**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)**

Факультет информатики, математики и экономики

Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Позднякова

ГЕОМЕТРИЯ.

Геометрические преобразования плоскости

*Методические рекомендации по выполнению контрольных работ
для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)*

*Направленность (профиль)
«Математика и Информатика», «Математика и Физика»*

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.88:514](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.151я73
П 47

Позднякова Е.В.

П 47 Геометрия. Геометрические преобразования плоскости: методические рекомендации по выполнению контрольных работ для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика») / Е.В. Позднякова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 53 с.

В работе изложены методические рекомендации по выполнению контрольных работ по дисциплине «Геометрия» (модуль «Геометрические преобразования плоскости»): основные теоретические сведения, варианты контрольных работ и образцы их решения, методические рекомендации по решению и оформлению работы, оценивание работы в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы, современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика».

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 7 от 21.02.2020

Заведующий каф. МФММ
_________ / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 7 от 12.03.2020

Председатель методической комиссии ФИМЭ
_________ / Г.Н. Бойченко

УДК [378.147.88:514](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.151я73
П 47

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика») и направлены на оказание помощи студентам в выполнении контрольных работ по дисциплине “Геометрия” (модуль “Геометрические преобразования плоскости”), которая относится к вариативной части учебного плана и является обязательной дисциплиной.

Целью изучения дисциплины “Геометрия” является: формирование геометрической культуры студента, подготовка в области алгебраического анализа геометрических объектов, овладение классическим математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях, вооружение конкретными знаниями, дающими возможность преподавать данный предмет в школе, осуществлять квалифицированную подготовку учащихся к государственной итоговой аттестации по математике.

Задачи модуля “Геометрические преобразования плоскости”: сформировать понимание значимости данной темы в будущей профессиональной деятельности учителя математики; ознакомить с основными понятиями и методами геометрических преобразований; сформировать представление о применении метода геометрических преобразований для решения задач элементарной геометрии, а также задач прикладного характера; развитие умений целесообразного выбора и использования компьютерных технологий для построения геометрических чертежей разной степени сложности.

В методические рекомендации включено:

1) основные теоретические сведения (основные понятия, движение и виды движений, подобие и гомотетия, аффинные преобразования и инверсия);

2) особенности оценивания контрольной работы в балльно-рейтинговой системе;

3) варианты контрольных работ и образцы их решения;

4) требования к выполнению и оформлению контрольной работы;

5) список рекомендуемой литературы

6) список современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.

Основные теоретические сведения по дисциплине иллюстрируются соответствующими примерами, необходимыми чертежами.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает современные источники; указана литература основная и дополнительная. Помощь в изучении дисциплины могут оказать рекомендуемые профессиональные базы данных, информационные справочные системы.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Основные понятия

Отображением плоскости на себя называется такое преобразование, при котором каждой точке исходной плоскости сопоставляется какая-то точка этой же плоскости, причем любая точка плоскости оказывается сопоставленной другой точке.

Если при отображении плоскости на себя фигура F преобразуется в фигуру F', то говорят, что фигура F' - ***образ*** фигуры F, а фигура F - ***прообраз*** фигуры F'.

Если одним отображением фигура F переводится в фигуру F', а затем фигура F' переводится в фигуру F'', то отображение *f*, переводящее F в F'' называется ***композицией*** двух отображений.

Неподвижной точкой отображения называется такая точка A, которая этим отображением переводится сама в себя.

Отображение, все точки которого неподвижные, называется ***тождественным преобразованием***.

Если при данном отображении разным точкам фигуры соответствуют разные образы, то такое отображение называется ***взаимно-однозначным***.

Преобразование плоскости **–** это взаимно-однозначное отображение плоскости на себя.

Пусть фигура F' получена из фигуры F взаимно - однозначным отображением *f*, тогда можно задать отображение, обратное отображению *f*, которое определяется так: композиция отображения *f* и отображения, обратного *f*, является тождественным преобразованием.

Движение плоскости

Движение плоскости – это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.

Свойства движения:

1. Три точки, лежащие на одной прямой, при движении переходят в три точки, лежащие на одной прямой, и три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.

Доказательство: пусть движение переводит точки A, B, C в точки A', B', C'. Тогда выполняются равенства: A'B'=AB , A'C'=AC , B'C'=BC (1)

Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то одна из них, например точка B лежит между двумя другими. В этом случае AB+BC=AC, и из равенств (1) следует, что A'C'+B'C'=A'C'. А из этого следует, что точка B' лежит между точками A' и C'. Первое утверждение доказано. Второе утверждение докажем методом от противного: предположим, что точки A', B', C' лежат на одной прямой даже в том случае, если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то есть являются вершинами треугольника. Тогда должны выполняться неравенства треугольника:

AB<AC+BC; AC<AB+BC; BC<AB+AC.

Но из равенств (1) следует, что те же неравенства должны выполнятся и для точек A', B', C', следовательно точки A', B', C' должны быть вершинами треугольника, следовательно точки A', B', C' не должны лежать на одной прямой.

2. При движении отрезок переводится в отрезок.
3. При движении луч переходит в луч, прямая в прямую.
4. Треугольник движением переводится в треугольник.
5. Движение сохраняет величины углов.
6. При движении сохраняются площади многоугольных фигур.
7. Движение обратимо. Отображение, обратное движению является движением.

8.Композиция двух движений также является движением.

9.Движение переводит плоскость в плоскость.

Уравнение движения

Пусть при движении точка M(x; y) переходит в точку M′(x′, y′)

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - \mathrm{E}y\sin\varphi + a \\ y' = x\sin\varphi + \mathrm{E}y\cos\varphi + b \end{cases}$$

E=1, если дано движение первого рода (сохраняющее ориентацию фигур)

E=-1, если дано движение второго рода (меняющее ориентацию фигур)

Виды движений

Осевая симметрия

Осевой симметрией S_l относительно прямой *l* называется преобразование, переводящее каждую точку *M* в такую точку M′, что прямая *l* перпендикулярна отрезку *MM′* и проходит через его середину (рис.1).

Точки *M* и *M′* называются симметричными относительно прямой *l*, и каждая из них симметрична другой, если *l* является серединным перпендикуляром отрезка *MM′*. Каждая точка прямой *l* считается симметричной самой себе (относительно прямой *l*).

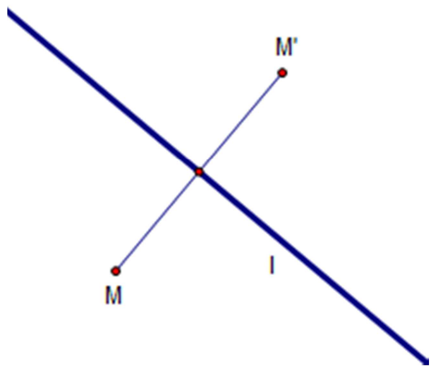


Рис.1. Образ точки при осевой симметрии

Формулы осевой симметрии

1) Пусть *l: ax+by+c=0* – уравнение оси симметрии; M(x; y), M′(x′, y′)

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{a^2+b^2}(b^2x - a^2x - 2aby - 2ac) \\ y' = \frac{1}{a^2+b^2}(a^2y - b^2y - 2abx - 2bc) \end{cases}$$

2) Пусть ось симметрии *l* совпадает с осью Ox; M(x; y), M′(x′, y′)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Свойства осевой симметрии

1. Осевая симметрия является движением.

Доказательство:

Пусть ось симметрии *l* совпадает с осью Ox; тогда уравнение осевой симметрии имеет вид: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Возьмем любые две точки A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2) и рассмотрим симметричные им относительно оси x точки A'(x_1,- y_1) и B'(x_2, -y_2). Вычисляя расстояние A'B' и AB, получим: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$A'B' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB$

2. Ось симметрии переходит сама в себя, т.е. является прямой неподвижных точек.

3. Если прямая перпендикулярна оси симметрии, то она переходит сама в себя (неподвижная прямая).

4. Осевая симметрия переводит угол в равный угол.

Параллельный перенос

Преобразование плоскости, при котором каждая точка M переходит в такую точку M′, такую что вектор MM′ равен данному вектору $\vec{a}$ ($MM' = \vec{a}$), называется ***параллельным переносом*** $\boldsymbol{T_{\vec{a}}}$ на вектор $\vec{a}$ (рис.2).

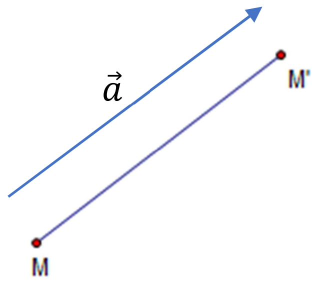


Рис.2. Образ точки при параллельном переносе

Формулы параллельного переноса

M(x; y), M′(x′, y′), $\vec{a}(a, b)$

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Свойства параллельного переноса

1. Параллельный перенос является движением.

Доказательство:

Возьмем любые две точки A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2) и рассмотрим их образы при параллельном переносе A'(x_1+a, y_1+b) и B'(x_2+a, y_2+b). Вычисляя расстояние A'B' и AB, получим: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$A'B' = \sqrt{(x_2 + a - x_1 - a)^2 + (y_2 + b - y_1 - b)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB$

2. Параллельный перенос переводит прямую в параллельную прямую

3. Если прямая параллельна вектору параллельного переноса $\vec{a}$, то она переходит сама в себя.

4. Параллельный перенос переводит угол в равный ему угол.

Поворот (вращение вокруг точки)

Поворотом вокруг точки O на данный угол φ называется преобразование плоскости R_O^{φ}, при котором каждая точка M переходит в такую точку M′, такую что OM=OM′ и ∠MOM′=φ (рис.3).

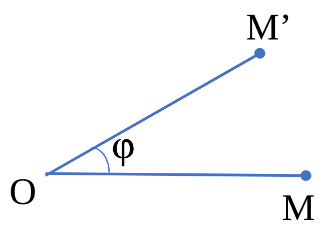


Рис.3. Образ точки при повороте

Формулы поворота

1) Если центр поворота совпадает с началом координат: M(x; y), M′ (x′, y′), O(0,0)

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

2) Если центр поворота не совпадает с началом координат: M(x; y), M′ (x′, y′), O(a,b)

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b \end{cases}$$

Свойства поворота

1. Поворот является движением.

Доказательство:

Выберем систему координат так, чтобы центр поворота совпадал с началом координат. Тогда формулы поворота имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

Возьмем любые две точки A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2) и рассмотрим их образы при повороте A'($x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi$, $x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi$) и B'($x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi$, $x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi$). Вычисляя расстояние A'B' и AB, получим: $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$A'B' = \sqrt{(cos\varphi(x_2-x_1) - sin\varphi(y_2-y_1))^2 + ((\sin\varphi(x_2-x_1) + cos\varphi(y_2-y_1))^2}$$

$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = AB$

2. Центр поворота – неподвижная точка

3. При повороте угол между прямой и ее образом равен углу поворота φ.

4. Поворот переводит угол в равный ему угол.

Центральная симметрия

Центральной симметрией с центром С называется преобразование плоскости Z_C, при котором каждая точка М переходит в такую точку M′, такую что $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM'}$ (рис.4).

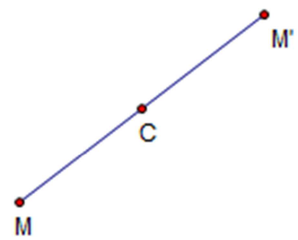


Рис.4. Образ точки при центральной симметрии

Формулы центральной симметрии

M(x; y), M′ (x′, y′), C(a, b)

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Свойства центральной симметрии

1. Центральная симметрия является движением.

Доказательство:

Возьмем любые две точки A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2) и рассмотрим их образы при центральной симметрии A'($2a-x_1$, $2b-y_1$) и B'($2a-x_2$, $2b-y_2$). Вычисляя расстояние A'B' и AB, получим: $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$A'B' = \sqrt{(2a-x_2-2a+x_1)^2+(2b-y_2-2b+y_1)^2}=$

$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = AB$

2. Центральная симметрия переводит прямую в параллельную прямую

3. Центр симметрии – неподвижная точка.
4. Прямая, проходящая через центр симметрии, переходит сама в себя.
5. Центральная симметрия переводит угол в равный ему угол.
6. Центральная симметрия – частный случай поворота на $\varphi=180^0$.

Скользящая симметрия

Скользящей симметрией называется композиция осевой симметрии с осью l и параллельного переноса на вектор $\vec{a}$, где $\vec{a}||l$ (рис.5).

$f = S_l \cdot T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}} \cdot S_l$ – скользящая симметрия

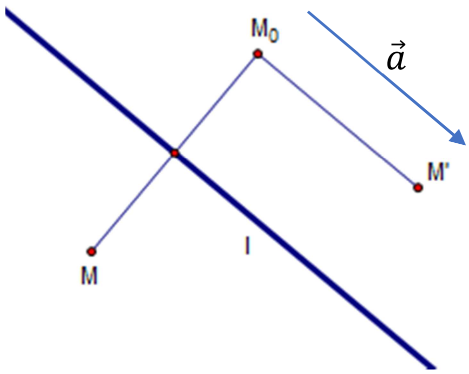


Рис.5. Образ точки при скользящей симметрии

Формулы скользящей симметрии

Пусть ось симметрии l совпадает с осью Ox: M(x; y), M′ (x′, y′), $\vec{a}(a, 0)$

$$\begin{cases} x' = a + x \\ y' = -y \end{cases}$$

Свойства скользящей симметрии

1. Скользящая симметрия является движением.

Доказательство:

Возьмем любые две точки $A(x_1, y_1)$ и

$B(x_2, y_2)$ и рассмотрим их образы при скользящей симметрии $A'(a+x_1, -y_1)$ и $B'(a+x_2, -y_2)$. Вычисляя расстояние A'B' и AB, получим: $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$A'B' = \sqrt{(a+x_2-a-x_1)^2+(-y_2+y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = AB$

2. Ось симметрии – неподвижная прямая
3. Скользящая симметрия переводит угол в равный ему угол.

Подобие

Подобием с коэффициентом k>0 называется преобразование плоскости P_k, при котором любым двум точкам X и Y соответствуют такие точки X' и Y', что X'Y'=k·XY.

При k=1 подобие является движением, то есть движение есть частный случай подобия.

Фигура F называется ***подобной*** фигуре F' с коэффициентом k, если существует подобие с коэффициентом k, переводящее F в F'.

Свойства подобия:

1. При подобии прямая переходит в прямую.
2. Подобие сохраняет простое отношение трех точек.
3. Подобие сохраняет отношение длин произвольных отрезков.
4. Подобие сохраняет величину углов
5. Подобие треугольник переводит в треугольник. Соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.
6. В результате подобия с коэффициентом k площади фигур умножаются на k^2.
7. Композиция подобий с коэффициентами k_1 и k_2 есть подобие с коэффициентом k_1k_2.
8. Подобие обратимо. Отображение, обратное подобию с коэффициентом k есть подобие с коэффициентом $\frac{1}{k}$
9. Подобие с коэффициентом k есть композиция гомотетии с тем же коэффициентом и движения, т.е. $P_k = d \cdot H_O^k$

Уравнение подобия

Пусть при подобии точка M(x; y) переходит в точку M′(x′, y′)

$$\begin{cases} x' = k(xcos\varphi - \mathrm{E}ysin\varphi) + a \\ y' = k(xsin\varphi + \mathrm{E}ycos\varphi) + b \end{cases}$$

E=1, если дано подобие первого рода (сохраняющее ориентацию фигур)

E=-1, если дано подобие второго рода (меняющее ориентацию фигур)

Гомотетия

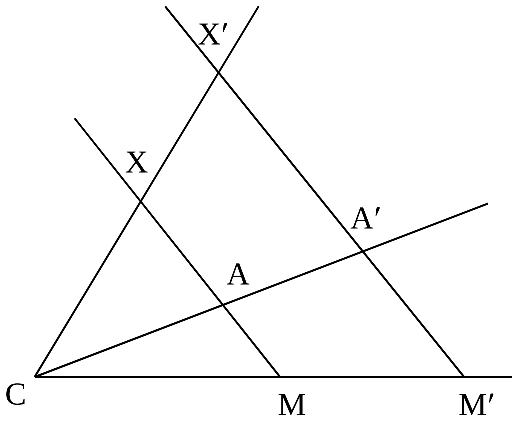


Рис.6. Образ точки при гомотетии

Гомотетией с центром в точке С и коэффициентом k называется такое преобразование плоскости, при котором каждой точке М сопоставляется такая точка М' такая, что $\overrightarrow{\mathrm{CM}'} = k\overrightarrow{CM}$, причем не исключается и возможность k<0 (рис.6).
Если k =-1 то имеем центральную симметрию с центром в точке С,
Если k =1, то получается тождественное преобразование.

Гомотетия является частным случаем подобия.

Формулы гомотетии

M(x; y), M′ (x′, y′), C(a, b)

$$\begin{cases} x' = kx + a(1-k) \\ y' = ky + b(1-k) \end{cases}$$

Свойства гомотетии

1. Гомотетия переводит прямую в параллельную прямую
2. Центр гомотетии – неподвижная точка.
3. Гомотетия переводит угол в равный угол.
4. Гомотетия сохраняет отношение “лежать между” и простое отношение трех точек.
5. Гомотетия сохраняет отношение длин любых двух отрезков.
6. При гомотетии окружность переходит в окружность.
7. Если даны две окружности разных радиусов и существует их общая касательная, то центр гомотетии этих окружностей есть точка пересечения этой касательной с линией центров окружностей.
8. Композиция двух гомотетий с общим центром и коэффициентами k_1 и k_2, есть гомотетия с тем же центром и коэффициентом $k_1 \cdot k_2$. Преобразование, обратное гомотетии с коэффициентом k будет гомотетией с тем же центром и коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Аффинные преобразования

Аффинным преобразованием называется такое преобразование плоскости, которое всякую прямую переводит в прямую и сохраняет простое отношение трех точек прямой (рис.7).

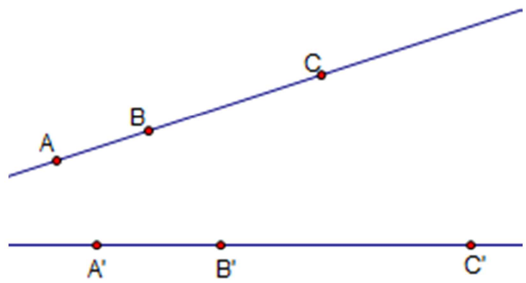


Рис.7. Аффинные преобразования сохраняют простое отношение трех точек

Движение и подобие – частные случаи аффинных преобразований.

Аффинное преобразование в координатах

Пусть задан репер R: $R = (0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \xrightarrow{f} (0, \overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}'), f$ — аффинное преобразование и пусть новый репер задан в старом. $0'(x_0, y_0)$; $\overrightarrow{e_1}' = (a_{11}, a_{12})$, $\overrightarrow{e_1}' = (a_{21}, a_{22})$, где матрица преобразования$((a_{ij}))$ невырожденная.

В координатном виде аффинное преобразование это линейное преобразование вида $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{21}y + a_{01}; \\ y' = a_{12}x + a_{22}y + a_{02}. \end{cases}$, где обязательно

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ (*) или rang матрицы преобразований равен 2.

Свойства аффинного преобразования

1. Образом параллельных прямых являются параллельные прямые.
2. При аффинном преобразовании отношение двух отрезков, расположенных на одной прямой сохраняется.
3. При аффинном преобразовании отношение параллельных отрезков сохраняется.
4. При аффинном преобразовании не сохраняются угол и отношение произвольных отрезков, так как любой треугольник можно перевести в любой другой. Поэтому высота и биссектриса треугольника преобразуются в другие линии, медиана же переходит в медиану, так как середина отрезка переходит в середину.
5. При аффинном преобразовании трапеция переходит в трапецию, а параллелограмм в параллелограмм
6. При аффинном преобразовании отношение площадей соответственных фигур сохраняется.

Частные случаи аффинных преобразований

Сжатие (или растяжение) к оси Ox

Так называется преобразование, уравнения которого в прямоугольных декартовых координатах таковы: $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$ k>0

Оно характеризуется тем, что расстояние каждой точки до оси OX изменяется в k раз. При k>1 будет растяжение, при k=1 – тождественное преобразование, при k<1 – сжатие.

Сжатие (или растяжение) к оси Oy

Так называется преобразование, уравнения которого в прямоугольных декартовых координатах таковы: $\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$ k>0

Перспективно-аффинное преобразование

Пусть дана прямая s и пара соответственных точек A и A′.

Преобразование плоскости f, такое, что каждой точке M плоскости ставится в соответствие точка M′, так что MM′||AA′ и точка пересечения прямых AM и A′M′ лежит на прямой s, называется перспективно-аффинным преобразованием (рис.8).

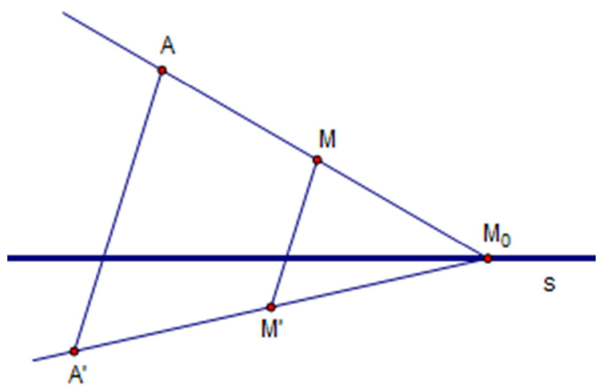


Рис.8. Образ точки при перспективно-аффинном преобразовании

Инверсия

Инверсией (или симметрией относительно окружности, окружность задана центром O и радиусом R) называется такое преобразование точек плоскости (без точки O), при котором выполняются два условия. Первое – образ точки A лежит на луче [OA), ($A' \epsilon OA$); второе – $OA \cdot OA' = R^2$.

Построение инверсных точек

Пусть точка A лежит снаружи окружности ω с центром O, AM и AN – касательные к окружности ω; прямые OA и MN пересекаются в точке B. Тогда точки A и B симметричны относительно окружности ω (рис.9).

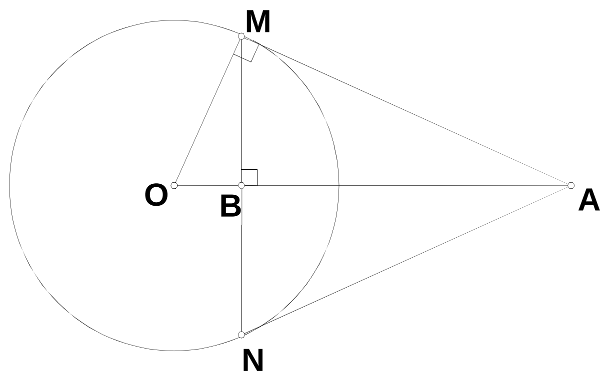


Рис.9. Образ точки при инверсии

Доказательство:

Во-первых, точка *B* лежит на отрезке *OA*, поскольку *MB* является высотой прямоугольного треугольника *OMA*.

Во-вторых, из подобия прямоугольных треугольников *OMA* и *OBM* следует пропорция $\frac{OM}{OB} = \frac{OA}{OM} \Rightarrow OA * OB = OM^2$, что и требовалось доказать.

Когда точка лежит внутри окружности (дана точка *B*), построение проводится по следующим этапам:

1) провести луч *OB*;

2) восстановить перпендикуляр *BM* в точке *B*;

3) построить касательную *MA* в точке пересечения перпендикуляра и окружности (для точности рекомендуется проводить радиус *OM*).

Уравнение инверсии

Для простоты вывода прямоугольную систему координат выберем так, чтобы начало координат *O* совпало с центром инверсии, заданной окружностью *(O,r)*.

Пусть *M (x, y)* – произвольная точка плоскости *(множество всех точек плоскости кроме точки (0,0))*, а точка *M' (x', y')* – ее образ (рис.10)

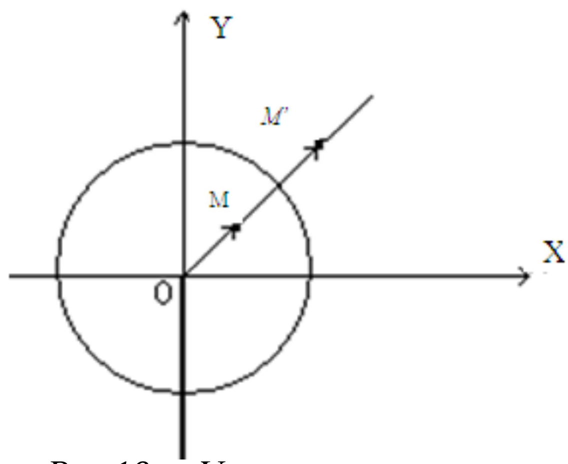


Рис.10. Уравнение инверсии. Выбор системы координат

$$\begin{cases} x' = \dfrac{r^2 x}{x^2 + y^2} \\ y' = \dfrac{r^2 y}{x^2 + y^2}; \end{cases}$$

Пользуясь свойством взаимности (*если M' образ некоторой точки M, то M является образом M' в этой же инверсии*), получаем выражения координат точки *M (x, y)* через координаты ее образа *M' (x', y'):*

$$\begin{cases} x &= \dfrac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \\ y &= \dfrac{r^2 y'}{x'^2 + y'^2}; \end{cases}$$

Свойства инверсии

1. Если при инверсии фигура (точка) Ф преобразуется в фигуру (точку) Ф', то и наоборот, эта инверсия преобразует фигуру (точку) Ф' в фигуру (точку) Ф.

2. Центр инверсии не имеет образа.

3. Для всех точек, отличных от центра инверсии, инверсия является взаимно однозначным соответствием.

4. Каждая точка окружности инверсии, инверсна себе.

5. Если данная точка лежит вне окружности инверсии, то инверсная ей точка лежит внутри этой окружности и обратно.

6. Если одна из двух взаимно инверсных точек неограниченно удаляется от центра инверсии, то другая неограниченно приближается к нему, и обратно.

7. При инверсии окружность, проходящая через центр инверсии, преобразуется в прямую, не проходящую через центр инверсии. Эта прямая перпендикулярна к линии центров данной окружности и окружности инверсии (рис.11).

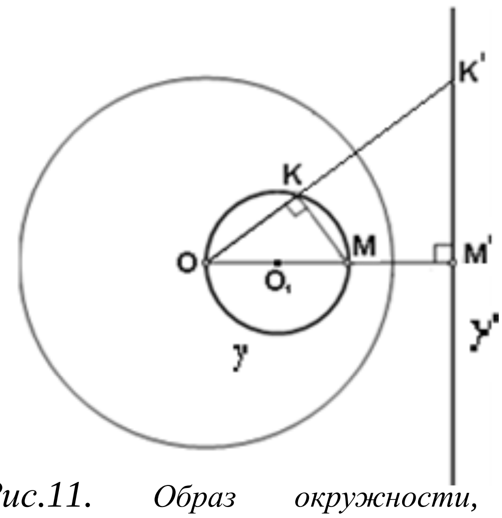


Рис.11. Образ окружности, проходящей через центр инверсии

8. Окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, не проходящую через центр инверсии (рис.12).

9. Если при инверсии с центром O окружность S_1 переходит в окружность S_2, то

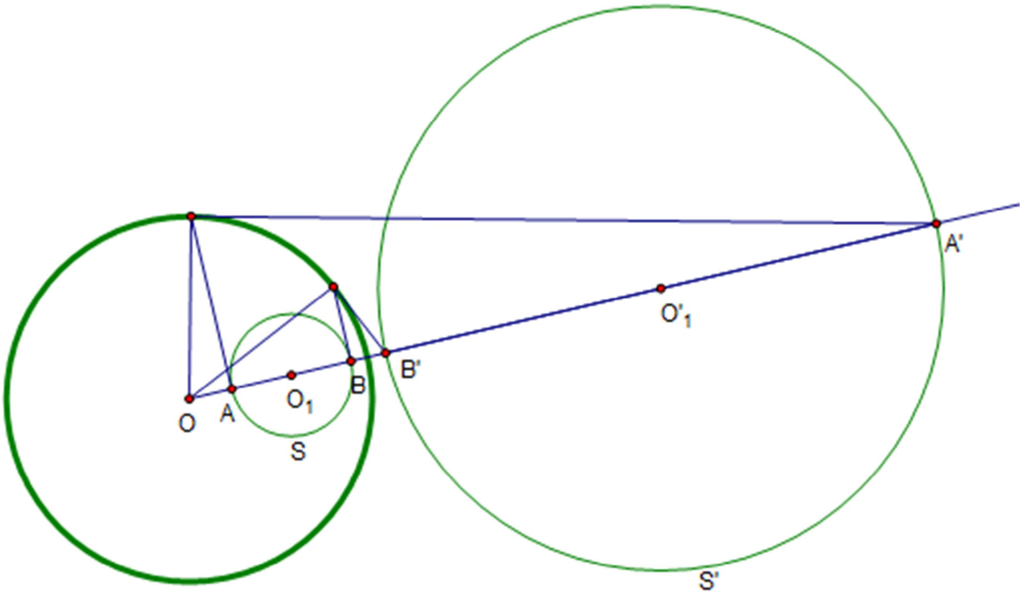


Рис.12. Образ окружности, не проходящей через центр инверсии

центр инверсии является также центром гомотетии.

10. Пусть точка O - центр гомотетии окружностей S_1 и S_2; точке A_1 окружности S_1 соответствует при этой гомотетии точке A_2 окружности S_2. Пусть прямая A_1A_2 второй раз пересекает окружности в точках B_1 и B_2 соответственно. Тогда произведение $OA_1 \cdot OB_2$ постоянно и не зависит от выбора точки A_1.

11. Прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии (рис.11).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ГЕОМЕТРИИ №1 «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ»

Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания контрольной работы № 1

Контрольная работа № 1 “Решение задач на доказательство методом геометрических преобразований” является промежуточной формой контроля знаний студентов и представляет собой письменное выполнение определенных заданий. Она предназначена для проверки знаний студентов по учебной дисциплине “Геометрия”, (модуль “Геометрические преобразования плоскости”), а также служит для закрепления полученных знаний, умений и навыков. В контрольной работе студентам предлагаются задачи, сформулированные на основании материала, изложенного в лекциях, проработанного на практических занятиях или самостоятельно изученного студентами.

Контрольная работа № 1 по геометрии направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по геометрии;
- развитие навыков самоорганизации и самоконтроля;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- оценка сформированности профессиональных компетенций и умений самостоятельной учебной и поисковой деятельности.

В работе представлено 10 вариантов заданий контрольной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними. В каждом из десяти вариантов содержится четыре задачи.

Предложенные задачи являются задачами на доказательство и требуют применения методов геометрических преобразований: метода параллельного переноса, метода поворота, метода осевой или центральной симметрии, метода подобия, метода аффинных преобразований.

Перед тем как приступить к контрольной работе, студентам следует ознакомиться с теоретическим материалом и разобраться с решением типовых задач, представленных в конспекте лекций по геометрии “Геометрические преобразования плоскости”.

За правильное выполнение первого и второго заданий выставляется по два балла. Третье и четвертое задания оцениваются в три балла.

Система оценивания заданий контрольной работы представлена в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание домашней контрольной работы в БРС

№ задания	**Характеристика задания**	**Критерии оценивания**	**Баллы**
1	Доказать утверждение, используя метод параллельного переноса	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов доказательства ИЛИ представлено верное доказательство без использования метода геометрических преобразований	1
2	Доказать утверждение, используя метод симметрии или поворота	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно	1

		ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов доказательства ИЛИ представлено верное доказательство без использования метода геометрических преобразований	
3	Доказать утверждение, используя метод подобия	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получены верные выводы	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов доказательства ИЛИ представлено верное доказательство без использования метода геометрических преобразований	2
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок логического характера	1
4	Доказать утверждение, используя метод подобия или метод аффинных преобразований	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получены верные выводы	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов доказательства ИЛИ представлено верное доказательство без использования метода геометрических преобразований	2
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд	1

		ошибок логического характера	
ИТОГО			максимум 10

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы № 1

1. Контрольная работы выполняется на отдельных листах, которые должны быть скреплены, или в отдельной тетради синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя).

2. В начале первого листа (или на обложке тетради) должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название дисциплины, номер варианта контрольной работы.

Например:

Контрольная работа по геометрии

“Решение задач на доказательство методом геометрических преобразований”

студентки факультета информатики, математики и экономики

4 курса группы МИа-18 Ивановой Татьяны Александровны

Вариант 1

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы.

4. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы.

5. Решение задачи нужно сопровождать формулами, ссылками на соответствующие утверждения и теоремы, развернутыми расчетами и пояснениями к ним. Чертежи обязательны, желательно при построение чертежа применять цвет. Чертежи можно выполнять с помощью компьютерных программ (например “Живая математика” или “GeoGebra”).

6. Задачи №№ 1, 2 оцениваются в 2 балла. Задачи №№ 3 и 4 оцениваются в 3 балла. Таким образом, максимально за контрольную работу можно набрать 10 баллов. Если набрано менее 5 баллов (выполнено верно меньше половины работы), то работу необходимо переделать.

7. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком.

Варианты контрольной работы № 1

Вариант 1

1. Докажите, что прямая, содержащая середины оснований равнобочной трапеции, перпендикулярна основаниям. Верно ли обратное утверждение? (метод параллельного переноса)

2. Две прямые, содержащие точки пересечения диагоналей параллелограмма, пересекают его стороны соответственно в точках M и L, N и K. Докажите, что четырехугольник MNLK – параллелограмм. (метод симметрии)

3. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если $(AB/A_1B_1)=(AC/A_1C_1)=(BM/B_1M_1)$, где BM и B_1M_1 – медианы треугольников. (метод подобия)

4. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD продолжены до взаимного пересечения в точке O. Точки E и F – середины оснований трапеции. Докажите, что точки E, F, O принадлежат одной прямой. (метод аффинных преобразований)

Вариант 2

1. Докажите, что если прямая, содержащая середины оснований трапеции, перпендикулярна основаниям, то трапеция равнобочная. Верно ли обратное утверждение? (метод параллельного переноса)
2. Две конгруэнтные окружности O_1 и O_2 касаются в точке К. Три прямые, содержащие точку К, пересекают окружности, кроме точки К, соответственно в точках A, B, C и D, E, F. Докажите, что треугольники ABC и DEF равны. (метод симметрии)
3. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если $\angle A = \angle A_1$ $(AC/A_1C_1) = (BH/B_1H_1)$, где BH и B_1H_1 - высоты треугольников. (метод подобия)
4. В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) через середину M стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A, которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что BD=CE. (метод подобия)

Вариант 3

1. Прямые, которым принадлежат боковые стороны трапеции, перпендикулярны. Докажите, что длина отрезка, концами которого являются середины оснований трапеции, равна полуразности длин оснований. (метод параллельного переноса)
2. Через центр равностороннего треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен 60^0 и которые не содержат вершин треугольника. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные между сторонами треугольника, равны. (метод поворота)
3. Дан правильный пятиугольник ABCDE, $AD \cap BE = F$. Докажите, что треугольники AED и AFE подобны. (метод подобия)
4. Около окружности описана трапеция ABCD, меньшее основание BC которой касается ее в точке F. Прямая MF, где $M = AB \cap CD$, пересекает AD в точке К. Докажите, что К – точка касания отрезка AD и окружности, вписанной в

фигуру, являющуюся объединением основания AD и продолжений сторон BA и CD. (метод подобия)

Вариант 4

1. На сторонах AB и CD параллелограмма ABCD построены квадраты, причем квадрат со стороной AB и параллелограмм лежат в разных полуплоскостях с границей AB, а квадрат со стороной CD принадлежит той же полуплоскости с границей CD, что и параллелограмм. Докажите, что расстояние между центрами квадратов равно длине стороны BC. (метод параллельного переноса)
2. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата ABCD от вершин A, B, C, D отложены равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – квадрат. (метод симметрии)
3. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2 и точка O, не принадлежащая этим прямым. Через точку O проведена прямая, пересекающая прямые l_1 и l_2 соответственно в точках L и M. Докажите, что отношение (OL/OM) не зависит от выбора секущей. (метод подобия)
4. Дан правильный пятиугольник ABCDE, $AD \cap BE = F$. Докажите, что (DA/DF)=(DF/AF). (метод подобия)

Вариант 5

1. Даны две окружности $b_1(O_1, r)$ и b_2 (O_2, r), пересекающиеся в точках M и H . Прямая a, параллельная прямой O_1O_2, пресекает окружность b_1 в точках A и B , а окружность b_2 в точках C и D . Доказать, что величина угла AMC не зависит от положения прямой a, если лучи AB и CD сонаправлены и прямая a пересекает отрезок MH. (метод параллельного переноса)
2. Доказать, что площадь треугольника, стороны которого есть медианы данного треугольника ABC, составляет $\frac{3}{4}$ площади этого треугольника. (метод симметрии)
3. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны точки D и E так, что CD=CE. Прямые, проведенные через точки D и C перпендикулярно к AE, пресекают гипотенузу AB соответственно в точках K и H. Доказать, что KH = HB. (метод поворота)

4. К окружности диаметра MP в точке M проведена касательная, на которой взят отрезок AB. Прямые AP и BP пересекают вторично окружность в точках A_1 и B_1. Докажите подобие треугольников PAB и PA_1B_1. (метод подобия)

Вариант 6

1. В выпуклом четырехугольнике ABCD стороны AB и D равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, соединяющей середины сторон AC и BD. (метод параллельного переноса)
2. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P – середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM - равносторонний. (метод поворота)
3. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что касательная в точке A к описанной окружности параллельна прямой B_1C_1. (метод подобия)
4. В треугольнике ABC проведены медианы BD и CE; M – их точка пересечения. Доказать, что четырехугольник ADME и треугольник BCM равновелики. (метод аффинных преобразований)

Вариант 7

1. В выпуклом четырехугольнике ABCD стороны AB и D равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, соединяющей середины диагоналей BC и AD. (метод параллельного переноса)
2. На сторонах BC и CD квадрата ABCD взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что BM+KD=AK. (метод поворота)
3. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $B_1C_1 \perp OA$, где O – центр описанной окружности. (метод подобия)
4. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC через точку B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая диагональ AC в точке P, а через точку C – прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке Q. Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции. (метод аффинных преобразований)

Вариант 8

1. Точки К, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD и AD выпуклого четырехугольника ABCD. Докажите, что KM≤(BC+AD)/2, причем равенство достигается, только если BC||AD. (метод параллельного переноса)

2. Равные окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A_1 и A_2. Произвольная точка C окружности S соединена отрезками с точками A_1 и A_2. Эти отрезки пересекают S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2. Докажите, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$. (метод симметрии)

3. На стороне AC треугольника ABC взята точка E. Через точку E проведены прямая DE параллельно стороне BC и прямая EF параллельно стороне AB (D и E – точки соответственно на этих сторонах). Докажите, что$S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$. (метод подобия)

4. Дан треугольник ABC. Точка O – точка пересечения его медиан, а M, N, P – точки сторон AB, BC, CA, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Докажите, что точка O – точка пересечения медиан треугольника, образованного прямыми AN, BP, CM. (метод аффинных преобразований)

Вариант 9

1. Две окружности радиуса R пересекаются в точках Mи N. Пусть A и B – точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащими по одну сторону от прямой MN. Докажите, что $MN^2+AB^2=4R^2$. (метод параллельного переноса)

2. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом 45^0. Докажите, что сумма CM^2+DM^2 не зависит от выбора точки M. (метод симметрии)

3. Докажите, что площадь четырехугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырехугольника ABCD, равна половине площади ABCD. (метод подобия)

4. Дан треугольник ABC. Точка O – точка пересечения его медиан, а M, N, P – точки сторон AB, BC, CA, делящие эти стороны в одинаковых отношениях.

Докажите, что точка O – точка пересечения медиан треугольника MNP. (метод аффинных преобразований)

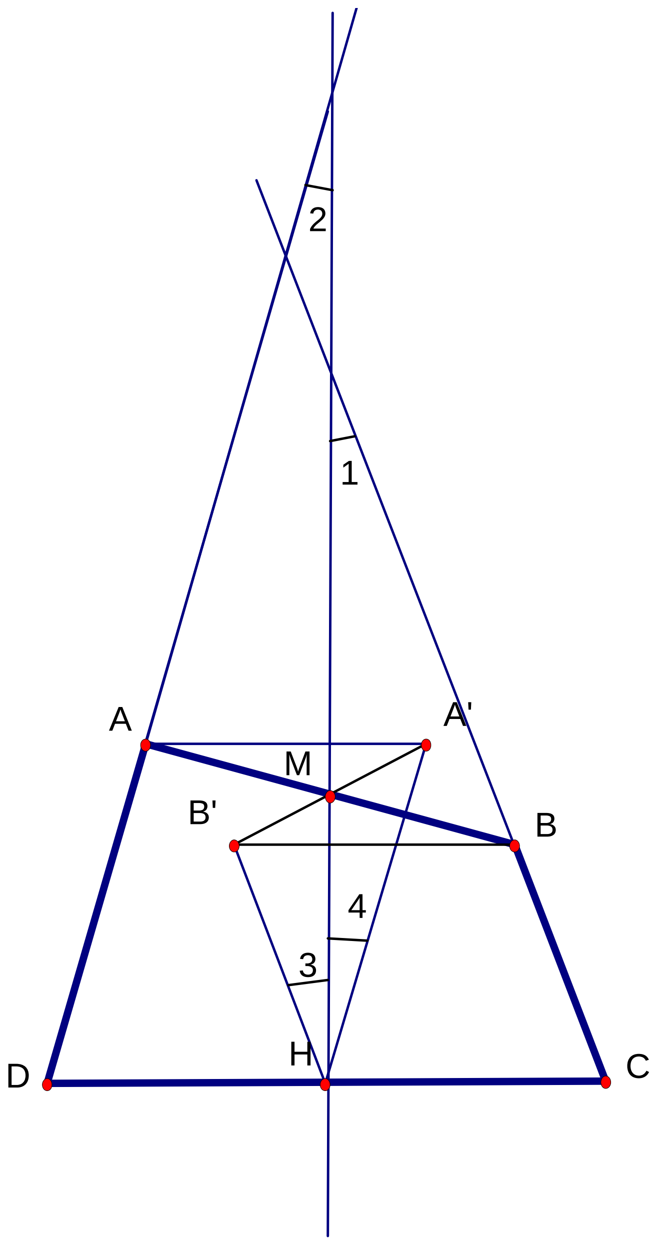
Вариант 10

1. В трапеции ABCD стороны BC и AD параллельны, M – точка пересечения биссектрис углов A и B, N – точка пересечения биссектрис углов C и D. Докажите, что 2MN=|AB+CD-BC-AD|. (метод параллельного переноса)

2. Дан параллелограмм ABCD и точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке. (метод симметрии)

3. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части. (метод подобия)

4. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке. (метод аффинных преобразований)



Образец решения варианта контрольной работы № 1

Вариант 0

1. Прямая, проходящая через середины сторон AB и CD

четырехугольника ABCD, не являющего трапецией, образует со сторонами AD и CD равные углы. Доказать, что AD = CB. (метод параллельного переноса)

Решение:

Пусть M и H – середины сторон AB и CD. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{DH}$ и параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{CH}$.

$T_{\overrightarrow{DH}}$: $D \to H$, $A \to A' \Rightarrow$

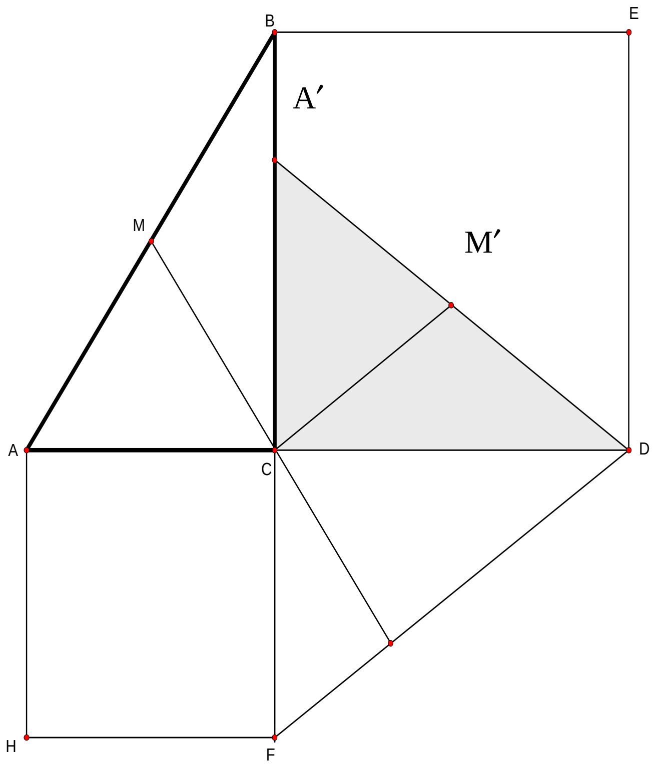
$AD \| A'H$, $AD = A'H$;

$T_{\overrightarrow{CH}}$: $C \to H$, $B \to B'$ $\Rightarrow$ $BC \| B'H$, $BC = B'H$. Т.к. по условию $\angle 1 = \angle 2$, а $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$ как накрест лежащие углы, то $\angle 3 = \angle 4$.

Рассмотрим центральную симметрию относительно точки M. Так как $Z_M : A \to B$, то луч AA' отобразится в луч BB' , так как $AA' \| BB' \| DC$. Z_M : $A' \to B'$, так как $AA' = DH = HC = BB'$.

В треугольнике $A'B'H$ медиана MH является биссектрисой. Следовательно, треугольник $A'B'H$ равнобедренный, т. е. $A'H = B'H$. Тогда и AB = CB.

2. В прямоугольном треугольнике ABC проведена медиана CM и на его катетах как на сторонах вне треугольника ABC построены квадраты CBED и ACFH. Доказать, что $CM \perp DF$. (метод поворота)



Решение:

Рассмотрим поворот вокруг точки C на угол 90^0.

$R_C^{90^0}$: $\Delta ABC \to A'CD$; $CM \to CM'$, M' - середина $A'D$.$AC = CA'$, но $AC = CF$, следовательно, C – середина $A'F$. Тогда CM' - средняя линия $\Delta A'FD$, следовательно, $CM' \| FD$.

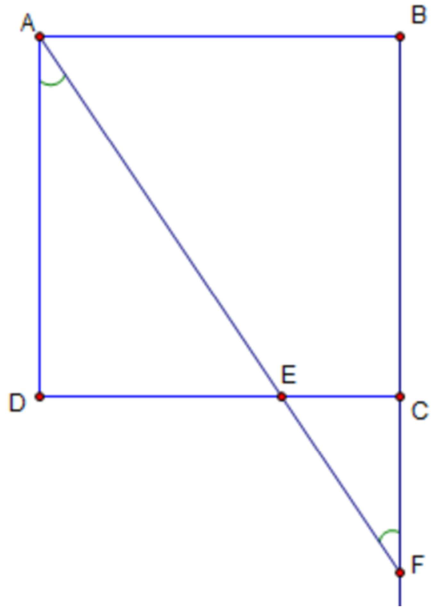
Так как при повороте $R_C^{90^0}$ отрезок CM переходит в отрезок CM′, то $\angle$MCM′=90^0, следовательно, CM⊥CM′, значит, CM⊥FD, что и требовалось доказать.

3. Прямая, проходящая через вершину A квадрата ABCD, пересекает сторону CD в точке E и прямую BC в точке F. Докажите, что $\frac{1}{\mathrm{AE}^2}+\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AB^2}$.

Решение:

Треугольник EAD подобен треугольнику AFB (по двум углам: $\angle$DAE=$\angle$AFB (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BF и секущей AF; $\angle$C и $\angle$D – прямые углы).

Пусть $\angle$DAE=α.



Из треугольника ADE: $AE=\frac{AD}{cos\alpha}$. Так как ABCD – квадрат, то AD=AB, следовательно, $AE=\frac{A\mathrm{B}}{cos\alpha}$

Из треугольника AFB: $AF=\frac{AB}{sin\,\alpha}$.

$AE^2=\frac{AB^2}{cos^2\alpha}$ $AF^2=\frac{AB^2}{sin^2\alpha}$ $\Rightarrow\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2}=\frac{cos^2\alpha+sin^2\alpha}{AB^2}=\frac{1}{AB^2}$.

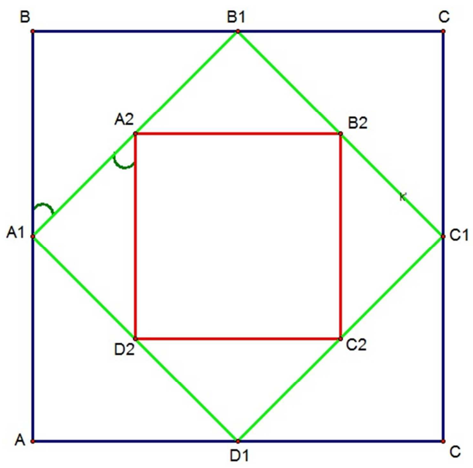
4. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма ABCD соответственно лежат точки A_1, B_1, C_1, D_1. В четырехугольнике $A_1B_1C_1D_1$ на сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 взяты соответственно точки A_2, B_2, C_2, D_2. Известно, что

$$\frac{AA_1}{BA_1}=\frac{BB_1}{CB_1}=\frac{CC_1}{DC_1}=\frac{DD_1}{AD_1}=\frac{A_1D_2}{D_1D_2}=\frac{D_1C_2}{C_1C_2}=\frac{C_1B_2}{B_1B_2}=\frac{B_1A_2}{A_1A_2}.$$

Докажите, что $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм со сторонами, параллельными сторонам ABCD. (метод аффинных преобразований)

Решение:

Каждый параллелограмм ABCD аффинным преобразованием можно перевести в квадрат (для этого нужно треугольник ABC перевести в равнобедренный прямоугольный треугольник). Поскольку в задаче идет речь только о параллельности прямых и об отношениях отрезков, лежащих на одной прямой, можно считать, что



ABCD — квадрат. Рассмотрим поворот на 90^o, переводящий ABCD в себя. При этом повороте четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ тоже переходят в себя, следовательно, они тоже являются квадратами. При этом $tg\angle BA_1B_1 = BB_1 : BA_1 = A_1D_2 : A_1A_2 = tg\angle A_1A_2D_2$, т. е. $AB \| A_2D_2$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ГЕОМЕТРИИ №2 «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ»

Схема решения задач на построение

Решение задач на построение обычно разбивается на 4 этапа: анализ, построение, доказательство, исследование.

Анализ: сначала подразумеваем, что задача решена и искомая фигура построена. Делаем схематически чертеж и, используя все известные теоремы планиметрии, находим связь между данными элементами и искомой фигурой. Этих зависимостей должно быть достаточно, что бы фигура могла быть построена с помощью только циркуля и линейки (или только одного из инструментов).

Построение: используем только данные элементы задачи. Исходя из анализа, строим данную фигуру.

Доказательство: используя данные анализа и все шаги построения докажем, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование: прежде всего, определить имеет ли задача решение, поясняем почему. Затем определяем количество решений задач. Количество решений зависит от условия задачи и положения искомой фигуры на плоскости.

К первому типу относят задачи, где положение фигуры относительно данных элементов не играет никакой роли. Здесь достаточно только отметить имеет или нет задача решение.

Ко второму типу относят задачи, в которых положение искомой фигуры зависит от данных элементов, то есть данных фигур

Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания контрольной работы № 2

Контрольная работа № 2 “Решение задач на построение методом геометрических преобразований” является промежуточной формой контроля знаний студентов и представляет собой письменное выполнение определенных заданий. Она предназначена для проверки знаний студентов по учебной дисциплине “Геометрия”, (модуль “Геометрические преобразования плоскости”), а также служит для закрепления полученных знаний, умений и навыков. В контрольной работе студентам предлагаются задачи, сформулированные на основании материала, изложенного в лекциях, проработанного на практических занятиях или самостоятельно изученного студентами.

Контрольная работа по геометрии № 2 направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по геометрии;
- развитие навыков самоорганизации и самоконтроля;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- оценка сформированности профессиональных компетенций и умений самостоятельной учебной и поисковой деятельности.

В работе представлено 10 вариантов заданий контрольной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними. В каждом из десяти вариантов содержится четыре задачи.

Предложенные задачи являются задачами на построение и требуют применения методов геометрических преобразований: метода параллельного переноса, метода поворота, метода осевой или центральной симметрии, метода подобия, метода инверсии.

Перед тем как приступить к контрольной работе, студентам следует ознакомиться с теоретическим материалом и разобраться с решением типовых задач, представленных в конспекте лекций по геометрии “Геометрические преобразования плоскости”.

За правильное выполнение первого и второго заданий выставляется по два балла. Третье и четвертое задания оцениваются в три балла.

Система оценивания заданий контрольной работы представлена в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание домашней контрольной работы в БРС

№ задания	Характеристика задания	Критерии оценивания	Баллы
1	Построить геометрическую конфигурацию, используя метод параллельного переноса или симметрии	Логично и последовательно выполнены все этапы решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы. Выполнен аккуратный, наглядный чертеж	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения ИЛИ представлено верное решение без использования метода геометрических преобразований	1
2	Построить геометрическую конфигурацию, используя	Логично и последовательно выполнены все этапы	2

	метод симметрии или поворота	решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы. Выполнен аккуратный, наглядный чертеж	
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения ИЛИ представлено верное решение без использования метода геометрических преобразований	1
3	Построить геометрическую конфигурацию, используя метод подобия	Задача решена верно. Логически обоснованы все этапы решения, получены верные выводы	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения ИЛИ представлено верное решение без использования метода геометрических преобразований	2
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок логического характера	1
4	Построить геометрическую конфигурацию, используя метод инверсии	Задача решена верно. Логически обоснованы все этапы решения, получены верные выводы	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения ИЛИ представлено верное решение без использования метода	2

		геометрических преобразований	
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок логического характера	1
ИТОГО			максимум 10

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы № 2

1. Контрольная работы выполняется на отдельных листах, которые должны быть скреплены, или в отдельной тетради синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя).

2. В начале первого листа (или на обложке тетради) должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название дисциплины, номер варианта контрольной работы.

Например:

Контрольная работа по геометрии

“Решение задач на построение методом геометрических преобразований”

студентки факультета информатики, математики и экономики

4 курса группы МИа-18 Ивановой Татьяны Александровны

Вариант 1

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы.

4. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы.

5. Решение задачи нужно сопровождать формулами, ссылками на соответствующие утверждения и теоремы, развернутыми расчетами и пояснениями к ним. Чертежи обязательны, желательно при построениее чертежа применять цвет. Чертежи можно выполнять с помощью компьютерных программ (например “Живая математика” или “GeoGebra”).

6. Задачи №№ 1, 2 оцениваются в 2 балла. Задачи №№ 3 и 4 оцениваются в 3 балла. Таким образом, максимально за контрольную работу можно набрать 10 баллов. Если набрано менее 5 баллов (выполнено верно меньше половины работы), то работу необходимо переделать.

7. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком.

Варианты контрольной работы № 2

ВАРИАНТ 1

1. Даны две стороны параллелограмма и угол между его диагоналями. Построить параллелограмм.

   Указание: Сделать параллельный перенос на отрезок AB, где AB – основание параллелограмма.

2. Даны две окружности и точка A, им не принадлежащая. Построить равнобедренный треугольник ABC (AB=AC) с данным углом α при вершине A так, чтобы точки B и C лежали на двух данных окружностях (метод поворота).

3. Дан острый угол AOB и точка M внутри него. Построить окружность с центром на стороне угла BO, касающуюся другой стороны угла и проходящую через точку M (метод гомотетии и подобия).
4. Дана окружность и две точки, ей не принадлежащие. Чрез эти точки провести окружность, ортогональную данной (метод инверсии).

ВАРИАНТ 2

1. Даны окружности F и Q и отрезок MN. Построить отрезок AB, равный и параллельный отрезку MN, концы которого лежат на данных окружностях (метод параллельного переноса).
2. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одной его вершиной была бы точка P, другая принадлежала прямой a, третья – прямой b (метод поворота).
3. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания и высоты (метод гомотетии и подобия).
4. Даны точка O и две не проходящие через нее прямые. Провести через точку O такой луч, чтобы произведение его отрезков от точки O до точек пересечения с данными прямыми было равно квадрату данного отрезка (метод инверсии)

ВАРИАНТ 3

1. Построить квадрат, две противоположные вершины которого лежат на данной прямой a, а две другие – на данных окружностях F и Q.

   Указание: принять прямую а за ось симметрии .
2. Даны две окружности и точка A, им не принадлежащая. Построить равносторонний треугольник ABC так, чтобы точки B и C лежали на двух данных окружностях (метод поворота)
3. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и высоте (метод гомотетии и подобия).

4. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой (метод инверсии)

   Указание: за центр инверсии принять одну из данных точек, а ее расстояние до данной прямой принять за радиус инверсии.

ВАРИАНТ 4

1. Даны две окружности и прямая. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины принадлежали данным окружностям, а одна из высот – данной прямой (метод осевой симметрии).
2. Даны три параллельные прямые и точка А, лежащая на одной из них. Требуется построить равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин совпала с точкой А, а две другие лежали на двух данных параллельных прямых.

   Указание: Применить поворот вокруг точки А.
3. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и основанию (метод гомотетии и подобия).
4. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей, проходящих через одну общую точку Р (метод инверсии).

   Указание: Принять Р за центр инверсии.

ВАРИАНТ 5

1. Построить трапецию по основаниям *a*. *b* и диагоналям d_1 и d_2 (метод параллельного переноса)
2. Дан треугольник АВС и внутри него точка М. Постройте равнобедренный треугольник с вершиной в точке М, основанием, параллельным АВ, и двумя другими вершинами, принадлежащими АС и ВС (метод осевой симметрии).
3. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания и боковой стороны (метод гомотетии и подобия).

4. Через данную точку А провести окружность, ортогональную двум данным окружностям (метод инверсии)

   Указание: Принять данные окружности за окружности инверсии.

ВАРИАНТ 6

1. Через точку А пересечения двух окружностей провести прямую так, чтобы обе окружности высекали на этой прямой равные хорды (метод центральной симметрии).
2. На данной прямой найдите такую точку, чтобы сумма расстояний от этой точки до двух данных точек была бы наименьшей (метод осевой симметрии).
3. Построить треугольник по двум углам и медиане (метод гомотетии и подобия).
4. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей и проходящую через данную точку, лежащую вне двух данных окружностей (метод инверсии).

   Указание: Данную точку принять за центр инверсии

ВАРИАНТ 7

1. Построить треугольник по стороне a, высоте h_a и медиане m_c.

   Указание. Перенести высоту h_a параллельно самой себе так, чтобы она прошла через основание данной медианы
2. Даны прямые l, a и окружность ω. Постройте квадрат так, чтобы две его противоположные вершины принадлежали прямой l, а две другие – прямой a и окружности ω (метод осевой симметрии).
3. Построить треугольник по двум углам и высоте (метод гомотетии и подобия).
4. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности (метод инверсии)

ВАРИАНТ 8

1. Построить трапецию, зная ее диагонали, угол между ними и одну из боковых сторон.

   Указание: Задача сводится к построению треугольника по двум сторонам и углу между ними, если перенести одну из диагоналей искомой трапеции на некоторый вектор, параллельный основанию трапеции.
2. Даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на прямой l такую точку C, чтобы сумма расстояний AC+CB была наименьшей возможной (метод осевой симметрии).
3. Построить треугольник по двум углам и биссектрисе (метод гомотетии и подобия).
4. Построить окружность, проходящую через данную точку, касающуюся данной окружности и данной прямой (метод инверсии).

   Указание: Принять данную точку за центр инверсии

Вариант 9

1. Через точку A пересечения двух окружностей провести прямую так, чтобы обе окружности высекали на этой прямой равные хорды (метод центральной симметрии).

2. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одной его вершиной была бы точка P, другая принадлежала прямой *a*, третья – прямой *b* (метод поворота).

3. Дан острый угол AOB и точка M внутри него. Построить окружность с центром на стороне угла BO, касающуюся другой стороны угла и проходящую через точку M (метод гомотетии и подобия).

4. Через данную точку A провести окружность, ортогональную двум данным окружностям (метод инверсии)

Указание: Принять данные окружности за окружности инверсии.

Вариант 10

1. Даны две стороны параллелограмма и угол между его диагоналями. Построить параллелограмм.

Указание: Сделать параллельный перенос на отрезок AB, где AB – основание параллелограмма.

2. Дан треугольник ABC и внутри него точка M. Постройте равнобедренный треугольник с вершиной в точке M, основанием, параллельным AB, и двумя другими вершинами, принадлежащими AC и BC (метод осевой симметрии).

3. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и основанию (метод гомотетии и подобия).

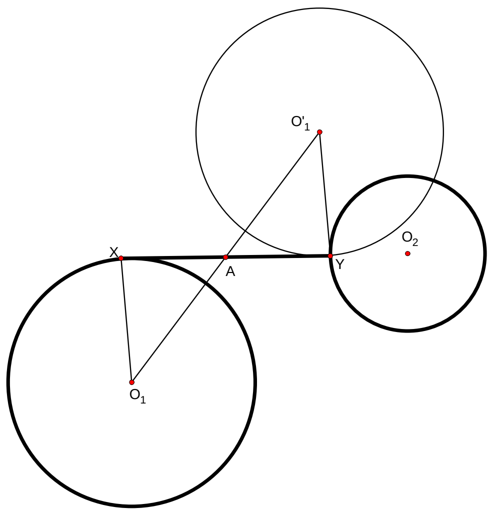
4. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей и проходящую через данную точку, лежащую вне двух данных окружностей (метод инверсии).

Указание: Данную точку принять за центр инверсии

Образец решения варианта контрольной работы № 2

Вариант 0

1. Между двумя окружностями α и β провести отрезок XY, делящийся пополам в данной точке A.



Решение:

Анализ. Предположим, что задача решена и XY – искомый отрезок. Совершим параллельный перенос окружности α на вектор $2\overrightarrow{O_1A}$. При этом окружность α перейдет в равную ей окружность α_1, точка O_1 – в точку O_1', а точка X – в точку Y. Рассмотрим треугольники XO_1A и $YO_1'A$. Треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, AX=AY, где Y – точка пересечения окружностей α_1 и β.

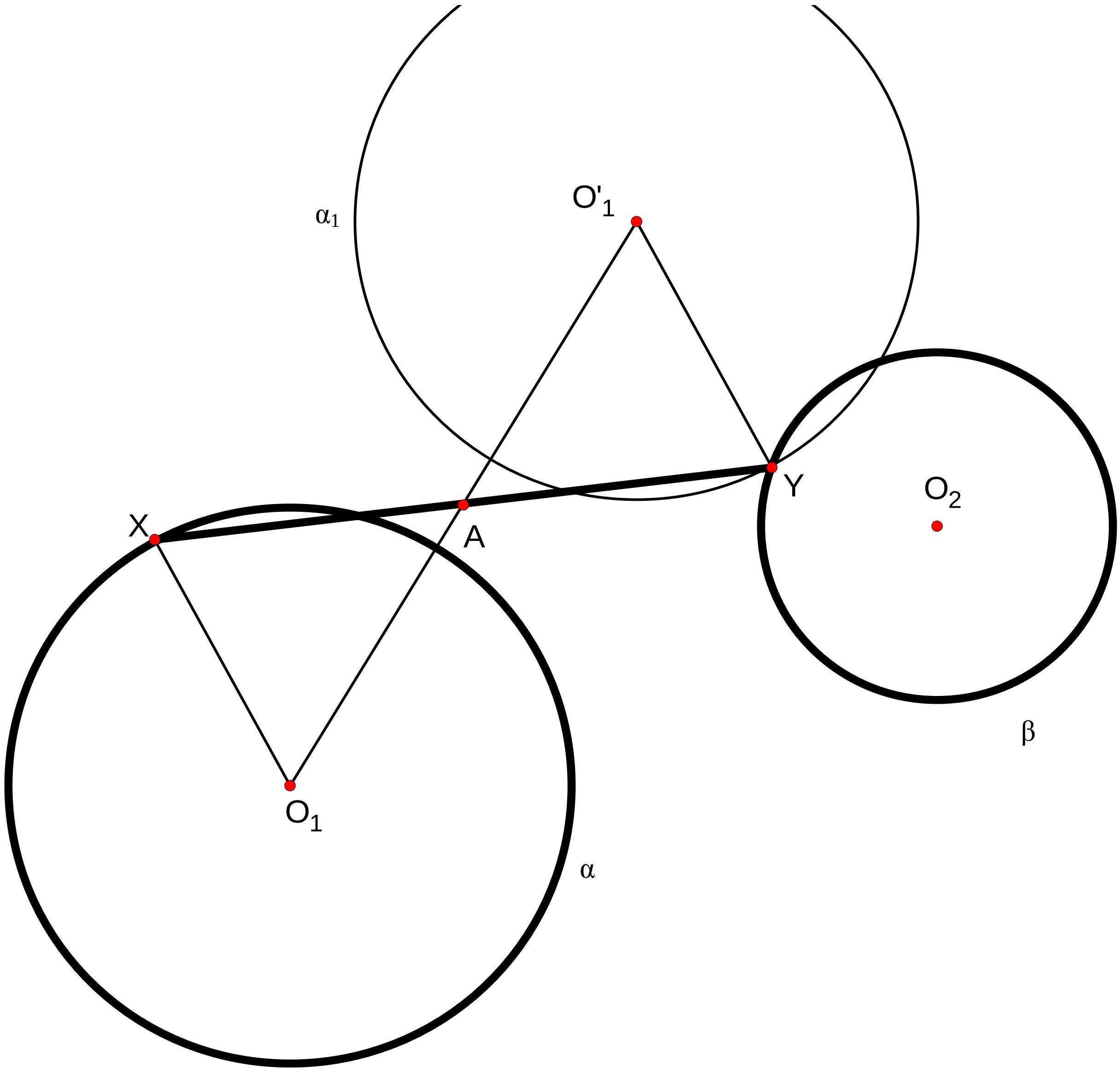
Построение.

1) O_1': $\overrightarrow{O_1O_1'} = 2\overrightarrow{O_1A}$

2) $\alpha_1 (O_1', r)$, $\alpha_1 = \alpha$

3) $Y = \alpha_1 \cap \beta$

4) $X = AY \cap \alpha$



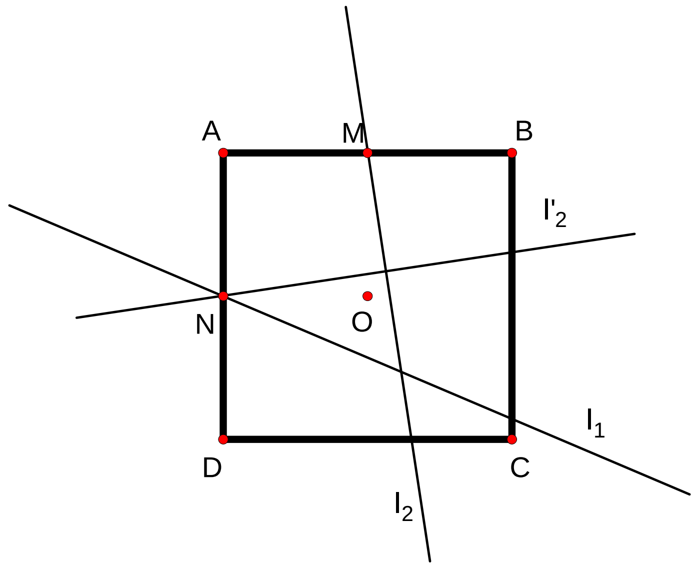
5) XY – искомый отрезок.

Доказательство. Следует из анализа и построения.

Исследование. Если окружности, то задача имеет два решения; если окружности α_1 и β имеют одну общую точку, то задача имеет единственное решение; если окружности α_1 и β не пересекаются, то решений нет.

2. Построить квадрат с центром в данной точке O, если середины двух его соседних сторон лежат на двух данных прямых.

Решение:



Анализ. Предположим, что задача решена и квадрат ABCD – искомый. Так как ON=OM, $\angle NOM=90^0$, то точка N является образом точки M при повороте вокруг точки O на 90^0. $M\in l_2$, $N\in l_1$. Значит, если повернуть прямую l_2 вокруг точки O на 90^0, то пересечение прямых l_1 и l_2' (если оно есть) определит точку N. (l_2' - образ прямой l_2 при указанном повороте). Обратным поворотом получим точку M. $AB\perp MO$, $AD\perp ON$. Построив прямые AB и AD, получим точку A. Учтем, что BM=MA и AN=ND.

Построение

1) $l_2' = R_0^{90}(l_2)$

2) $N=l_2'\cap l_1$

3) M: OM=ON, $\angle NOM=90^0$

4)$AN\perp ON$

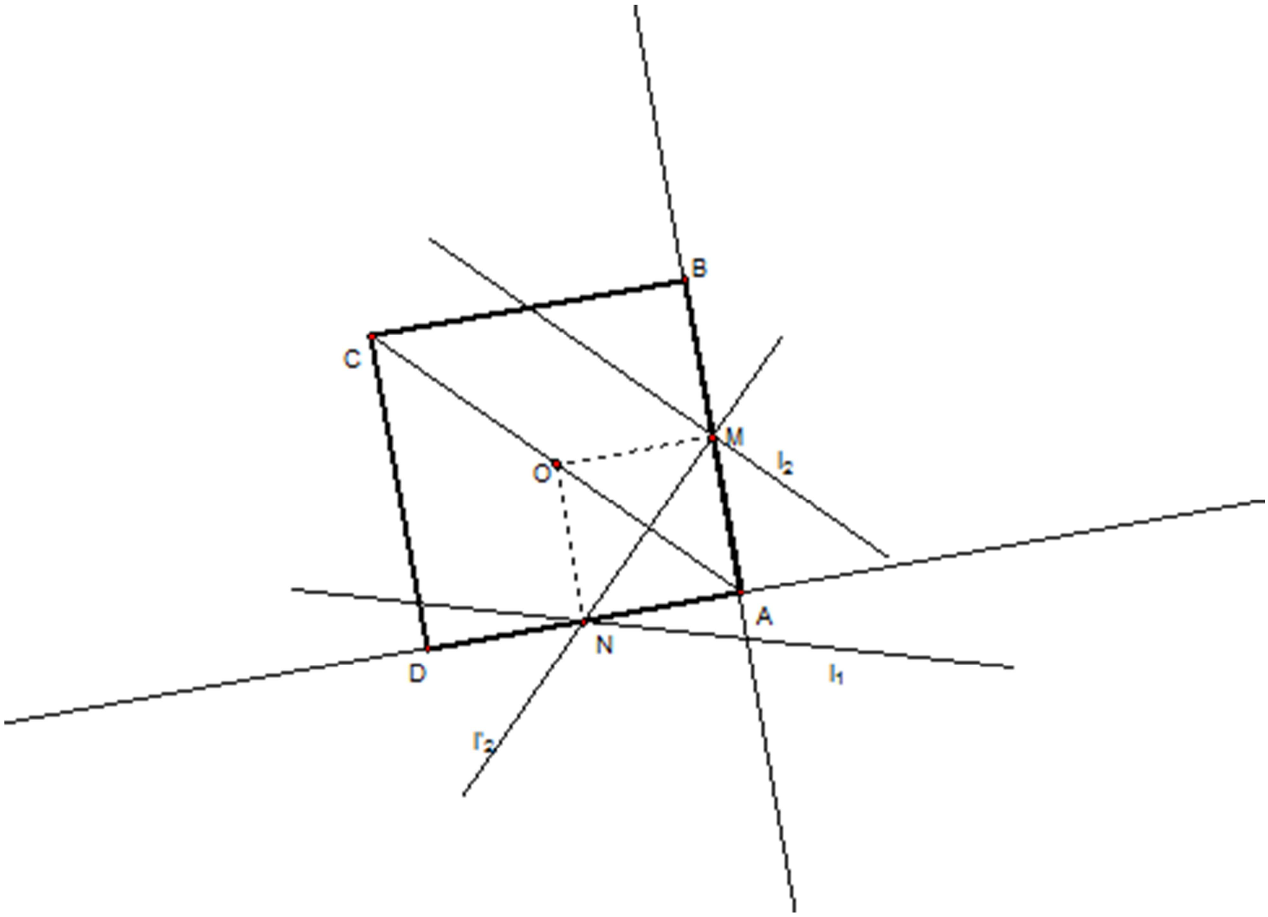
5) $AM\perp OM$

6) $AN\cap AM=A$

7) AB=2AM, AD=2AN

8) C: $C\in AO$, AC=2AO

9) ABCD – искомый квадрат

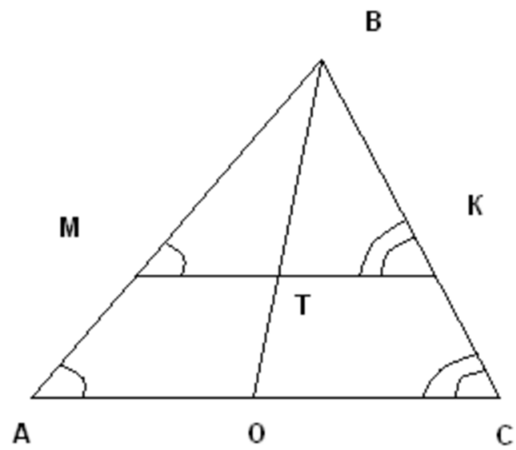


Доказательство. Следует из анализа и построения.

Исследование. Если $l'_2 \cap l_1$ в некоторой точке, то задача имеет единственное решение; если $l'_2 \parallel l_1$, то задача решений не имеет; если l'_2 совпадает с l_1, то решений бесконечно много.

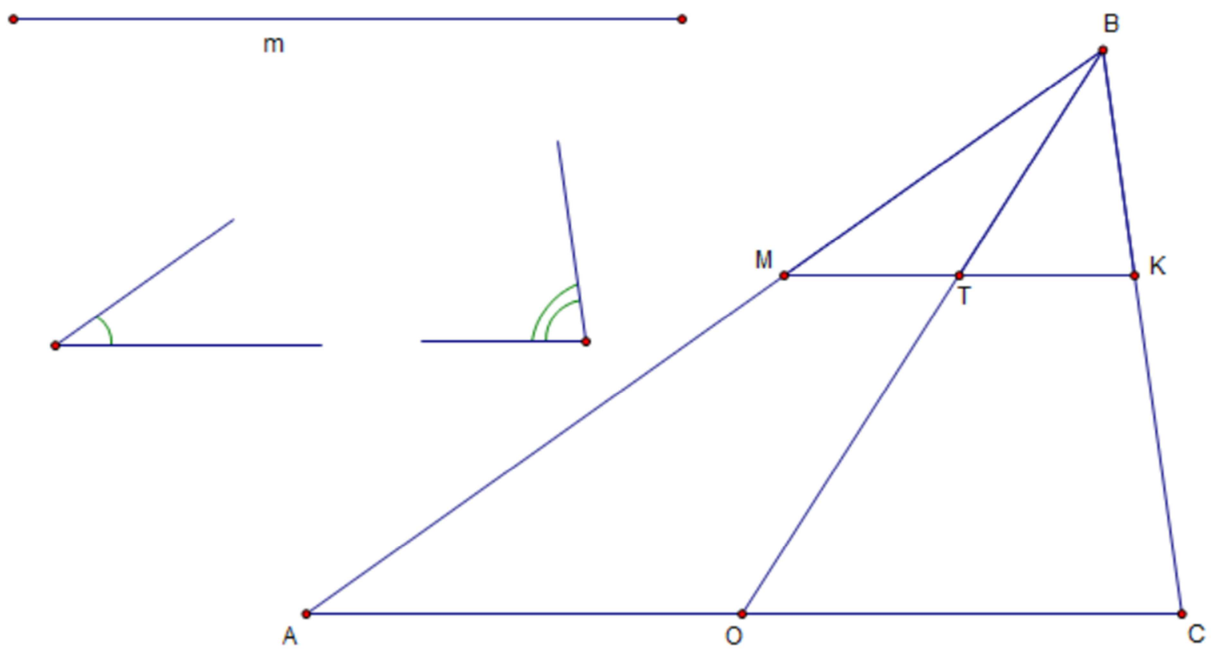
3. Построить треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.

Решение:



Анализ. Пусть треугольник ABC искомый. Треугольники подобны, если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, в подобных треугольниках сходственные медианы пропорциональны. Построим произвольный треугольник MBK, два угла которого равны данным; он будет подобен искомому. В этом треугольнике проведем медиану из вершины третьего угла. Пусть BT – медиана. Тогда коэффициент подобия – отношение данной медианы к получившейся при построении треугольника MBK, подобного искомому.

Построение. Построим произвольный треугольник MBK, два угла которого равны данным; он будет подобен искомому. В этом треугольнике проведем медиану из вершины третьего угла. Пусть BT – медиана. На BT от точки B отложим отрезок, равный длине данной медианы – получим точку O. Через O проведем прямую *l*, параллельную прямой MK. Пусть A – точка пересечения продолжения BM за точку M с прямой *l*, а C – точка пересечения продолжения BK за точку K с прямой *l*. Треугольник ABC искомый.



Доказательство. Из построения следует, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC. Значит, два угла A и B последнего равны заданным. Кроме того, медиана BO имеет заданную длину, т.е. треугольник обладает всем заданным условиям.

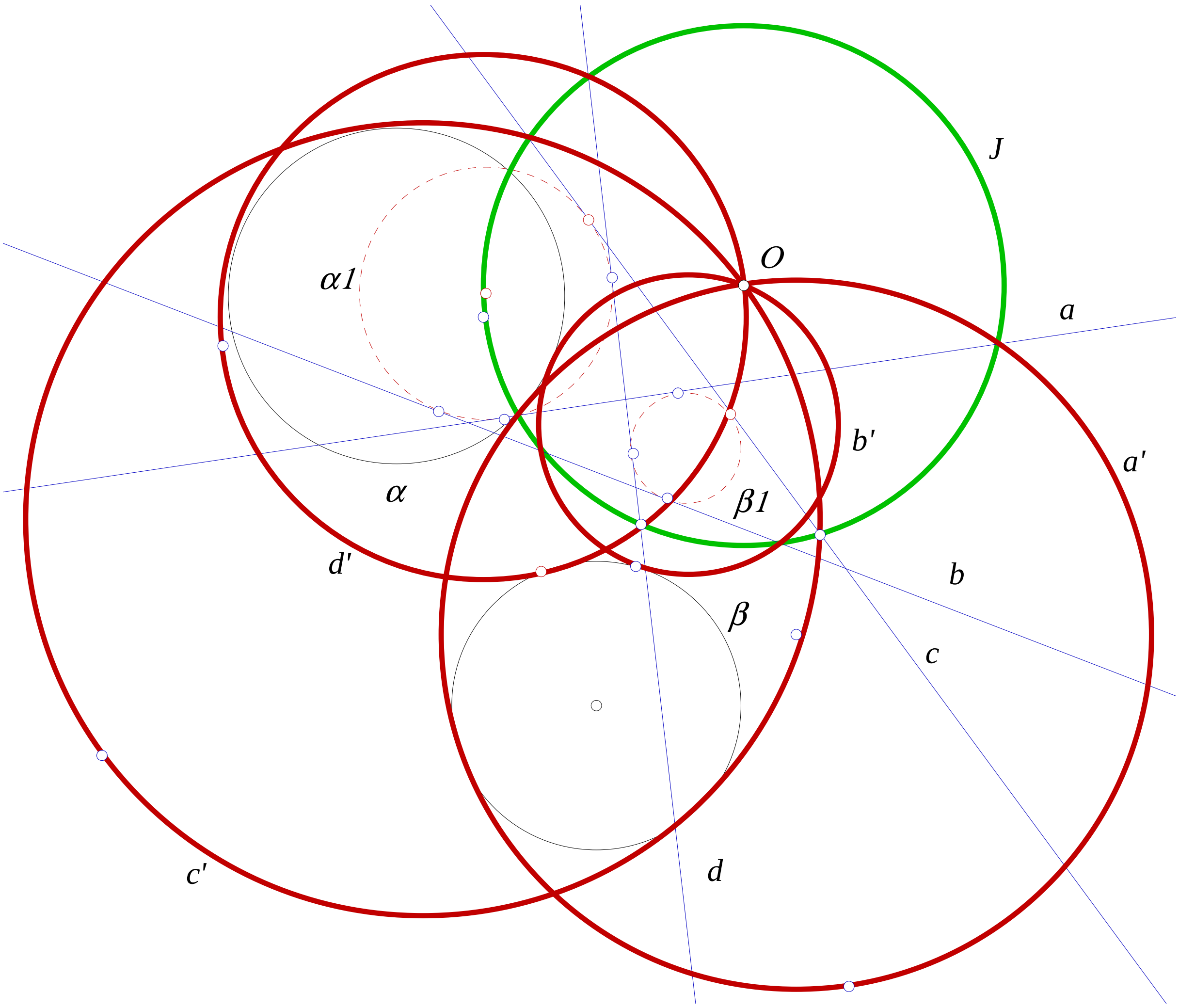
Исследование. Задача всегда имеет решение и притом одно, если сумма заданных углов меньше 180^o.

4. Построить окружности, касающиеся двух данных окружностей и проходящие через данную точку, лежащую вне двух данных окружностей.

Решение:

Анализ. Даны две окружности α и β и точка O. Рассмотрим инверсию с центром в точке O, радиусом таким, чтобы, сделав инверсию окружностей α и β, можно было без затруднений построить общие касательные образов α' и β'. Ясно, что α' и β' *это* окружности и у них четыре общие касательные a, b, c, d. Тогда, сделав инверсию, прямых a, b, c, d (не проходящих через центр инверсии) мы получим четыре окружности a', b', c', d' (проходящих через центр инверсии O), которые будут касаться прообразов α' и β', т.е. данных окружностей α и β. Значит окружности a', b', c', d' являются искомыми окружностями.

Построение.



Доказательство. Следует из анализа и построения.

Исследование.

Задача может иметь четыре решения, в том случае, когда окружности не пересекаются (к двум непересекающимся окружностям можно построить четыре общих касательных). Три решения, когда окружности касаются внешним образом (к двум внешним образом касающимся окружностям можно построить три общие касательные). Два решения, когда окружности пересекаются (к двум пересекающимся окружностям можно построить две общие касательные), и когда окружности одна внутри другой, и точка находится внутри большей окружности, но вне меньшей. Одно решение, когда окружности касаются внутренним образом (к двум внутренним образом касающимся окружностям можно построить одну общую окружность). И если окружности расположены одна внутри другой и точка расположена внутри обеих окружностей либо вне их, то задача не имеет решения.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Атанасян, С.Л. Геометрия 1: учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский. — Москва : Лаборатория знаний, 2017. — 334 с. – ISBN 978-5-00101-452-2. — URL: https://e.lanbook.com/book/94095. — Текст: электронный.
2. Атанасян, С.Л. Геометрия 2 : учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский, В.Г. Ушаков. — Москва : Лаборатория знаний, 2015. — 547 с. — ISBN 978-5-9963-2876-5. - URL: https://e.lanbook.com/book/66314 . — Текст: электронный.
3. Далингер, В. А. Геометрия: планиметрические задачи на построение : учебное пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 155 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-05758-4. — Текст : электронный. — URL: https://urait.ru/bcode/441676

Дополнительная литература

1. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии : учебное пособие / В. В. Прасолов.— Москва : МЦМНО : ОАО “Московские учебники”, 2006. — 640 с. – ISBN 5-94057-214-6. — URL: https://math.ru/lib/files/pdf/planim5.pdf. – Текст: электронный
2. Франгулов С. А., Совертков П. И., Фадеева А. А., Ходот Т. Г. Сборник задач по геометрии: учебное пособие / С.А. Франгулов, П.И. Совертков, А. А. Фадеева, Т. Г. Ходот. — СПб : Издательство “Лань”, 2014. — 256 с. — ISBN 978-5-8114-1557-1. – URL: https://ru.b-ok.cc/ireader/2892257

Электронные ресурсы

1. Дистанционное образование в МГУ : интернет-портал Московского государственного университета. - Москва, 1997 - 2019. – URL: http://www.msu.ru/study/dist-learn.html (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

1. Открытый класс. Коллекция ЦОР : сетевые образовательные сообщества. – [Б. м.], 2008–2019. – URL: http://www.openclass.ru, (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

2. ПЕДСОВЕТ.ORG : медиатека, включающая ЦОР и методические разработки. – [Б. м.], 2012-2019. – URL: http://pedsovet.org/ (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

3. Российский образовательный портал. Коллекция ЦОР – [Б. м.], 2015-2019. - URL: http://www.school.edu.ru, (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

4. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов / ФЦИОР. – Москва, 2015-2019. – URL: http://fcior.edu.ru/ (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Общероссийский математический портал (информационная система) - http://www.mathnet.ru/
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» - http://www.window.edu.ru.
3. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов - http://fcior.edu.ru. Доступ свободный.