего элемента</td><td>а) разрешающий элемент не может быть равен нулю
б) разрешающий элемент не может быть равен единице
в) разрешающий элемент не может быть положительным
г) разрешающий элемент не может быть отрицательным
д) чтобы выбрать из оставшихся нужно разделить правую часть на элементы разрешающего столбца и выбрать наименьшее отношение</td></tr>
<tr><td>12</td><td>В каком случае критерий Гурвица является оптимистическим?</td><td>а) во всех случаях
б) когда λ больше нуля
в) когда λ больше единицы
г) когда λ принадлежит промежутку (0,5; 1]
д) когда λ принадлежит промежутку [0;0,5)</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Составить опорный план методом минимальных затрат
<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>70</td></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td>5</td><td>30</td></tr>
<tr><td>40</td><td>50</td><td>10</td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>Определить число занятых клеток для следующей транспортной задачи
<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>60</td></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>120</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3</td><td>7</td><td>4</td><td>100</td></tr>
<tr><td>20</td><td>110</td><td>40</td><td>110</td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>В каком случае при приведении к каноническому виду системы</td><td>а) во всех случаях
б) когда задача стремится к</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>ограничений дополнительные
переменные прибавляются</td><td>минимуму
в) когда знак неравенства >
г) когда знак неравенства <</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Каковы основные составные части математических моделей задач в «Исследовании операций»?</td><td>1) Переменные величины, целевая функция и система ограничений.
2) Переменные величины, целевая функция и система уравнений.
3) Переменные величины, целевая функция и система неравенств.
4) Целевая функция, начальные условия и система ограничений</td></tr>
<tr><td>17</td><td>В задачах линейного программирования выпуклым множество является …</td><td>1) множество значений целевой функции.
2) множество начальных условий.
3) множество допустимых решений.
4) множество правых частей системы ограничений.</td></tr>
<tr><td>18</td><td>Выбрать разрешающий элемент для следующей симплекс-таблицы, если
$F \to min$
<table>
<tr><td></td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td><td>Пр.ч.</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>7</td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>F</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>19</td><td>Цена игры при решении матричной игры в смешанных стратегиях удовлетворяет неравенству</td><td>1) $\alpha \le v \le \beta$, 2) $\alpha \ge v \ge \beta$,
3) $\alpha > v > \beta$, 4) $\alpha < v < \beta$.</td></tr>
<tr><td>20</td><td>Укажите условие, которому удовлетворяют компоненты смешанных стратегий</td><td>1) $\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j$,
2) $\sum_{i=1}^{m} p_i > \sum_{j=1}^{n} q_j$
3) $\sum_{i=1}^{m} p_i < \sum_{j=1}^{n} q_j$,
4) $\sum_{i=1}^{m} p_i \ne \sum_{j=1}^{n} q_j$</td></tr>
</table>

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Орлова, И.В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач / И.В. Орлова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2012. – ISBN 978-5-9558-0107-0.– URL: http://znanium.com/bookread.php?book=359462 .- (дата обращений 21.01.2020). – Текст: электронный

Дополнительная литература

1. Исследование операций в экономике : учебное пособие для вузов / под ред. Н.Ш. Кремера. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. - 407с. - Гриф МО "Рекомендовано".
2. Сапронов, И. В. Теория игр: учебное пособие / Сапронов И.В., Уточкина Е.О., Раецкая Е.В. - Воронеж:ВГЛТУ им. Г.Ф. Морозова, 2013. – ISBN 978-5-7994-0603-5. – URL: http://znanium.com/bookread2.php?book=858524 .- (дата обращений 21.01.2020). – Текст: электронный
3. Лемешко, Б. Ю. Теория игр и исследование операций / Лемешко Б.Ю. - Новосиб.:НГТУ, 2013. – ISBN 978-5-7782-2198-7. – URL: http://znanium.com/bookread2.php? book=558878 .- (дата обращений 21.01.2020). – Текст: электронный
4. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций / Шапкин А.С., Шапкин В.А. - Москва:Дашков и К, 2016. – ISBN 978-5-394-02610-2. – URL: http://znanium.com/bookread2.php?book=557767 .- (дата обращений 21.01.2020). – Текст: электронный
5. Тавокин, Е. П. Исследование социально-экономических и политических процессов: учебное пособие / Е.П. Тавокин. – Москва: ИНФРА-М, 2008. – ISBN 978-5-16-003115-6. – URL: http://znanium.com/bookread2.php?book=128010 .- (дата обращений 21.01.2020). – Текст: электронный