Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.А. Вячкина, Е. С. Вячкин

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

*Методические указания к выполнению практических работ
для обучающихся по направлениям подготовки
38.03.02 Менеджмент, профиль «Маркетинг»,
09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике»*

Новокузнецк

2020

УДК [378.146:519.8](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.18я73
В 99

Вячкина Е. А., Вячкин Е. С.
В 99 Исследование операций: методические указания к выполнению практических работ для обучающихся по направлениям подготовки 38.03.02 Менеджмент, профиль «Маркетинг», 09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике» / Е.А. Вячкина, Е. С. Вячкин; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 68 с.

Методические указания содержат разработки семи основных тем практических занятий с подробным решением демонстрационных примеров, задания для решения на практических занятиях, указания к их выполнению; вопросы для самопроверки, список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов очной и заочной форм обучения направлений 38.03.02 Менеджмент, профиль «Маркетинг» и 09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике».

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 6 от 17.01.2020

Заведующий каф. МФММ
____________/ Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 7 от 12.03.2020

Председатель методической комиссии ФИМЭ
____________/ Г.Н. Бойченко

УДК [378.146:519.8](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.18я73
В 99

Текст представлен в авторской редакции

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Курс исследования операций является одним из основополагающих курсов в процессе подготовки современного экономиста. Дисциплина «Исследование операций» включает изучение методов нахождения оптимальных решений на основе математического моделирования, статистического моделирования и различных эвристических подходов к всевозможным областям человеческой деятельности.

Применение исследования операций в экономике позволяет понизить затраты и повысить продуктивность предприятия (иногда в несколько раз!). Исследование операций активно используют армии и правительства многих развитых стран для решения комплексных задач снабжения, продвижения армий, разработки новых видов вооружений, исследования стратегий войн, развития межгосударственных торговых механизмов, прогнозирования изменения (например, климата) и т. д. Поэтому одним из признаков профессиональной компетентности экономиста является владение экономико-математическими методами.

Методические указания содержат сведения о семи основных темах курса «Исследование операций», каждая из которых включает вопросы для самопроверки, подробно описанное решение демонстрационного примера и задания для решения различного уровня сложности. В конце методических указаний приведен список рекомендуемой к изучению литературы.

Особое внимание в методических указаниях уделено вопросам построения математических моделей как основополагающему и наиболее творческому этапу решения задач. Рассмотрены наиболее трудоемкие методы решения задач (симплекс-метод, метод потенциалов, методы оптимизации сетевых моделей).

Выполнение практических заданий начинается с ответов на вопросы для самопроверки, затем необходимо подробно изучить предложенный демонстрационный пример, после чего можно приступать к решению предложенных задач.

Раздел 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Практическая работа 1. Основная задача линейного программирования

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение модели линейного программирования.
2. Назовите основные этапы записи модели линейного программирования.
3. Приведите пример содержательной постановки задачи и математическую модель задачи составления рациона.
4. Приведите пример содержательной постановки задачи и математическую модель задачи использования ресурсов.
5. Определите понятия стандартной и канонической формы записи модели линейного программирования.
6. Назовите основные приемы перехода от произвольной записи модели к стандартной и канонической форме записи. Приведите примеры.
7. В чем заключается геометрическая интерпретация задачи линейного программирования?
8. Приведите алгоритм решение задачи линейного программирования графическим способом.
9. В чем заключается симплексный метод решения основной задачи линейного программирования? Алгоритм метода.
10. Приведите методику расчета, используемую для анализа на чувствительность задачи линейного программирования графическим способом и симплексным методом.

Демонстрационный пример

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используются 4 вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Вид ресурса	**Запас ресурса**	**Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции**	
		P_1	**P_2**
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
S_4	21	3	-

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2 составляет 2 и 3 денежные единицы соответственно. Необходимо составить такой план производства, при котором прибыль от реализации двух видов продукции будет максимальной.

Решение.

При составлении экономико-математической модели задачи получаем следующую систему ограничений и целевую функцию:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, & (I) \\ 2x_1 + x_2 \le 16, & (II) \\ \quad\quad x_2 \le 5, & (III) \\ 3x_1 \quad\quad \le 21. & (IV) \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

При этом по смыслу задачи $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$. (V, VI)

Необходимо найти число единиц продукции P_1 и P_2, запланированных к производству ($x_1,\ x_2$).

а) Графическое решение задачи

Изобразим многоугольник решений. Для этого сначала построим границы полуплоскостей, то есть прямые (рисунок 1.1):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18, & (I) \\ 2x_1 + x_2 = 16, & (II) \\ \quad\quad x_2 = 5, & (III) \\ 3x_1 \quad\quad = 21. & (IV) \end{cases}$$

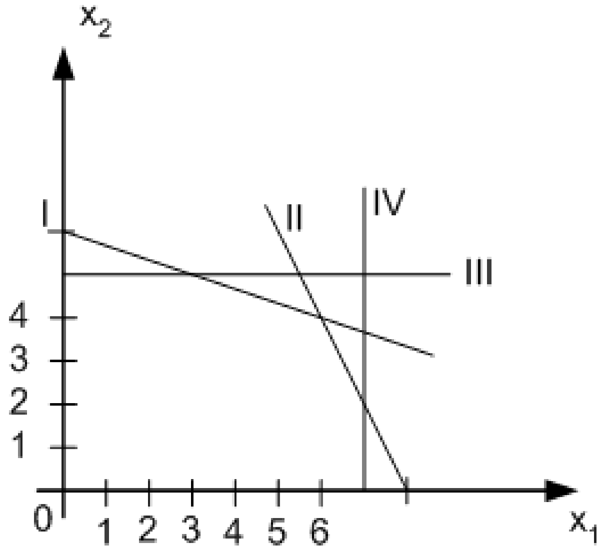


Рисунок 1.1

Для определения искомой полуплоскости необходимо задать произвольную контрольную точку, не лежащую на ее границе – построенной прямой. Если неравенство выполняется в контрольной точке, то оно выполняется и во всех точках полуплоскости, содержащей контрольную точку, и не выполняется во всех точках другой полуплоскости. В качестве контрольной точки удобно взять начало координат O(0;0). С учетом естественных условий (V, VI), накладываемых на переменные, получается многоугольник решений (рисунок 1.2).

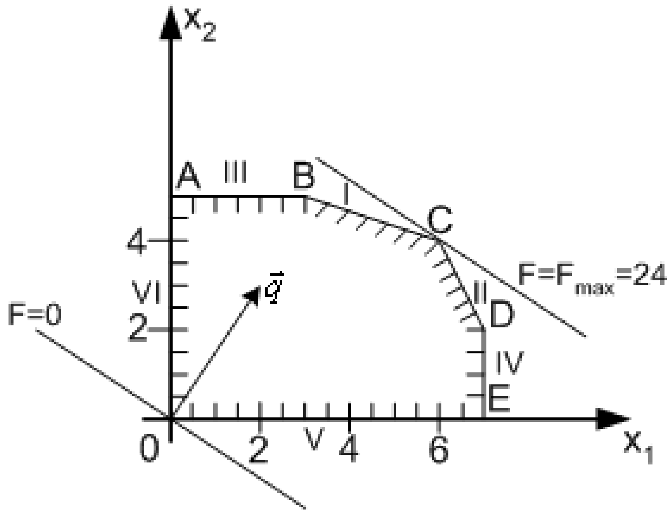


Рисунок 1.2

Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то целевая функция принимает максимальное (или минимальное) значение в одной из угловых точек многоугольника решений. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы среди вершин многоугольника OABCDE найти точку $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, в которой целевая функция $F = 2x_1 + 3x_2$ принимает максимальное значение. Чтобы определить эту вершину, проведем прямую $F = 0$ (т.е. $2x_1 + 3x_2 = 0$), а затем определим направление возрастания целевой функции (градиент $\vec{q}$). Для линейной функции градиент всегда равен вектору, составленному из коэффициентов этой функции, и перпендикулярен прямой $F = 0$. Для нашей целевой функции $F = 2x_1 + 3x_2$ градиент $\vec{q} = (2;3)$ (рисунок 2.2). Таким образом, двигая прямую $F = 0$ в сторону вектора $\vec{q}$, находим точку максимума C.

Координаты точки C найдем, решая систему уравнения прямых *I* и *II*, пересекающихся в точке C:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18, \\ 2x_1 + x_2 = 16. \end{cases}$$

Ответ: $x^* = (6,4)$ – точка максимума. $F^* = 24$– максимальное значение целевой функции.

<u>б) Симплексный метод</u>

Для решения задачи симплексным методом необходимо с помощью дополнительных неотрицательных переменных привести задачу к каноническому виду, т.е. свести систему неравенств к системе равенств. Так как в исходной системе во всех неравенствах стоит знак «≤» то, чтобы свести ее к системе равенств необходимо прибавить к каждому неравенству новую дополнительную переменную:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ \qquad x_2 \le 5, \\ 3x_1 \qquad \le 21. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ \qquad x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 \qquad + x_6 = 21. \end{cases}$$

Для заполнения симплексной таблицы перенесем все неизвестные целевой функции $F = 2x_1 + 3x_2$ влево, получим $F - 2x_1 - 3x_2 = 0$.

Теперь заполним таблицу 1.2:

Таблица 1.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Правая часть	Базисные переменные
1	1	3	1	0	0	0	18	x_3
2	2	1	0	1	0	0	16	x_4
3	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0	5	x_5
4	3	0	0	0	0	1	21	x_6
F	-2	-3	0	0	0	0	0	

Для нахождения первоначального опорного плана разобьем переменные на 2 группы: основные (базисные) и неосновные. В качестве базисных выбираем такие m положительных переменных, каждая их которых входит только в одно из m уравнений системы ограничений. Базисные переменные записываются в последний столбец таблицы 1.2. Если переменная является базисной, то ее значение равно соответствующему значению, стоящему в правой части таблицы 1.2, если переменная не является базисной, значит, она равна 0. Таким образом, первоначальный опорный план выглядит следующим образом: $X_0 = (0;0;18;16;5;21)$, $F_0 = 0$.

Чтобы план был оптимальным (т.е. целевая функция достигала максимума) необходимо, чтобы коэффициенты при переменных, стоящих в целевой функции, являлись положительными, либо равнялись 0. В нашем плане имеются отрицательные коэффициенты целевой функции (последняя строка таблицы 1.2), а значит план не оптимальный.

Для улучшения плана, выберем разрешающий элемент в столбце, содержащем наименьший отрицательный коэффициент в целевой функции. В нашем случае это столбец x_2 (таблица 1.2). Этот элемент должен быть обязательно положительным. Если таких элементов несколько, то находят отношения правых частей к соответствующим элементам разрешающего столбца, и за разрешающий выбирают тот элемент, для которого это отношение минимально. Для нашего случая получаем несколько отношений: $\min\left(\frac{18}{3};\frac{16}{1};\frac{5}{1}\right) = 5$. Выделяем этот элемент в прямоугольник (таблица 1.2). Пересчитываем элементы таблицы по методу Жордана-Гаусса (таблица 2.3).

Таблица 1.3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Правая часть	Базис
1	$\boxed{1}$	0	1	0	-3	0	3	x_3
2	2	0	0	1	-1	0	11	x_4
3	0	1	0	0	1	0	5	x_2
4	3	0	0	0	0	1	21	x_6
F	-2	0	0	0	3	0	15	

Новый опорный план $X_1 = (0;5;3;11;0;21)$ при значении целевой функции $F_1 = 15$ не является оптимальным, так как есть столбец с отрицательным коэффициентом в целевой функции (столбец x_1). Выбираем в этом столбце новый разрешающий элемент $\min\left(\frac{3}{1};\frac{11}{2};\frac{21}{3}\right) = 3$ и пересчитываем таблицу (таблица 1.4).

Таблица 1.4.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Правая часть	Базис
1	1	0	1	0	-3	0	3	x_1
2	0	0	-2	1	$\boxed{5}$	0	5	x_4
3	0	1	0	0	1	0	5	x_2
4	0	0	-3	0	9	1	12	x_6
F	0	0	2	0	-3	0	21	

Новый опорный план $X_2 = (3;5;0;5;0;12)$ при значении целевой функции $F_2 = 21$ также не является оптимальным, так как в столбце x_5 отрицательный коэффициент в целевой функции. Выбираем в этом столбце новый разрешающий элемент $\min\left(\frac{5}{5};\frac{5}{1};\frac{12}{9}\right) = 1$ и пересчитываем таблицу (таблица 1.5).

Таблица 1.5.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Правая часть	Базис
1	1	0	-1/5	3/5	0	0	6	x_1
2	0	0	-2/5	1/5	1	0	1	x_5
3	0	1	2/5	-1/5	0	0	4	x_2
4	0	0	3/5	-9/5	0	1	3	x_6
F	0	0	4/5	3/5	0	0	24	

Получившийся опорный план $X^* = (6;4;0;0;1;3)$ при значении целевой функции $F^* = 24$ является оптимальным и совпадает с решением, полученным графическим способом.

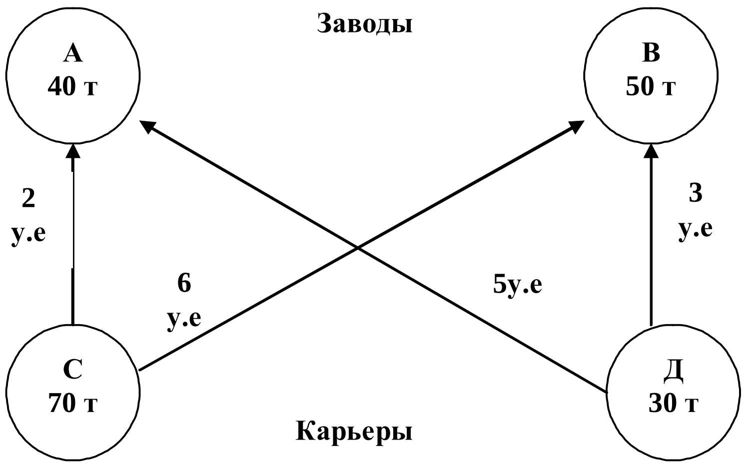
Задания для решения

Построить математическую модель задачи линейного программирования (1.1 -1.33)

1.1 Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 условных единиц (усл. ед.), жиров – не менее 70 усл.ед. и витаминов – не менее 10 усл. ед. Содержание их в каждой единице продуктов $П_1$ и $П_2$ равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1) усл. ед. Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ – 2 руб., $П_2$ –3 руб.

Построить математическую модель задачи, позволяющую так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ. Решить полученную задачу симплексным методом.

1.2 В пунктах А и В расположены кирпичные заводы, а в пунктах С и Д – песчаные карьеры. Производительность карьеров, потребность заводов, а также стоимость перевозки из карьеров песка, представлены на схеме. Требуется составить такой план перевозки песка, чтобы он обеспечивал наименьшие затраты на перевозку.



1.3 Заводу требуется составить оптимальный по реализации производственный план выпуска двух видов изделий при определённых возможностях 4 видов машин. План должен быть таким, чтобы от реализации выпущенной по этому плану продукции завод получил бы наибольшую прибыль. Оба вида изделий последовательно обрабатываются этими машинами. План должен учитывать, что 1–й вид машин ежедневно может работать 18 ч., 2–й вид машин 12 ч., 3–й вид машин 12 ч., 4–й вид машин 9ч. В следующей таблице указано время необходимое для обработки каждого из этих двух видов изделий указанными типами машин.

Завод от реализации одного изделия 1–ого вида получает 4 у. е., от 2–ого вида 6 у. е.

Виды машин / Виды изделий	1	2	3	4
I	1	1/2	1	-
II	1	1	-	1
Время работы машин	18	12	12	9

Цифры в таблице означают время обработки каждой машины на 1 изделие каждого типа.

1.4 Требуется составить смесь, содержащую 3 химических вещества А, В, С. Известно, что составляющая смесь должна содержать вещества А не менее 6 ед.; В не менее 8 ед.; С не менее 12 ед.. Эти вещества содержатся в 3–х видах продуктах: I, II, III. Концентрации веществ указаны в таблице. Стоимость единицы каждого продукта составляет: I – 2 у.е.; II – 3 у.е.; III – 2.5 у.е.

Хим. в-ва / Продукты	A	B	C
I	2	1	3
II	1	2	4
III	3	1.5	2

1.5 На вокзалы А и В прибыло по 30 комплектов мебели. Известно, что перевозка одного комплекта с вокзала А в магазины С, Д, Е соответственно стоит 1 у. е., 3 у. е., 5 у. е., а перевозка с вокзала В те же магазины соответственно: 2 у.е., 5 у.е., 4 у. е. Необходимо доставить по 20 комплектов мебели в каждый из магазинов. Составить план перевозок, минимальный по стоимости.

1.6 Ежедневно в город поставляется одним видом транспорта 12 тонн картофеля из трех колхозов: из колхоза I по цене 4 рубля за 1 тонну, из II — по цене 3 рубля, из III — по цене 1 рубль за 1 тонну. Чтобы поставка картофеля в город была произведена своевременно, необходимо на погрузку требуемых 12 тонн затратить не белее 40 минут. Известно, что в колхозе I уровень механизации позволяет погрузку 1 тонны производить за 1 минуту, во II —за 4 минуты, в III—за 3 минуты. Производственные мощности этих колхозов следующие: колхоз I должен ежедневно выделять для поставки в город не более 10 тонн, II —не более 8 тонн, III — не более 6 тонн. Как распределить заказы на поставку 12 тонн между колхозами, чтобы общая стоимость привозимого в город картофеля была минимальной? Требуется записать условия задачи в виде таблицы и построить математическую модель.

1.7 В швейном цехе имеется 84 м ткани. На пошив одного халата требуется 4 м ткани, а на одну куртку — 3 м. Сколько следует изготовить халатов и курток для получения наибольшей прибыли от реализации продукции, если халат стоит 6 руб., а куртка — 3 руб. Известно, что халатов можно изготовить не более 15, а курток — не более 20.

1.8 Известно, что откорм животных экономически выгоден при условии, когда каждое животное получает в дневном рационе не менее 6 единиц питательного вещества A, не менее 12 единиц вещества B, не менее 4 единиц вещества C. Для откорма животных используется два вида кормов. Следующая таблица показывает, сколько единиц каждого питательного вещества содержит 1 кг каждого вида корма:

Корм / Пит. в-ва	**I**	**II**
A	2	1
B	2	4
C	0	4

Цена корма I равна 5 руб. за 1 кг, а цена корма II — 6 руб. за 1 кг. Какое количество каждого вида корма необходимо израсходовать, чтобы затраты на него были минимальные?

1.9 Процесс изготовления двух видов изделий заводом требует, во-первых, последовательной обработки на токарных и фрезерных станках, и, во-вторых, затрат двух видов сырья: стали и цветных металлов. Данные о потребности каждого ресурса на единицу выпускаемого изделия и общие запасы ресурсов помещены в таблице. Прибыль от реализации единицы изделия A — 3 тыс. рублей, единицы изделия B — 8 тыс. рублей. Определить такой план выпуска продукции, который обеспечивает максимальную прибыль при условии, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Затраты на 1 изделие</td><td rowspan="2">Ресурсы</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Материалы</td><td>Сталь (кг)</td><td>10</td><td>70</td><td>320</td></tr>
<tr><td>Цветные металлы (кг)</td><td>20</td><td>50</td><td>420</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Оборудование</td><td>Токарные станки (станкочасов)</td><td>300</td><td>400</td><td>6200</td></tr>
<tr><td>Фрезерные станки (станкочасов)</td><td>200</td><td>100</td><td>3400</td></tr>
<tr><td colspan="2">Прибыль от изделия</td><td>3</td><td>8</td><td></td></tr>
</table>

1.10 Для пошива одного изделия требуется выкроить из ткани 6 деталей. На швейной фабрике были разработаны два варианта раскроя ткани. В таблице приведены характеристики вариантов раскроя 10 м^2 ткани и комплектность, т.е. количество деталей определенного вида, которые необходимы для пошива одного изделия.

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./отрез						Отходы, м^2/отрез
	1	2	3	4	5	6	
1	60	0	90	40	70	90	0,5
2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектность, шт./изделие	1	2	2	2	2	2	

Ежемесячный запас ткани для пошива изделий данного типа составляет 405 м^2. В ближайший месяц планируется сшить 90 изделий.

Постройте математическую модель задачи, позволяющую в ближайший месяц выполнить план по пошиву с минимальным количеством отходов.

1.11 При изготовлении изделий $И_1$ и $И_2$ используются сталь и цветные металлы, а также токарные и фрезерные станки. По технологическим нормам на производство единицы изделия $И_1$ требуется 300 и 200 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования, а также 10 и 20 кг соответственно стали и цветных металлов. Для производства единицы изделия $И_2$ требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов.

Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами соответственно токарного и фрезерного оборудования и 640 и 840 кг соответственно стали и цветных металлов. Прибыль от реализации единицы изделия $И_1$ составляет 6 руб. и от единицы изделия $И_2$ – 16 руб.

Постройте математическую модель задачи, используя в качестве показателя эффективности прибыль и учитывая, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

1.12 В районе лесного массива имеются лесопильный завод и фанерная фабрика. Чтобы получить 2,5м^3 коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 м^3 еловых и 7,5 м^3 пихтовых лесоматериалов. Для приготовления листов фанеры по 100 м^3 требуется 5 м^3 еловых и 10 м^3 пихтовых лесоматериалов. Лесной массив содержит 80 м^3 еловых и 180 м^3 пихтовых лесоматериалов.

Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 м^3 пиломатериалов и 1200 м^2 фанеры. Доход с 1 м^3 пиломатериалов составляет 160 руб., а со 100 м^2 фанеры – 600 руб. Постройте математическую модель для нахождения плана производства, максимизирующего доход.

Примечание. При построении модели следует учесть тот факт, что пиломатериалы могут быть реализованы только в виде неделимого комплекта размером 2,5 $м^3$, а фанера – в виде неделимых листов по 100 $м^2$.

1.13 С вокзала можно отправлять ежедневно курьерские и скорые поезда. Вместимость вагонов и наличный парк вагонов на станции указаны в таблице.

Характеристики парка вагонов	Тип вагона				
	Багажный	Почтовый	Плацкартный	Купейный	Мягкий
Число вагонов в поезде, шт.					
курьерском	1	-	5	6	3
скором	1	1	8	4	1
Вместимость вагонов, чел.	-	-	58	40	32
Наличный парк вагонов, шт	12	8	81	70	27

Постройте математическую модель задачи, на основании которой можно найти такое соотношение между числом курьерских и скорых поездов, чтобы число ежедневно отправляемых пассажиров достигло максимума.

1.14 Служба снабжения завода получила от поставщиков 500 стальных прутков длиной 5 м. Их необходимо разрезать на детали А и В длиной соответственно 2 и 1,5 м, из которых затем составляются комплекты. В каждый комплект входят 3 детали А и 2 детали В. Характеристики возможных вариантов раскроя прутков представлены в таблице.

Постройте математическую модель задачи, позволяющую найти план раскроя прутков, максимизирующий количество комплектов.

Примечание В ЦФ могут входить не все переменные задачи.

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./пруток		Отходы, м/пруток
	А	В	
1	2	0	1
2	1	2	0
3	0	3	0,5
Комплектность, шт./компл.	3	2	

1.15 Малое предприятие выпускает детали А и В. Для этого оно использует литье, подвергаемое токарной обработке, сверлению и шлифованию. Производительность станочного парка предприятия по обработке деталей А и В приведена в таблице.

Станки	Производительность, шт./ч		Стоимость станочного времени, руб./ч
	A	B	
Токарные	25	40	20
Сверлильные	28	35	14
Шлифовальные	35	25	17,5
Цена детали, руб.			
Покупная	2	3	
продажная	5	6	

Предполагая, что спрос на любую комбинацию деталей A и B обеспечен, постройте математическую модель для нахождения плана их выпуска, максимизирующего прибыль.

1.16 Ежедневно в ресторане фирменный коктейль (порция составляет 0,33 л) заказывают в среднем 600 человек. Предполагается, что в ближайшее время их количество увеличится в среднем на 50 человек. Согласно рецепту, в составе коктейля должно быть:

не менее 20%, но и не более 35% спирта;

не менее 2% сахара;

не более 5% примесей;

не более 76% воды;

не менее 7% и не более 12% сока.

В таблице приведены процентный состав напитков, из которых смешивается коктейль, и их количество, которое ресторан может ежедневно выделять на приготовление коктейля.

Напиток	Спирт	Вода	Сахар	Примеси	Количество, л/сут.
Водка	40%	57%	1%	2%	50
Вино	18%	67%	9%	6%	184
Сок	0%	88%	4%	4%	46

Постройте модель, на основании которой можно будет определить, хватит ли ресторану имеющихся ежедневных запасов напитков для удовлетворения возросшего спроса на коктейль.

1.17 Из пункта A в пункт B ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. Данные об организации перевозок следующие:

Поезда	Количество вагонов в поезде				
	багажный	почтовый	плацкарт	купе	СВ
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	-	8	4	1
число пассажиров	-	-	58	40	32
парк вагонов	12	8	81	70	26

Сколько должно быть сформировано скорых и пассажирских поездов, чтобы перевезти наибольшее количество пассажиров?

1.18 Четыре овощехранилища каждый день обеспечивают картофелем три магазина. Магазины подали заявки соответственно на 17, 12 и 32 тонны. Овощехранилища имеют соответственно 20, 20 ,15 и 25 тонн. Тарифы (в д.е. за 1 тонну) указаны в следующей таблице:

Овощехранилища	Магазины		
	1	2	3
1	2	7	4
2	3	2	1
3	5	6	2
4	3	4	7

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

1.19 При откорме каждое животное должно получить не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в следующей таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг	
	корма 1	корма 2
Белки	3	1
Углеводы	1	2
Протеин	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида – 4 д.е., второго – 6 д.е.

Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость.

1.20 Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь – 100 ед., труд – 120 ед., тяга – 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции: $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$. Организация производства характеризуется следующей таблицей:

Продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от единицы продукции
	Площадь	Труд	Тяга	
$П_1$	2	2	2	1
$П_2$	3	1	3	4
$П_3$	4	2	1	3
$П_4$	5	4	1	5

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

1.21 Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовления трансформаторов обоих видов используются железо и проволока. Общий запас железа – 3 тонны, проволоки – 18 тонн. На один трансформатор первого вида расходуются 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуются 3 кг железа и 2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 3 д.е., второго – 4 д.е.

Составьте план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

1.22 Совхоз отвел три земельных массива размером 5000, 8000 и 9000га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана в следующей таблице:

Посевы	Массивы		
	I	II	III
рожь	12	14	15
пшеница	14	14	22
кукуруза	30	35	25

За 1 центнер ржи совхоз получает 2 д.е., за 1 центнер пшеницы – 2,8 д.е., за 1 центнер кукурузы – 1,4 д.е. Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану он обязан сдать не менее 1900 тонн ржи, 158 000 тонн пшеницы и 30 000 тонн кукурузы?

1.23 Из трех продуктов – I, II, III составляется смесь. В состав смеси должно входить не менее 6 ед. химического вещества А, 8 ед. – вещества В и не менее 12 ед. вещества С. Структура химических веществ приведена в следующей таблице. Составьте наиболее дешевую смесь.

Продукт	Содержание химического вещества в 1 ед. продукции			Стоимость 1 ед. продукции
	A	B	C	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

1.24 В школе проводится конкурс на лучшую стенгазету. Одному школьнику дано следующее поручение:

- купить акварельной краски по цене 30 д.е. за коробку, цветные карандаши по цене 20 д.е. за коробку, линейки по цене 12 д.е., блокноты по цене 10 д.е.;
- красок нужно купить не менее трех коробок, блокнотов – столько, сколько коробок карандашей и красок вместе, линеек не более пяти. На покупки выделяется не менее 300 д.е.

В каком количестве школьник должен купить указанные предметы, чтобы общее число предметов было наименьшим?

1.25 Имеются три специализированные мастерские по ремонту двигателей. Их производственные мощности равны соответственно 100, 700, 980 ремонтов в год. В пяти районах, обслуживаемых этими мастерскими, потребность в ремонте равна соответственно 90, 180, 150, 120, 80 двигателей в год. Затраты на перевозку одного двигателя из районов к мастерским следующие:

Районы	Мастерские		
	1	2	3
1	4,5	3,7	8,3
2	2,1	4,3	2,4
3	7,5	7,1	4,2
4	5,3	1,2	6,2
5	4,1	6,7	3,1

Спланируйте количество ремонтов каждой мастерской для каждого из районов, минимизирующее суммарные транспортные расходы.

1.26 Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин А-2:3:5:2, бензин В-3:1:2:1, бензин С-2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами 120 д.е., 100 д.е., 150 д.е.

Составьте план выпуска разных сортов авиационного бензина из условия получения максимальной стоимости всей продукции.

1.27 Для участия в соревнованиях спортклуб должен выставить команду, состоящую из спортсменов I и II разрядов. Соревнования проводятся по бегу, пряжкам в высоту, прыжкам в длину. В беге должны участвовать 5 спортсменов, в прыжках в длину – 8 спортсменов, а в прыжках в высоту – не более 10. количество очков, гарантируемых спортсмену каждого разряда по каждому виду, указано в таблице:

Разряд	Бег	Прыжки в высоту	Прыжки в длину
I	4	5	5
II	2	3	3

Распределите спортсменов в команды так, чтобы сумма очков команды была наибольшей, если известно, что в команде I разряд имеют только 10 спортсменов.

1.28 Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. На звероферме имеется 10 000 клеток. В одной клетке могут быть либо 2 лисицы, либо 1 песец. По плану на ферме должно быть не менее 3000 лис и

6000 песцов. В одни сутки необходимо выдавать каждой лисе корма – 4 ед., а каждому песцу – 5 ед. Ферма ежедневно может иметь не более 200 000 единиц корма. От реализации одной шкурки лисы ферма получает прибыль 10 д.е., а от реализации одной шкурки песца – 5 д.е.

Какое количество лисиц и песцов нужно держать не ферме, чтобы получить наибольшую прибыль?

1.29 Из двух сортов бензина образуются две смеси – А и В. Смесь А содержит 60% бензина 1-го сорта и 40% 2-го сорта; смесь В – 80% 1-го сорта и 20% 2-го сорта. Цена 1 кг смеси А – 10 д.е., а смеси В – 12 д.е. Составьте план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется 50 т бензина 1-госорта и 30 т второго сорта.

1.30 Имеются две почвенно-климатические зоны, площади которых соответственно равны 0,8 и 0,6 млн. га. Данные об урожайности зерновых культур приведены в таблице:

Зерновые культуры	Урожайность (ц/га)		Стоимость 1 ц, д.е.
	1-я зона	2-я зона	
Озимые	20	25	8
Яровые	25	20	7

Определите размеры посевных площадей озимых и яровых культур, необходимые для достижения максимального выхода продукции в стоимостном выражении.

1.31 Для полива различных участков сада, на которых растут сливы, яблони, груши, служат три колодца. Колодцы могут дать соответственно 180, 90 и 40 ведер воды. Участки сада требуют для полива соответственно 100, 120 и 90 ведер воды. Расстояния (в метрах) от колодцев до участков сада указаны в следующей таблице. Как лучше организовать полив?

Колодцы	Участки		
	сливы	яблони	груши
1	10	5	12
2	23	28	33
3	43	4	39

1.32 Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 ед. соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и $П_2$ приведены в следующей таблице:

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья в ед.
	$П_1$	$П_2$	
А	2	3	9
В	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: 3 д.е. –для $П_1$ и 4 д.е. –для $П_2$. Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Графически определить область допустимых значений

1.33. $\begin{cases} x_1 - 1 \ge 0 \\ x_2 - 1 \ge 0 \\ x_1 + x_2 - 3 \ge 0 \\ -6x_1 - 7x_2 + 42 \ge 0 \end{cases}$ **1.34** $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_1 + x_2 - 2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 + 1 \le 0 \\ x_1 \le 2 \end{cases}$ **1.35** $\begin{cases} x_1 \ge 2 \\ x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 + 1 \le 0 \end{cases}$

1.36 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 \ge 3 \end{cases}$ **1.37** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \ge 0 \\ x_1 - x_2 - 5 \ge 0 \\ x_1 \le 7 \end{cases}$ **1.38** $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 5 \ge 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3 \le 0 \\ x_1 \le 5 \end{cases}$

1.39 $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ **1.40** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 - 7 \ge 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4 \ge 0 \end{cases}$ **1.41** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 40 \\ 4x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 + 8 \ge 0 \\ x_2 \le 6 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

1.42 $\begin{cases} 4 - 2x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 - x_2 \ge -5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ **1.43** $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 1/2 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ **1.44** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2 \\ 8 - x_1 + 2x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

Решить графическим методом

1.45 $F(X) = x_1 + 2x_2 \to \max\,(\min)$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16 \\ x_1 \le 0, x_2 \le 0 \end{cases}$$

1.46 $F(X) = x_1 + x_2 \to \max\,(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \\ x_1 \le 0, x_2 \le 0 \end{cases}$$

1.47 $F(X) = 4x_1 - 3x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ -7x_1 + 10x_2 \le 80, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.48 $F(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge `6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 4x_1 + x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.49 $F(X) = x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 4x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.50 $F(X) = -2x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.51 $F(X) = x_1 + 6x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.52 $F(X) = -3x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ -2x_1 + 6x_2 \le 20, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.53 $F(X) = x_1 + 6x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -2x_1 + 12x_2 \ge 8, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 2, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.54 $F(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 2x_1 + x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -2x_1 + 8x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Найти значение целевой функции при заданной системе ограничений. Решить задачу симплекс-методом. Дать графическую интерпретацию решения.

1.55 $\mathrm{F} = 4x_1 + 6x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.56 $\mathrm{F} = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4 \\ 3x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.57 $F = 4x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 18 \\ 0.5x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \le 12 \\ x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.58 $F = 2x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.59 $F = 2x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.60 $F = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.61 $F = 30x_1 + 40x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120 \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.62 $F = 2x_1 - 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.63 $F = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.64 $F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 0{,}7x_1 + 2x_2 \le 13{,}1 \\ 2{,}3x_1 + 2x_2 \le 23 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.65 $F = 4x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.66 $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.67 $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.68 $F = 2x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.69 Предприятие для изготовления различных изделий А, В и С использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на производство единицы продукции данного вида приведены в таблице. В ней также указана цена изделия каждого вида. Изделия А, В и С могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен). Однако производство ограничено количеством сырья I вида 360 кг, II – 192 кг, III – 180 кг.

Вид	Нормы затрат сырья, кг/ед. продукции			Кол-во сырья, кг
	А	В	С	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена ед. прод., тыс.руб	9	10	16	

<u>*Требуется:*</u> 1) найти оптимальный план выпуска продукции для получения максимальной прибыли, 2) провести анализ устойчивости оптимального плана при условии возможного изменения цены на каждый вид продукции.

1.70 Для производства продукции 3-х видов А, В и С требуется три вида сырья, объемы которых ограничены: 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат сырья и цены на продукцию приведены в таблице.

Определить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, и установить влияние на него изменения объема ресурсов.

Вид сырья	Нормы затрат сырья, кг/ед. прд.			Кол-во сырья, кг
	А	В	С	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Цена ед. прод., тыс.руб	10	14	12	

Практическая работа 2. Двойственная задача линейного программирования

Вопросы для самопроверки

1. Как составить двойственную задачу к исходной задаче линейного программирования?
2. В чем экономический смысл двойственной задачи? Что такое «теневые» цены?
3. Каким методом решается двойственная задача линейного программирования?
4. Сформулировать теоремы двойственности.

Демонстрационный пример

Составить двойственную задачу для демонстрационного примера из темы 2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ \quad\quad x_2 \le 5, \\ 3x_1 \quad\quad \le 21. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0,$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

и решить ее с помощью теорем двойственности.

<u>Решение.</u>

Составим расширенную матрицу исходной системы. Для составления двойственной задачи транспонируем ее.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 18 \\ 2 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 5 \\ \underline{3} & \underline{0} & \underline{21} \\ 2 & 3 & F \end{array}\right) \qquad A^T = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ \underline{3} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{3} \\ 18 & 16 & 5 & 21 & f \end{array}\right)$$

Получим расширенную матрицу двойственной задачи. Запишем математическую модель полученной задачи:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + \quad 3y_4 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \quad\quad \ge 3. \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0,$$

$$f = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \to \min.$$

Двойственная задача решается либо с помощью симплексного метода (решить самостоятельно), либо с помощью теорем двойственности с использованием связи между решениями исходной и двойственной задачи.

Попробуем решить нашу двойственную задачу, используя эту связь.

Для нашей исходной задачи оптимальное решение $X^* = (6; 4; 0; 0; 1; 3)$. Целевая функция $F^* = 24$.

Используем 1 теорему двойственности: если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны $F^* = f^*$. Получим $f^* = 24$.

Поставим в соответствие переменные исходной и двойственной задачи (таблица 2.1). По теореме о том, что положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи, найдем нулевые значения переменных двойственной задачи.

Таблица 2.1

Переменные исходной задачи	
Основные	Дополнительные
6 4 x_1 x_2 $\updownarrow$ $\updownarrow$ y_5 y_6 0 0	0 0 1 3 x_3 x_4 x_5 x_6 $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ y_1 y_2 y_3 y_4 0 0
Дополнительные	Основные
Переменные двойственной задачи	

Осталось выяснить чему будут равны двойственные переменные y_1, y_2. Используем вторую теорему двойственности: компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи.

Для этого из таблицы 2.5 выпишем значения коэффициентов целевой функции:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Правые части
…	…	…	…	…	…	…	…
F	0	0	4/5	3/5	0	0	24

Так как переменным x_3 и x_4 соответствуют переменные y_1, y_2, то $y_1 = \frac{4}{5}$, $y_2 = \frac{3}{5}$.

В итоге получаем оптимальное решение двойственной задачи $Y^* = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; 0; 0; 0; 0\right)$.

Если подставить полученное решение в систему ограничений, то все неравенства будут выполняться, и значение целевой функции будет равно $f^* = 24$.

Задания для решения

2.1 Составить двойственную задачу для задачи 2.1 и решить ее с помощью теорем двойственности.

2.2 Составить двойственную задачу для задачи 2.21 и решить ее симплексным методом.

2.3 Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 2x_1 + 7x_2 \text{ при условиях } \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

Постройте математические модели двойственных задач

2.4 $F = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \ge 19 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

2.5 $F = 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 18 \\ 4x_1 - 5x_3 \le 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 14 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

2.5 $F = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \le 15 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16 \\ 6x_1 + 5x_2 - 8x_3 \le 12 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

2.7 $F = -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \ge 8 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 12 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

Составить и решить двойственные задачи:

2.8 $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.9 $F = 12x_1 + 10x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 0.5\,x_2 \le 5 \\ 0.5x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 0.25x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.10 $F = 12x_1 + 10x_2 \to \max$

2.11 $F = 3x_1 + 4x_2 = 23$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 0{,}5x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 5x_1 + 10x_2 \le 55 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.12 $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.13 $F = 10x_1 + 16x_2 = 116$

$$\begin{cases} 18x_1 + 12x_2 \le 108 \\ 7x_1 + 14x_2 \le 98 \\ 8x_1 + 6x_2 \le 84 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.14 $F = 5x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.15 $F = 16x_1 + 9x_2 = 104$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \le 120 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.16 $F = 14x_1 + 4x_2 = 47{,}5$

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 \le 20 \\ 2x_1 + x_2 \le 48 \\ 6x_1 + x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.17 $F = 2x_1 + 3x_2 = 9$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Практическая работа 3. Транспортная задача

Вопросы для самопроверки

1. Приведите математическую модель транспортной задачи. Назовите особенности транспортной задачи.
2. В каком случае транспортная задача называется сбалансированной (закрытой)?
3. С помощью какого метода решается транспортная задача?
4. Какие методы для нахождения первоначального опорного плана Вы знаете? Сравните эти методы.
5. Как составить замкнутый цикл транспортной задачи?
6. Что такое потенциалы? Метод их вычисления.

Демонстрационный пример

Имеются 3 поставщика и 4 потребителя. Запасы поставщиков и спросы потребителей, а также затраты на перевозку единицы груза для каждой пары «поставщик-потребитель» приведены в таблице 3.1. Найти объемы перевозок для каждой пары «поставщик-потребитель» так, чтобы:

1. запасы всех поставщиков были реализованы;
2. спросы всех потребителей были удовлетворены;
3. суммарные затраты на перевозку груза были бы минимальны.

Таблица 3.1

$i\backslash j$	1	2	3	4	a_i
1	2 x_{11}	1 x_{12}	3 x_{13}	2 x_{14}	90
2	2 x_{21}	3 x_{22}	3 x_{23}	1 x_{24}	70
3	3 x_{31}	3 x_{32}	2 x_{33}	1 x_{34}	50
b_j	80	60	40	30	210

<u>Решение.</u>

1. Построим математическую модель исходной задачи.

Система ограничений:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=90, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=70, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=80, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=60, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=40, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=30, \\ x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,3; \qquad j=1,2,3,4. \end{cases}$$

Целевая функция:

$$F=2\cdot x_{11}+x_{12}+3\cdot x_{13}+2\cdot x_{14}+2\cdot x_{21}+3\cdot x_{22}+3\cdot x_{23}+x_{24}+3\cdot x_{31}+3\cdot x_{32}+2\cdot x_{33}+x_{34}\to min$$

2. Составим первоначальный план перевозок.

Первоначальный опорный план можно определить, например, по правилу «северо-западного угла».

Для этого вначале клетка, находящаяся в левом верхнем углу, заполняется максимально возможным количеством груза. Затем заполняется соседняя по строке или столбцу клетка, исходя из оставшихся возможностей и т.д. Заполнение клеток продолжается до распределения всего груза (таблица 3.2).

Таблица 3.2

$i \backslash j$	1	2	3	4	a_i
1	2 80	1 10	3	2	90
2	2	3 50	3 20	1	70
3	3	3	2 20	1 30	50
b_j	80	60	40	30	210

Замечание: число занятых клеток должно быть равно: $m+n$–1, где m – количество поставщиков, n – количество потребителей.

Если число заполненных клеток окажется меньше, чем $m+n–1$, то с помощью условных поставок, равных нулю, заполнить недостающие для выполнения условия клетки и продолжить решение. Предпочтительнее те клетки, в которых стоимость перевозки меньше.

В решаемой задаче число занятых клеток равно 6 и соответствует формуле $m+n$–1.

Проверим первоначальный план на оптимальность. Для этого составим двойственную задачу. Введем следующие двойственные переменные:

$$y_1=u_1, y_2=u_2, y_3=u_3,$$

$$y_4=v_1, y_5=v_2, y_6=v_3, y_7=v_4,$$

где $u_i, i=1,2,3; v_j, j=1,2,3,4 -$ так называемые потенциалы поставщиков и потребителей соответственно. Тогда двойственная задача выглядит следующим образом: найти максимальное значение функции

$f = 90u_1 + 70u_2 + 50u_3 + 80v_1 + 60v_2 + 40v_3 + 30v_4$,

при следующих значениях: $\begin{cases} u_1 + v_1 \le 2, \\ u_1 + v_2 \le 1, \\ u_1 + v_3 \le 3, \\ u_1 + v_4 \le 2, \\ u_2 + v_1 \le 2, \\ u_2 + v_2 \le 3, \\ u_2 + v_3 \le 3, \\ u_2 + v_4 \le 1, \\ u_3 + v_1 \le 3, \\ u_3 + v_2 \le 3, \\ u_3 + v_3 \le 2, \\ u_3 + v_4 \le 1. \end{cases}$

Исходя из теоремы о том, что если некоторая переменная в оптимальном плане исходной задачи строго больше нуля, то при подстановке оптимального плана двойственной задачи в систему ограничений соответствующее неравенство обращается в равенство, составляются критерии оптимальности опорных планов транспортных задач. В рассматриваемой задаче получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_2 = 1, \\ u_2 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_3 = 2, \\ u_3 + v_4 = 1. \end{cases}$$

Полагая $u_1 = 0$, находим решение $u_2 = 2$, $u_3 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 1$, $v_4 = 0$.

Подставляя полученные значения потенциалов в неравенства, не вошедшие в систему уравнений, получаем

$$u_1 + v_3 \le 3, \qquad 1 \le 3, \qquad (а)$$
$$u_1 + v_4 \le 2, \qquad 0 \le 2, \qquad (б)$$
$$u_2 + v_1 \le 2, \qquad 4 \le 2, \qquad (в)$$
$$u_2 + v_4 \le 1, \qquad 2 \le 1, \qquad (г)$$
$$u_3 + v_1 \le 3, \qquad 3 \le 3, \qquad (д)$$
$$u_3 + v_2 \le 3, \qquad 2 \le 3, \qquad (е)$$

План является оптимальным только в том случае, если все ограничения двойственной задачи выполняются. В примере не выполняются неравенства *(в)* и *(г)*. Это означает, что план не является оптимальным.

3. Составим новый опорный план.

Для этого необходимо в клетку, в которой не выполняется неравенство, загрузить груз. В нашем случае таких клеток 2: клетка (2,1) и (2,4).

Пустая клетка является предпочтительной для загрузки в том случае, если в соответствующем неравенстве имеет место наибольшее отличие между левой и правой частями. В примере такой клеткой является клетка (2,1).

В выбранной для загрузки клетке ставится знак «+» и строится замкнутый контур (цикл), одна из вершин которого находится в этой клетке, а все остальные – в занятых клетках. Такой контур имеет произвольную конфигурацию, и может быть построен только единственным образом.

Затем в занятых клетках, где находятся вершины контура, проставляют последовательно знаки «+», «–», «+», «–», «+» и т.д. (таблицу 3.3).

Таблица 3.3

$i \backslash j$	1	2	3	4	a_i
1	2 – 80	1 + 10	3	2	90
2	+	3 – 50	3 20	1	70
3	3	3	2 20	1 30	50
b_j	80	60	40	30	210

Знак «+» означает, что в этой клетке необходимо добавить некоторое количество груза, а знак «–» означает уменьшение груза. Вычитают (добавляют) минимальное количество груза, содержащегося в клетках со знаком «–». В данной задаче эта величина равняется 50. В результате получаем следующий опорный план (таблица 3.4).

Таблица 3.4

		$v_1=2$	$v_2=1$	$v_3=3$	$v_4=2$	
		1	2	3	4	a_i
$u_1=0$	1	2 30	1 60	$3 \le 3$	$2 \le 2$	90
$u_2=0$	2	2 50	$1 \le 3$	3 20 –	$2 \le 1$ +	70
$u_3=-1$	3	$1 \le 3$	$0 \le 3$	2 + 20	1 – 30	50
	b_j	80	60	40	30	210

Целевая функция при этом плане равна $F_1 = 350$.

Определив потенциалы и проверив неравенства, приходим к выводу, что план не является оптимальным и требуется его улучшение.

4. Улучшим план.

В таблице 4.4 видно, что перспективной клеткой является клетка (2,4), так как только в ней не выполняется неравенство. Другие вершины контура находятся в клетках (2,3), (3,3) и (3,4). Следующий план представлен в таблице 3.5.

Таблица 3.5

		$v_1=2$	$v_2=1$	$v_3=2$	$v_4=1$	
		1	2	3	4	a_i
$u_1=0$	1	2 30	1 60	$2 \le 3$	$1 \le 2$	90
$u_2=0$	2	2 50	$1 \le 3$	$2 \le 3$	1 20	70
$u_3=0$	3	$2 \le 3$	$1 \le 3$	2 40	1 10	50
	b_j	80	60	40	30	210

Целевая функция принимает значение $F_2 = 330$.

Т.к. все неравенства в пустых клетках таблицы 4.5 выполняются, то полученный план является оптимальным.

Замечание: если при проверке последнего плана на оптимальность окажется, что хотя бы одно из неравенств системы ограничений, не вошедшее в систему уравнений, будет выполняться как равенство при найденных значениях потенциалов, то задача имеет не единственное решение.

Задания для решения

3.1 Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. Первый завод поставляет 90 платформ грузовиков, второй – 30 платформ, третий – 40 платформ. Требуется поставить платформы следующим потребителям: первому – 70 штук, втором – 30 штук, третьем – 20 штук, четвертому – 40 штук. Стоимость перевозки одной платформы от поставщика до потребителя указана в следующей таблице (д.е.):

Поставщики	Потребители			
	1	2	3	4
I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

Составьте оптимальный план доставки грузовых автомобилей.

3.2 В пунктах А и В находятся соответственно 150 и 90 т горючего. Пунктам 1, 2, 3 требуются соответственно 60, 70, 110 т горючего. Стоимость перевозки 1 т горючего из пункта А в пункты 1, 2, 3 равна соответственно 60, 10, 40 тыс. руб. за 1 т соответственно, а из пункта В в пункты 1, 2, 3 - 120, 20, 80 тыс. руб. за 1 т соответственно. Составьте план перевозок горючего, минимизирующий общую сумму транспортных расходов.

3.3 Груз, хранящийся на трех складах и требующий для перевозки 60, 80, 106 автомашин соответственно, необходимо перевезти в четыре магазина. Первому магазину требуется 44 машины груза, второму – 70 машин, третьему – 50 машин и четвертому – 82 машины. Стоимость пробега одной автомашины за 1 км составляет 10 д.е. Расстояния от складов до магазинов указаны в следующей таблице:

Склады	Магазины			
	1	2	3	4
1	13	17	6	8
2	2	7	10	41
3	12	18	2	22

Составьте оптимальный по стоимости план перевозки груза от складов до магазинов.

3.4 Некоторая фирма содержит три магазина, которым еженедельно следует доставлять товар: первому магазину – 1050 кг сыра, второму – 600 мешков муки, третьему – 2400 упаковок сока. Товары доставляются грузовыми машинами четырех транспортных предприятий. Количество машин на этих предприятиях составляет 65, 40, 45 и 20 машин. Все машины имеют различную грузоподъемность [ед.тов./маш.], в зависимости от типа машины и типа перевозимого груза

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 12 \\ 5 & 3 & 6 \\ 50 & 30 & 60 \\ 25 & 15 & 30 \\ \text{кг}/\text{маш.} & \text{мешков}/\text{маш.} & \text{упак.}/\text{маш.} \end{pmatrix}.$$

Стоимости использования машин [руб./маш.] в зависимости от дальности перевозки и емкости машины равны

$$\begin{pmatrix} 30 & 24 & 24 \\ 10 & 9 & 6 \\ 250 & 210 & 240 \\ 100 & 75 & 90 \end{pmatrix}.$$

Организуйте экономичную перевозку товаров (при решении используйте метод северо-западного угла). Будьте внимательны при определении исходных себестоимостей перевозок распределительной задачи.

3.5 Для производства трёх изделий А, В и С используются три вида ресурсов. Каждый из них используется в объёме, не превышающем 180, 210 и 236 кг. Нормы затрат каждого из видов ресурсов на одно изделие и цена единицы изделий приведены в таблице.

Вид ресурса	*Нормы затрат ресурсов на 1 изделие, кг*		
	A	*B*	*C*
1 *2* *3*	*4* *3* *1*	*2* *1* *2*	*1* *3* *5*
Цена изделия, у.е.	*10*	*14*	*12*

Определить план выпуска изделий, обеспечивающий получение оптимального дохода.

3.6 Строительство магистральной дороги включает задачу заполнения имеющихся на трассе выбоин до уровня основной дороги и срезания в некоторых местах дороги выступов. Срезанным грунтом заполняются выбоины. Перевозка грунта осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности. Расстояние в километрах от срезов до выбоин и объем работ указаны в следующей таблице:

Поставщики	Потребители			Наличие грунта, т
	I	II	III	
A	1	2	3	10
B	2	1	3	30
C	1	2	4	20
Требуемое количество грунта, т	100	140	60	

Составьте план перевозок, минимизирующий общий пробег грузовиков.

3.7 Завод имеет три цеха – А, В, С и четыре склада – 1; 2; 3; 4. Цех А производит 30 тыс. шт. изделий, цех В – 40 тыс. шт.; цех С – 20 тыс. шт. изделий. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад 1 – 20 тыс. шт. изделий; склад 2 – 30 тыс. шт.; склад 3 – 30 тыс. шт. и склад 4 – 10 тыс. шт. изделий. Стоимость перевозки 1 тыс. шт. изделий из цеха А на склады 1, 2, 3, 4 – соответственно (д.е.): 20, 30, 40, 40; из цеха В – соответственно 30, 20, 50, 10; а из цеха С – соответственно 40, 30, 20, 60.

Составьте такой план перевозки изделий, при котором расходы на перевозку 90 тыс. шт. изделий были бы наименьшими.

3.8 Имеются две станции технического обслуживания (СТО), выполняющие ремонтные работы для трех автопредприятий. Производственные мощности СТО, стоимость ремонта в различных СТО, затраты на транспортировку от автопредприятий на СТО и обратно и прогнозируемое количество ремонтов в планируемом периоде на каждом автопредприятии приведены в следующей таблице:

СТО	Стоимость ремонта ед., д.е.	Затраты на транспортировку, тыс. руб.			Производственная мощность, шт.
		АТП-1	АТП-2	АТП-3	
1	520	60	70	20	10
2	710	40	50	30	8
Потребное количество, шт.		6	7	5	18

Требуется определить, какое количество автомашин из каждого автопредприятия необходимо отремонтировать на каждой СТО, чтобы суммарные расходы на ремонт и транспортировку были минимальными.

3.9 Имеются два хранилища с однородным продуктом, в которых сосредоточено 200 и 120 т продукта соответственно. Продукты необходимо перевезти трем потребителям соответственно в количестве 80, 100 и 120 т. Расстояния от хранилищ до потребителей (в км) следующие:

Хранилище	Потребители		
	1	2	3
1	20	30	50
2	60	20	40

Затраты на перевозку 1 т продукта на 1 км постоянны и равны 5 д.е.

Определите план перевозок продукта от хранилищ до потребителей из условия минимизации транспортных расходов.

3.10 Промышленный концерн имеет два завода и пять складов в различных регионах страны. Каждый месяц первый завод производит 40, а второй 70 ед. продукции. Вся продукция, производимая заводами, должна быть направлена на склады. Вместимость первого склада равна 20 ед. продукции; второго – 30; третьего – 15; четвертого – 27; пятого – 28 ед. Издержки транспортировки продукции от завода до склада следующие (ед.):

Заводы	Склады				
	1	2	3	4	5
1	520	480	650	500	720
2	450	525	630	560	750

Распределите план перевозок из условия минимизации ежемесячных расходов на транспортировку.

3.11 Три нефтеперерабатывающих завода с суточной производительностью 10, 8 и 6 млн. галлонов бензина снабжают три бензохранилища, спрос которых составляет 6, 11 и 7 млн. галлонов. Бензин транспортируется в бензохранилища по трубопроводу. Стоимость перекачки бензина на 2 км составляет 5 д.е. за 100 галлонов. Завод 1 не связан с хранилищем 3. Расстояние от заводов до бензохранилищ следующее:

№ завода	Бензохранилища		
	1	2	3
1	100	150	-
2	420	180	60
3	200	280	120

Сформулируйте соответствующую транспортную задачу и определите минимум транспортных затрат.

3.12 Автомобили перевозятся на трайлерах из трех центров распределения пяти продавцам. Стоимость перевозки в расчете на 1 км пути, пройденного трайлером, равна 60 д.е. Один трайлер может перевозить 15 автомобилей. Стоимость перевозок не зависит от того, насколько полно загружается трайлер. В приведенной ниже таблице указаны расстояния между центрами распределения и продавцами, а также величины, характеризующие ежемесячный спрос и объемы поставок, исчисляемые количеством автомобилей:

Центр распределения	Продавцы					Объем поставок, шт.
	1	2	3	4	5	
1	80	120	180	150	50	300
2	60	70	50	65	90	350
3	30	80	120	140	90	120
Спрос на автомобили, шт.	110	250	140	150	120	770

Определите минимальные затраты на доставку автомобилей.

3.13 Решите задачу распределения станков четырех различных типов по шести типам работ. Пусть имеются 30, 45, 25 и 20 станков соответствующих типов. Шесть типов работ характеризуются 30, 20, 10, 40, 10 и 10 операциями соответственно. На станке 3 не может выполняться операция 6. Исходя из коэффициентов стоимости операции, представленных в следующей таблице, постройте модель и выполните оптимальное распределение станков по работам:

Тип станков	Тип работы					
	1	2	3	4	5	6
1	10	1	3	7	14	8
2	4	8	12	2	10	7
3	12	3	14	6	2	-
4	11	12	9	3	1	3

3.14 В данной транспортной задаче суммарный спрос превосходит суммарный объем производства. Пусть штрафы за недопоставку единицы продукции в пункты назначения 1, 2 и 3 равны соответственно 5, 3 и 2.

Исходные данные следующие:

Заводы	Потребители			Объем производства, шт.
	1	2	3	
A_1	3	2	4	50
A_2	5	4	5	75
A_3	1	6	7	30
Потребность, шт.	60	40	70	

Найдите оптимальное решение.

3.15 На складах А, В, С находится сортовое зерно 100, 150, 250 т, которое нужно доставить в четыре пункта. Пункту 1 необходимо поставить 50 т, пункту 2 – 100, пункту 3 – 200, пункту 4 – 150 т сортового зерна. Стоимость доставки 1 т зерна со склада А в указанные пункты соответственно равна (д.е.) 80, 30, 50, 20; со склада В – 40, 10, 60, 70; со склада С -10, 90, 40, 30.

Составьте оптимальный план перевозки зерна из условия минимума стоимости перевозки.

Раздел 2.ТЕОРИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

Практическая работа 4. Решение матричных игр в чистых и смешанных стратегиях

Вопросы для самопроверки

1. Дать понятия игры, стратегии игрока.
2. Что называется верхней и нижней ценой игры?
3. Что называется ценой игры?
4. Что значит решить матричную игру в чистых стратегиях?
5. Что значит решить матричную игру в смешанных стратегиях?
6. Как привести матричную игру к задаче линейного программирования?
7. Поясните основные принципы приведения матричной игры к задаче линейного программирования.
8. Поясните основные приемы упрощения игр.
9. Дайте пояснения геометрической интерпретации игры 2*2.

Демонстрационный пример

Пример 1. Решить в чистых стратегиях матричную игру, заданную платежной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение: Найдем нижнюю (α) и верхнюю (β) чистые цены игры.

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	9	5	6	7	5
A_2	1	4	3	8	1
A_3	6	3	2	-4	-4
β_j	9	5	6	8	5/ 5

Как видно из таблицы, $\alpha = \beta = 5$.

Таким образом, седловой точкой является пара стратегий (A_1, B_2), а седловой элемент – $a_{12} = 5$. Чистая цена игры равна $v = 5$. Итак, игра решена в чистых стратегиях.

A_1 является оптимальной стратегией для игрока А, и любое отклонение от этой стратегии приведет к уменьшению его выигрыша, если игрок В использует свою оптимальную стратегию B_2.

Аналогично, всякое отклонение игрока В от стратегии B_2 приведет к увеличению его проигрыша, если игрок А использует стратегию A_1.

Пример 2. Решить в смешанных стратегиях матричную игру, заданную матрицей $\begin{pmatrix} 50 & 15 & 20 \\ 25 & 40 & 30 \\ 10 & 30 & 60 \end{pmatrix}$.

Решение.

Зачастую ни одна из чистых стратегий не является выигрышной в 100% случаев. В этом случае решение в чистых стратегиях невозможно и оптимальное решение получается чередованием чистых стратегий. Положим p_i – вероятность выигрыша игрока А, в случае применения *i*-ой стратегии, q_j – вероятность проигрыша игрока В, в случае применения *j*-ой стратегии.

1. Составляем задачу линейного программирования для определения оптимальной смешанной стратегии игрока А.

Система ограничений $\begin{cases} 50p_1 + 25p_2 + 10p_3 \geq v, \\ 15p_1 + 40p_2 + 30p_3 \geq v, \\ 20p_1 + 30p_2 + 60p_3 \geq v, \\ p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0, \end{cases}$

где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Для решения задачи сделаем замену: $\frac{p_1}{v} = x_1, \frac{p_2}{v} = x_2, \frac{p_3}{v} = x_3$. Тогда система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} 50x_1 + 25x_2 + 10x_3 \geq 1, \\ 15x_1 + 40x_2 + 30x_3 \geq 1, \\ 20x_1 + 30x_2 + 60x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \qquad (5.1)$$

где $x_1 + x_2 + x_3 = 1/v$. Так как игрок А стремится максимизировать свой выигрыш v, то это эквивалентно минимизации величины $1/v$. Задача нахождения оптимальной смешанной стратегии игрока, сводится к следующей задаче линейного программирования: при ограничениях (5.1) найти минимальное значение функции $F_1 = x_1 + x_2 + x_3$.

2. Составляем задачу линейного программирования для определения оптимальной смешанной стратегии игрока В.

Система ограничений: $\begin{cases} 50q_1 + 15q_2 + 20q_3 \leq v, \\ 25q_1 + 40q_2 + 30q_3 \leq v, \\ 10q_1 + 30q_2 + 60q_3 \leq v, \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0, \end{cases}$

где $q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

Для решения задачи сделаем замену: $\frac{q_1}{v} = y_1, \frac{q_2}{v} = y_2, \frac{q_3}{v} = y_3$. Тогда система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} 50y_1 + 15y_2 + 20y_3 \leq 1, \\ 25y_1 + 40y_2 + 30y_3 \leq 1, \\ 10y_1 + 30y_2 + 60y_3 \leq 1, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{cases} \qquad (5.2)$$

где $y_1 + y_2 + y_3 = 1/v$. Аналогично, так как игрок В стремится минимизировать свой проигрыш, то задача нахождения оптимальной стратегии игрока сводится к следующей задаче линейного программирования: при ограничениях (5.2) найти максимальное значение функции $F_2 = y_1 + y_2 + y_3$.

Полученные задачи линейного программирования являются двойственными. Поэтому решим одну из них симплексным методом, а решение второй задачи получим, используя теоремы двойственности. Удобнее начать решение симплексным методом с задачи линейного программирования для определения оптимальной смешанной стратегии игрока В.

Решая эту задачу симплексным методом, находим ее оптимальный план: $x_1^* = 0{,}0102$, $x_2^* = 0{,}0180$, $x_3^* = 0{,}0043$ и $F_1 = 0{,}0325$,а затем цену игры $v = \frac{1}{F_1} = 30{,}77$ и компоненты оптимальной смешанной стратегии по обратным формулам: $p_1 = x_1 \cdot v,\ p_2 = x_2 \cdot v,\ p_3 = x_3 \cdot v$. Получаем $p_1^* = 0{,}314$, $p_2^* = 0{,}554$, $p_3^* = 0{,}132$.

Затем, с помощью теорем двойственности, находим оптимальный план для первого игрока: $y_1^*=0{,}0133$, $y_2^*=0{,}0094$, $y_3^*=0{,}0098$,а затем компоненты оптимальной смешанной стратегии $q_1^* = 0{,}409$, $q_2^* = 0{,}289$, $q_3^* = 0.302$.

Задания для решения

4.1 Игрок *А* записывает одно из двух чисел: 1 или 2, игрок *В* – одно из трех чисел 1, 2 или 3. Если оба числа одинаковой четности, то выигрывает игрок А, и выигрыш равен сумме этих чисел. Если четности выбранных игроками чисел не совпадают, то *В* выигрывает, выигрыш равен сумме этих чисел. Построить платежную матрицу игры и решить задачу в чистых или смешанных стратегиях.

Решить задачи в чистых и смешанных стратегиях, путем сведения их к задаче ЛП (4.2-4.37).

4.2 $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.9 & 0.4 & 0.2 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$, **4.3** $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, **4.4** $\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

4.5 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **4.6** $\begin{bmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ **4.7** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.8 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **4.9** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ **4.10** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 10 \end{bmatrix}$

4.11 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **4.12** $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ **4.13** $\begin{bmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

4.14 $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ **4.15** $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ **4.16** $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

4.17 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ **4.18** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ **4.19** $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

4.20 $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ **4.21** $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \end{bmatrix}$ **4.22** $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

4.23 $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ **4.24** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ **4.25** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

4.26 $\begin{bmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **4.27** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1.5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$ **4.28** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

4.29 $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ **4.30** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **4.31** $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

4.32 $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ **4.33** $\begin{bmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 & -3 \\ 7 & 6 & 8 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ **4.34** $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

4.35 $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 9 & 8 & 4 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ **4.36** $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ **4.37** $\begin{bmatrix} -5 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

4.38 Пусть задана следующая игра с участием двух игроков. Первый игрок загадывает любое целое число от 1 до 3. Второй игрок должен отгадать это число. Если второй игрок указывает число правильно, он получает выигрыш, равный значению этого числа. В противном случае этот выигрыш получает первый игрок.
Определите число стратегий игроков и составьте платежную матрицу задачи.

Определите нижнюю и верхнюю цену игры. Установите, существует ли в данной игре решение в чистых стратегиях.

Практическая работа 5. Критерии принятия решений в условиях неопределенности

Вопросы для самопроверки

1. В чем отличие задачи принятия решений в условиях неопределенности от матричных игр?
2. Какие критерии для решения задач в условиях неопределенности Вы знаете?
3. Какие из этих критериев пессимистические, какие оптимистические?

Демонстрационный пример

Фермер имеет возможность посеять одну из трех культур A_1 , A_2 , A_3, урожайность которых, а значит и доход фермера, зависит от условий погоды B_1 (лето сухое), B_2 (лето нормальное) и B_3 (лето дождливое). Матрица доходов фермера имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 50 & 15 & 20 \\ 25 & 40 & 30 \\ 10 & 30 & 60 \end{pmatrix}.$$

Требуется дать рекомендации на посев, используя критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Севиджа и Гурвица, если известны распределения вероятностей доходов фермера в зависимости от условий погоды : $q_1 = 0,3$, $q_2 = 0,5$, $q_3 = 0,3$, а также показатель оптимизма $\lambda = 0,8$.

Решение.

1. Критерий Байеса. Оптимальное решение вычисляется по формуле: $\max\limits_i (v_i)$, где $v_i = a_{i1} p_1 + a_{i2} p_2 + ... + a_{in} p_n$

Средние выигрыши фермера по критерию Байеса составляют следующие суммы:

$v_1 = 50 \cdot 0.3 + 15 \cdot 0.5 + 20 \cdot 0.2 = 26.5$;

$v_2 = 25 \cdot 0.3 + 40 \cdot 0.5 + 30 \cdot 0.2 = 33.5$;

$v_3 = 10 \cdot 0.3 + 30 \cdot 0.5 + 60 \cdot 0.2 = 30$.

Таким образом, максимальный выигрыш составляет 33.5 ден.ед., что соответствует стратегии A_2.

2. Критерий Лапласа. В этом случае оптимальное решение вычисляется по формуле $\max\limits_i \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \right)$.

Средние выигрыши фермера по критерию Лапласа составляют следующие суммы:

$v_1 = \frac{1}{3}(50 + 15 + 20) = 28\frac{1}{3}$;

$v_2 = \frac{1}{3}(25 + 40 + 30) = 31\frac{2}{3}$;

$v_3 = \frac{1}{3}(10 + 30 + 60) = 33\frac{1}{3}$.

Таким образом, максимальный выигрыш составляет 33,3 д.е., что соответствует стратегии A_3.

3. Критерий Вальда. В этом случае оптимальное решение вычисляется по формуле $\max\limits_i \left(\min\limits_j a_{ij} \right)$

			min
50	15	20	15
25	40	30	25
10	30	60	10

Средние выигрыши фермера по критерию Вальда составляют следующие суммы:

$v_1 = 15$;

$v_2 = 25$;

$v_3 = 10$.

Таким образом, максимальный выигрыш составляет 25 д.е., что соответствует стратегии A_2.

4. Критерий Сэвиджа. В этом случае оптимальное решение вычисляется по формуле $\max\limits_i \left(\min\limits_j r_{ij} \right)$, где r_{ij} матрица рисков.

Таким образом, для решения задачи с помощью критерия Сэвиджа необходимо составить матрицу рисков $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$. Для этого в матрице доходов находим максимальное значение в столбце и из него вычитаем элементы соответствующего столбца в матрице доходов.

	50	15	20
	25	40	30
	10	30	60

max	50	40	60

В полученной матрице рисков находим максимальный элемент в каждой строке, а из них выбираем минимальный.

			max
0	25	40	40
25	0	30	30
40	10	0	40

В результате получаем, что оптимальным решением по критерию Сэвиджа является стратегия A_2.

5. Критерий Гурвица. Оптимальному решению по этому критерию соответствует $\max_i \left\{ \lambda \max_j a_{ij} + (1-\lambda) \min_j a_{ij} \right\}$,

Суммы выигрышей игрока по критерию Гурвица следующие:

$v_1 = 0.2 \cdot 50 + 0.8 \cdot 15 = 22$;

$v_2 = 0.2 \cdot 40 + 0.8 \cdot 25 = 28$;

$v_3 = 0.2 \cdot 60 + 0.8 \cdot 10 = 20$.

Итак, наибольшая сумма составляет 28 д.е. и соответствует стратегии A_2.

Вывод. Рекомендовать для посева культуру A_2.

Задания для решения

5.1 Компания «Буренка» изучает возможность производства и сбыта навесов для хранения кормов. Этот проект может быть реализован на большой или малой производственной базе. Рынок для реализации продукта навесов может быть благоприятным или неблагоприятным.

Василий Бычков – менеджер компании, учитывает возможность, что компании вообще не выгодно производить навесы. При благоприятной рыночной ситуации большое производство позволило бы компании получить прибыль 200 тыс. руб. Если рынок окажется неблагоприятным, то при большом производстве она понесет убытки в размере 180 тыс. руб. Малое производство дает 100 тыс. руб. прибыли при благоприятной рыночной ситуации и 20 тыс. руб. убытков – при неблагоприятной.

Нужно помочь Бычкову решить, какое из трех возможных решений следует принять: создать большую или малую производственную базу или не заниматься производством навесов.

5.2 Сельскохозяйственное предприятие производит капусту. Оно имеет возможность хранить произведённую капусту в течение всего сезона реализации - с осени до начала лета следующего года. Хозяйство может выбрать одну из трёх стратегических программ реализации капусты в течение сезона реализации:

А1 - реализовать всю капусту осенью, непосредственно после уборки;

А2 - заложить часть капусты на хранение и реализовать её в течение осенних и зимних месяцев;

А3 - заложить всю капусту на хранение и реализовать её в весенние месяцы.

Сумма затрат на производство, хранение и реализацию капусты для хозяйства при выборе им каждой из стратегий составляет соответственно 20, 30 и 40 тыс. денежных единиц.

На региональном рынке капусты может сложиться одна из следующих трёх ситуаций:

S1 - поступление капусты на рынок происходит равномерно в течение всего сезона реализации и рынок не испытывает сезонных колебаний цен реализации продукта;

S2 - в осенние месяцы на рынок поступает капусты немного больше, чем зимой и весной. В связи с этим наблюдаются небольшие сезонные колебания цен - в начале зимы цены немного возрастают по сравнению с осенним уровнем и держатся стабильными в течение всех последующих месяцев сезона реализации;

S3 - в осенние месяцы на рынок поступает капусты значительно больше, чем зимой и весной. Объёмы капусты, поступающей в течение сезона реализации, постоянно уменьшаются. Поэтому рынок испытывает значительные сезонные колебания цен.

Значения суммы выручки предприятия от реализации капусты при выборе каждой из стратегий реализации и формировании различных ситуаций на рынке представлены в таблице.

Стратегии хозяйства	Выручка от реализации капусты, тыс. д.е.		
	81	82	83
А1	30	25	22
А2	30	40	33
А3	30	40	60

В задаче необходимо определить:

1. Какая стратегия хозяйства является наиболее выгодной, если известны значения вероятностей состояний рынка капусты региона: 0,3, 0,6 и 0,1 соответственно;
2. Какая стратегия хозяйства является наиболее выгодной, если информация о вероятностях состояний рынка капусты отсутствует и предприятию необходимо:

   а) получить минимально гарантированный выигрыш;

   б) учесть значения риска от принятия различных решений;

   в) определить наиболее выгодную стратегию, если коэффициент пессимизма равен 0,3;
3. Определить наиболее выгодную стратегию, если информация о вероятностях состояний рынка не является вполне достоверной и параметр достоверности информации равен 0,7;

4. Дать экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

5.3 Сельскохозяйственное предприятие производит картофель. Посевная площадь картофеля составляет 100 га. Хозяйство имеет договор с магазином, который гарантированно закупит весь произведённый картофель по цене 4+0,1*N (N - номер варианта, указанный преподавателем) д.е. за 1 кг. При выращивании картофеля хозяйство может принять одно из трёх решений, различающихся по сумме затрат на производство продукции:

А1. Провести комплексную обработку растений для предотвращения поражения сорняками, вредителями и болезнями (затраты - 6 млн. д.е.).

А2. Провести частичную обработку растений (затраты - 4 млн. д.е.).

А3. Не проводить обработку растений (затраты - 2.5 млн. д.е.).

В зависимости от погодных условий, наличия и развития сорняков, вредителей и болезней возможны следующие ситуации:

S1. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней неблагоприятные.

S2. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней обычные.

S3. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней благоприятные.

Значения урожайности картофеля в зависимости от решений сельскохозяйственного предприятия и развития сорняков, вредителей и болезней приведены в таблице.

Урожайность картофеля в сельскохозяйственном предприятии, ц/га

Стратегии хозяйства	Развитие сорняков, вредителей и болезней		
	81	82	83
А1	250+N	250+N	250+N
А2	250+N/2	200	150-N/2
А3	250	100	50-N

Определите наиболее выгодные стратегии по всем критериям. Вероятности состояний S1, S2 иS3 составляют соответственно 0,1, 0,5 и 0,4. Коэффициент пессимизма - 0,39+N/50. Параметр достоверности для определения оптимальной стратегии по критерию Ходжа-Лемана-0,9-N/100.

Дайте экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

5.4– 5.28

Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 (тепловых), A_2 (приплотинных), A_3 (бесшлюзовых), A_4 (шлюзовых). Состояния природы обозначим через P_1, P_2, P_3, P_4. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояния природы и задана матрицей. Дать рекомендации какую электростанцию строить, используя следующие критерии оптимальности: а) критерий Лапласа; б) критерий Вальда; в) критерий

Севиджа; г) критерий Гурвица с коэффициентом пессимизма λ; д) критерий Байеса.

5.4 $\grave{A}=\begin{bmatrix} 10 & 15 & 4 & 16 \\ 12 & 18 & 5 & 22 \\ 14 & 12 & 18 & 11 \\ 6 & 21 & 17 & 8 \end{bmatrix};$

λ=0,1; P=(0,3; 0,1; 0,2; 0,4)

5.6 $\grave{A}=\begin{bmatrix} 11 & 14 & 5 & 15 \\ 13 & 17 & 6 & 19 \\ 5 & 11 & 19 & 20 \\ 7 & 20 & 18 & 7 \end{bmatrix};$

λ=0,2; P=(0,1; 0,2; 0,3; 0,4)

5.8 $A=\begin{bmatrix} 17 & 12 & 13 & 16 \\ 12 & 17 & 14 & 18 \\ 19 & 14 & 27 & 10 \\ 15 & 22 & 20 & 11 \end{bmatrix};$

λ=0,5; P=(0,2; 0,1; 0,2; 0,5)

5.9 $A=\begin{bmatrix} 21 & 32 & 23 & 36 \\ 27 & 30 & 24 & 24 \\ 22 & 14 & 28 & 20 \\ 15 & 23 & 28 & 29 \end{bmatrix};$

λ=0,6; P=(0,2; 0,2; 0,3; 0,3)

5.10 $A=\begin{bmatrix} 24 & 30 & 21 & 23 \\ 29 & 32 & 20 & 21 \\ 21 & 19 & 29 & 25 \\ 19 & 29 & 29 & 27 \end{bmatrix};$

λ=0,7; P=(0,2; 0,3; 0,3; 0,2)

5.12 $A=\begin{bmatrix} 20 & 32 & 28 & 26 \\ 24 & 38 & 21 & 22 \\ 24 & 19 & 29 & 22 \\ 19 & 26 & 29 & 29 \end{bmatrix};$

5.5 $\grave{A}=\begin{bmatrix} 15 & 14 & 11 & 18 \\ 10 & 19 & 12 & 20 \\ 17 & 16 & 29 & 8 \\ 13 & 26 & 18 & 12 \end{bmatrix};$

λ=0,3; P=(0,1; 0,3; 0,4; 0,2)

5.7 $\grave{A}=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 8 & 3 \\ 14 & 2 & 18 & 11 \\ 6 & 7 & 2 & 5 \end{bmatrix};$

λ=0,4; P=(0,2; 0,4; 0,1; 0,3)

λ=0,8; P=(0,3; 0,1; 0,2; 0,4)

5.14 $A=\begin{bmatrix} 26 & 34 & 22 & 23 \\ 21 & 39 & 20 & 24 \\ 21 & 23 & 28 & 27 \\ 18 & 28 & 28 & 26 \end{bmatrix};$

λ=0,9; P=(0,3; 0,2; 0,3; 0,2)

5.16 $A=\begin{bmatrix} 36 & 42 & 38 & 33 \\ 31 & 44 & 30 & 37 \\ 32 & 43 & 36 & 34 \\ 38 & 35 & 35 & 36 \end{bmatrix};$

λ=0,15; P=(0,3; 0,3; 0,3; 0,1)

5.18 $A=\begin{bmatrix} 9 & 11 & 8 & 4 \\ 7 & 12 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix};$

λ=0,2;P=(0,25;0,25;0,25; 0,25)

5.20 $A=\begin{bmatrix} 13 & 12 & 14 & 9 \\ 9 & 15 & 12 & 7 \\ 11 & 13 & 12 & 11 \\ 15 & 8 & 16 & 6 \end{bmatrix}$;

λ=0,25; P=(0,3;0,25; 0,3; 0,15)

5.11 $A=\begin{bmatrix} 10 & 15 & 25 & 30 \\ 15 & 10 & 20 & 35 \\ 10 & 20 & 20 & 25 \\ 15 & 10 & 30 & 20 \end{bmatrix}$;

λ=0,3; P=(0,2; 0,3; 0,2; 0,3)

5.13 $A=\begin{bmatrix} 14 & 11 & 29 & 26 \\ 19 & 8 & 24 & 31 \\ 14 & 16 & 24 & 21 \\ 20 & 7 & 34 & 16 \end{bmatrix}$;

λ=0,35; P=(0,25;0,2; 0,3; 0,25)

5.15 $A=\begin{bmatrix} 10 & 7 & 22 & 20 \\ 15 & 6 & 18 & 25 \\ 11 & 12 & 19 & 16 \\ 16 & 5 & 25 & 11 \end{bmatrix}$;

λ=0,4; P=(0,2; 0,4; 0,25; 0,15)

5.17 $A=\begin{bmatrix} 17 & 14 & 21 & 26 \\ 15 & 16 & 18 & 29 \\ 19 & 12 & 27 & 19 \\ 16 & 15 & 25 & 18 \end{bmatrix}$;

λ=0,45; P=(0,3; 0,1; 0,3; 0,3)

5.19 $A=\begin{bmatrix} 11 & 4 & 21 & 6 \\ 5 & 16 & 8 & 29 \\ 19 & 2 & 27 & 5 \\ 6 & 15 & 5 & 18 \end{bmatrix}$;

λ=0,5; P=(0,3; 0,2; 0,4; 0,1)

5.21 $A=\begin{bmatrix} 4 & 14 & 2 & 16 \\ 15 & 6 & 18 & 9 \\ 9 & 12 & 7 & 15 \\ 16 & 5 & 15 & 8 \end{bmatrix}$;

λ=0,55; P=(0,3; 0,2; 0,1; 0,4)

5.22 $A=\begin{bmatrix} 14 & 24 & 12 & 26 \\ 25 & 16 & 28 & 19 \\ 19 & 22 & 17 & 25 \\ 26 & 15 & 25 & 18 \end{bmatrix}$;

λ=0,6; P=(0,25; 0,3; 0,15; 0,3)

5.24 $A=\begin{bmatrix} 11 & 21 & 9 & 23 \\ 22 & 13 & 25 & 16 \\ 16 & 19 & 14 & 22 \\ 23 & 12 & 22 & 15 \end{bmatrix}$;

λ=0,65; P=(0,15; 0,25;0,2; 0,4)

5.26 $A=\begin{bmatrix} 7 & 17 & 5 & 19 \\ 18 & 9 & 21 & 12 \\ 12 & 15 & 10 & 18 \\ 19 & 8 & 18 & 13 \end{bmatrix}$;

λ=0,7; P=(0,2; 0,28; 0,22; 0,3)

5.28 $A=\begin{bmatrix} 12 & 22 & 10 & 24 \\ 16 & 7 & 19 & 10 \\ 16 & 19 & 14 & 22 \\ 16 & 15 & 15 & 10 \end{bmatrix}$;

λ=0,75; P=(0,4; 0,1; 0,1; 0,4)

5.23 $A=\begin{bmatrix} 6 & 11 & 5 & 12 \\ 8 & 4 & 10 & 5 \\ 8 & 10 & 7 & 11 \\ 8 & 8 & 8 & 5 \end{bmatrix}$;

λ=0,8; P=(0,1; 0,2; 0,3; 0,4)

5.25 $A=\begin{bmatrix} 9 & 14 & 8 & 15 \\ 11 & 7 & 13 & 8 \\ 11 & 13 & 10 & 14 \\ 11 & 12 & 12 & 8 \end{bmatrix}$**;**

λ=0,85; P=(0,2; 0,3; 0,4; 0,1)

5.27 $A=\begin{bmatrix} 11 & 15 & 11 & 15 \\ 12 & 10 & 13 & 12 \\ 13 & 12 & 12 & 14 \\ 14 & 12 & 12 & 11 \end{bmatrix}$**;**

λ=0,9; P=(0,3; 0,2; 0,4; 0,1)

РАЗДЕЛ 3. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Практическая работа 6. Задача о распределении средств между предприятиями

Вопросы для самопроверки

1. Как формулируется принцип оптимальности Беллмана?
2. К каким задачам применяется динамическое программирование?
3. Приведите общую постановку задачи динамического программирования.
4. Приведите математическую модель задачи распределения средств между предприятиями.
5. Приведите математическую модель задачи об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на n лет.

Демонстрационный пример

Требуется решить задачу распределения инвестиций между предприятиями с помощью метода динамического программирования. В таблице 6.1 указано количество предприятий, максимальный объем инвестиций и доход при вложении инвестиций в предприятия. Количество предприятий - 6. Объем инвестиций – 6

Таблица 6.1

Инвестиции	Предприятие					
	1	2	3	4	5	6
1	14	9	11	5	5	8
2	17	12	17	12	11	14
3	22	17	22	20	18	21
4	29	20	25	25	23	27
5	34	25	33	29	30	31
6	37	29	39	37	35	36

На каждом этапе решения задачи необходимо оптимально распределить любой возможный объем инвестиций сначала по одному, затем по двум и т.д. предприятиям. Такой подход позволяет на заключительном этапе получить максимальную прибыль от инвестиций.

Решение.

На первом этапе необходимо инвестировать все средства в первое предприятие. Поэтому заполнена лишь диагональ матрицы (таблица 6.2). В последнем столбце записана максимальная прибыль при инвестировании общего объема средств.

Таблица 6.2

Общий объем инвестиций	Инвестиции в предприятие 1							
	0	1	2	3	4	5	6	Максимальный доход
0	0							0
1		14						14
2			17					17
3				22				22
4					29			29
5						34		34
6							37	37

<u>На втором этапе</u> необходимо инвестировать средства в предприятия 1,2 (таблица 6.3). В матрице заполнена только нижняя часть. В каждой ячейке находится сумма двух чисел: первое число – доход при инвестиции в предприятие 2, а второе число – максимальный доход при инвестициях в 1 предприятие (берется из таблицы 6.2). В последнем столбце записана максимальная прибыль по строчке.

Таблица 6.3

Общий объем инвестиций	Инвестиции в предприятие 2							
	0	1	2	3	4	5	6	Максимальный доход
0	0+0=0							0
1	0+14=14	9+0=9						14
2	0+17=17	9+14=23	12+0=12					23
3	0+22=22	9+17=26	12+14=26	17+0=17				26
4	0+29=29	9+22=31	12+17=29	17+14=31	20+0=20			31
5	0+34=34	9+29=38	12+22=34	17+17=34	20+14=34	25+0=25		38
6	0+37=37	9+34=43	12+29=41	17+22=39	20+17=37	25+14=39	29+0	43

<u>На третьем этапе</u> необходимо инвестировать средства в предприятия 1,2,3 (таблица 6.4). В матрице заполнена только нижняя часть. В каждой ячейке находится сумма двух чисел: первое число – доход при инвестиции в предприятие 3, а второе число – максимальный доход при инвестициях в 2 предприятия (берется из таблицы 6.3). В последнем столбце записана максимальная прибыль по строчке.

Таблица 6.4

Общий объем инвестиций	Инвестиции в предприятие 3							
	0	1	2	3	4	5	6	Максимальный доход
0	0+0=0							0
1	0+14=14	11+0=11						14
2	0+23=23	11+14=25	17+0=17					25
3	0+26=26	11+23=34	17+14=31	22+0=22				34
4	0+31=31	11+26=37	17+23=40	22+14=36	25+0=25			40
5	0+38=38	11+31=42	17+26=43	22+23=45	25+14=39	33+0=33		45
6	0+43=43	11+38=49	17+31=48	22+26=48	25+23=48	33+14=47	39+0=39	49

<u>На четвертом этапе</u> необходимо инвестировать средства в предприятия 1,2,3,4 (таблица 6.5). В матрице заполнена только нижняя часть. В каждой ячейке находится сумма двух чисел: первое число – доход при инвестиции в предприятие 4, а второе число – максимальный доход при инвестициях в 3 предприятия (берется из таблицы 6.4). В последнем столбце записана максимальная прибыль по строчке.

Таблица 6.5

Общий объем инвестиций	Инвестиции в предприятие 4							
	0	1	2	3	4	5	6	Максимальный доход
0	0+0=0							0
1	0+14=14	5+0=5						14
2	0+25=25	5+14=19	12+0=12					25
3	0+34=34	5+25=30	12+14=26	20+0=20				34
4	0+40=40	5+34=39	12+25=37	20+14=34	25+0=25			40
5	0+45=45	5+40=45	12+34=46	20+25=45	25+14=39	29+0=29		46
6	0+49=49	5+45=50	12+40=52	20+34=54	25+25=50	29+14=43	37+0=37	54

<u>На пятом этапе</u> необходимо инвестировать средства в предприятия 1,2,3,4,5 (таблица 6.6). В матрице заполнена только нижняя часть. В каждой ячейке находится сумма двух чисел: первое число – доход при инвестиции в предприятие 5, а второе число – максимальный доход при инвестициях в 4 предприятия (берется из таблицы 6.5). В последнем столбце записана максимальная прибыль по строчке.

Таблица68.6

Общий объем инвестиций	Инвестиции в предприятии 5							
	0	1	2	3	4	5	6	Максимальный доход
0	0+0=0							0
1	0+14=14	5+0=5						14
2	0+25=25	5+14=19	11+0=11					25
3	0+34=34	5+25=30	11+14=25	18+0=18				34
4	0+40=40	5+34=39	11+25=36	18+14=32	23+0=23			40
5	0+46=46	5+40=45	11+34=45	18+25=43	23+14=37	30+0=30		46
6	0+54=54	5+46=51	11+40=51	18+34=52	23+25=48	30+14=44	35+0=35	54

<u>На шестом этапе</u> необходимо инвестировать средства в предприятия 1,2,3,4,5,6 (таблица 6.7). В матрице заполнена только нижняя часть. В каждой ячейке находится сумма двух чисел: первое число – доход при инвестиции в предприятие 6, а второе число – максимальный доход при инвестициях в 5 предприятия (берется из таблицы 6.6). В последнем столбце записана максимальная прибыль по строчке.

Таблица 6.7

Общий объем инвестиций	Инвестиции в предприятии 6							
	0	1	2	3	4	5	6	Максимальный доход
0	0+0=0							0
1	0+14=14	8+0=8						14
2	0+25=25	8+14=22	14+0=14					25
3	0+34=34	8+25=33	14+14=28	21+0=21				34
4	0+40=40	8+34=42	14+25=39	21+14=35	27+0=27			42
5	0+46=46	8+40=48	14+34=48	21+25=46	27+14=41	31+0=31		48
6	0+54=54	8+46=54	14+40=54	21+34=55	27+25=52	31+14=45	36+0=36	55

Последняя таблица 6.7 показывает максимальный доход при инвестиции во все предприятия. Последняя строка показывает доход при инвестиции всей суммы в 6. В данном случае максимальный доход – 55.
Найдем объем инвестиций в каждое предприятие.

Последняя таблица 6.7 показывает, что указанный доход получен при инвестиции в предприятие 6 3 млн.руб (столбец 3). В предприятия 1,2,3,4,5 остается инвестировать 6-3=3 млн. руб.

Из таблицы 6.6 находим строку 3 (так как осталось всего 3 млн. руб.). В этой строке оптимальный доход 34 млн.руб. В предприятие 5 необходимо инвестировать 0 млн.руб. (столбец 0). В предприятия 1,2,3,4 остается инвестировать 3-0=3 млн. руб.

Из таблицы 6.5 находим строку 3 (так как осталось всего 3 млн. руб.). В этой строке оптимальный доход 34 млн.руб. В предприятие 4 необходимо инвестировать 0 млн.руб. (столбец 0). В предприятия 1,2,3 остается инвестировать 3-0=3 млн. руб.

Из таблицы 6.4 опять находим строку 3. В этой строке оптимальный доход 34 млн.руб. В предприятие 3 необходимо инвестировать 1 млн.руб. (столбец 1). В предприятия 1,2 остается инвестировать 3-1=2 млн. руб.

Из таблицы 6.3 находим строку 2 (так как инвестиций осталось всего 2 млн. руб.). В этой строке оптимальный доход 23 млн.руб. В предприятие 2 необходимо инвестировать 1 млн.руб. (столбец 1). В предприятие 1 остается инвестировать 2-1=1 млн. руб.

Из таблицы 6.2 находим строку 1 (так как инвестиций осталось всего 1 млн. руб.). В этой строке оптимальный доход 14 млн.руб. В предприятие 1 действительно необходимо инвестировать 1 млн.руб. (столбец 1).

Задания для решения

6.1 Требуется решить задачу распределения инвестиций между предприятиями с помощью метода динамического программирования. В таблице указано количество предприятий, максимальный объем инвестиций и доход при вложении инвестиций в предприятия. Количество предприятий - 5. Объем инвестиций - 7 млн. руб.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f_1(x)$	10	13	20	25	30	35	41
$f_2(x)$	9	12	17	20	26	29	36
$f_3(x)$	11	17	22	24	33	35	40
$f_4(x)$	8	12	18	23	27	33	42
$f_5(x)$	5	11	17	23	32	38	44

6.2 Требуется решить задачу распределения инвестиций между предприятиями с помощью метода динамического программирования. В таблице указано количество предприятий, максимальный объем инвестиций и доход при вложении инвестиций в предприятия. Количество предприятий - 5. Объем инвестиций - 6 млн.руб.

x	1	2	3	4	5	6

$f_1(x)$	0,2	0,9	1,0	1,2	2,0	3
$f_2(x)$	1,0	1,1	1,3	1,6	2,9	4,4
$f_3(x)$	2,1	2,5	2,9	3,9	4,5	5,2
$f_4(x)$	0,8	1,3	2,2	2,9	3,0	4,0
$f_5(x)$	0,4	1,7	1,5	2,0	3,1	4,2

6.3

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	2,4	3,5	4	5,1	5,7
$g_2(x)$	2,0	3,0	4,1	5,3	6,0
$g_3(x)$	3,1	3,4	4,4	6,0	6,2

6.4

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	1,0	1,5	3,5	4,0	5,1
$g_2(x)$	0,8	1,4	2,0	3,6	4,9
$g_3(x)$	0,3	1,0	2,3	2,9	4,1

6.5

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	3,2	3,4	4,0	4,5	5,3
$g_2(x)$	3,5	4,0	4,6	5,0	5,9
$g_3(x)$	4,3	4,5	5,1	6,0	6,8

6.6

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	2,0	2,4	3,0	3,6	4,4
$g_2(x)$	1,5	2,0	2,8	4,0	5,1
$g_3(x)$	2,3	2,8	3,4	4,8	5,6

6.7

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	4,4	4,6	4,8	4,9	5,2
$g_2(x)$	4,6	4,8	5,3	5,8	6,3
$g_3(x)$	4,0	4,5	5,1	6,0	6,6

6.8

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	4,1	4,8	5,7	6,3	7,9
$g_2(x)$	3,2	3,9	5,0	7,0	8,8
$g_3(x)$	4,0	6,0	6,8	9,0	11,0

6.9

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	2,1	4,2	6,0	8,2	9,8
$g_2(x)$	1,8	3,5	5,0	6,6	8,0
$g_3(x)$	4,0	5,0	5,7	7,3	10,0

6.10

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	2,0	2,2	3,0	3,4	4,0
$g_2(x)$	3,0	3,1	4,0	4,4	5,0
$g_3(x)$	3,1	4,0	4,7	5,0	6,0

6.11

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0,2	0,6	1,6	2,4	4,4
$g_2(x)$	1,0	1,8	2,0	3,0	5,0
$g_3(x)$	1,3	2,4	3,4	4,0	5,4

6.12

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	1,0	2,3	3,4	3,5	4,3
$g_2(x)$	2,0	3,0	4,5	4,9	5,1
$g_3(x)$	3,1	3,5	4,0	4,6	5,5

6.13

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	3,6	4,0	4,6	5,0	7,4
$g_2(x)$	2,5	3,0	3,7	4,8	6,7
$g_3(x)$	3,4	3,5	4,8	5,7	7,8

6.14

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0,5	1,2	1,7	2,0	2,9
$g_2(x)$	0,9	1,0	1,5	1,8	3,0
$g_3(x)$	1,5	1,8	2,5	2,9	3,5

6.15

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	3,3	3,8	4,5	5,0	5,3
$g_2(x)$	3,6	3,9	4,2	5,8	6,3
$g_3(x)$	2,6	2,9	3,8	4,5	4,9

6.15

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0,8	1,4	2,0	3,0	4,9
$g_2(x)$	0,3	1,0	2,3	2,5	5,3
$g_3(x)$	2,0	4,0	4,5	5,2	5,8

6.25

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	1,9	2,5	2,9	3,3	4,4
$g_2(x)$	1,5	2,0	2,4	3,1	5,0
$g_3(x)$	2,0	3,2	3,9	4,0	6,0

6.26

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	2,5	2,7	3,0	3,1	3,3
$g_2(x)$	2,0	3,0	4,0	5,0	5,5
$g_3(x)$	2,0	3,4	4,9	5,3	6,0

6.27

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	2,0	3,0	4,8	5,5	7,0
$g_2(x)$	3,0	3,2	3,8	5,2	6,5
$g_3(x)$	1,0	2,2	3,0	5,0	6,0

6.28

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	1,4	2,1	2,5	2,7	3,0
$g_2(x)$	0,8	1,2	1,6	2,2	2,8
$g_3(x)$	1,2	1,8	2,2	2,6	3,2

6.29

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	2,5	3,2	4,0	5,0	6,2
$g_2(x)$	2,0	3,0	4,0	5,2	6,8
$g_3(x)$	2,0	3,5	5,0	6,1	7,0

6.30

X	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	3,4	4,5	5,0	6,1	6,7
$g_2(x)$	3,0	4,0	5,1	6,3	7,0
$g_3(x)$	4,1	4,4	5,4	7,0	7,2

Практическая работа 7. Основы теории потоков

Вопросы для самопроверки

1. Что такое критический путь?
2. Как определить резерв времени события и пути?
3. Что такое поток по сети?
4. В чем заключается задача нахождения максимального потока?

Демонстрационный пример

1. Департамент Юго-Западного округа Москвы рассматривает возможность реконструкции торгового центра у станции метро «Юго-Западная». После сноса старых палаток проектом предусматривается строительство павильонов с последующей сдачей их в аренду торговым фирмам. Работы, которые необходимо выполнить при реализации проекта, а также взаимосвязь работ и время их выполнения указаны в таблице.

Работа	Содержание работы	Предшествующая работа	Время выполнения $t(i,j)$, недели
A	Подготовить архитектурный проект	-	5
B	Определить будущих арендаторов	-	6
C	Подготовить проспект для арендаторов	A	4
D	Выбрать подрядчика	A	3
E	Подготовить документы для получения разрешения	A	1
F	Получить разрешение на строительство	E	4
G	Осуществить строительство	D,F	14
H	Заключить контракты с арендаторами	B,C	12
I	Вселить арендаторов в павильоны	G,H	2

Ответьте на следующие вопросы:

1. Сколько событий на критическом пути?
2. Какова длина критического пути?
3. Какое событие и на какой срок можно отложить?
4. Сколько работ на критическом пути?
5. На сколько можно отложить начало выполнения работы E, чтобы это не повлияло на срок выполнения проекта?
6. На сколько можно отложить начало выполнения работы B, чтобы это не повлияло на срок выполнения проекта (полный резерв времени)?

Решение:

Для того чтобы определить срок выполнения проекта, достаточно найти длину критического пути. Для этого построим графическое представление проекта (рисунок 7.1).

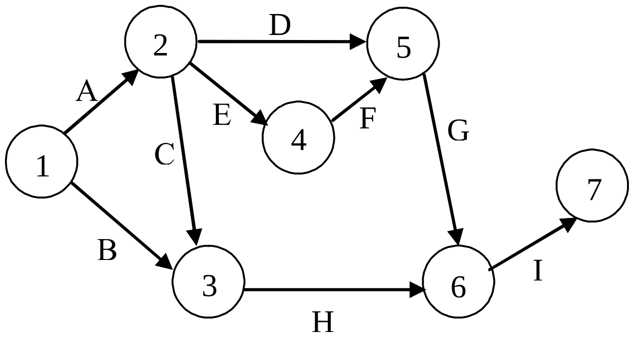


Рисунок 7.1

Находим параметры событий и критический путь. Полученные данные представим в виде таблицы 7.1.

Таблица 7.1

Номер события	События, предшествующие событию i	События, предшествующие событию j	Сроки свершения события, недели		Резерв времени $R(i)$, недели
			ранний $t_p(i)=\max(t_p(i)+t(i,j))$	поздний $t_n(i)=\min(t_p(j)-t(i,j))$	
1	-	2,3	0	0	0
2	1	3,4,5	5	5	0
3	1	6	9	12	3
4	2	5	6	6	0
5	2,4	6	10	10	0
6	3,5	7	24	24	0
7	6	-	26	26	0

Определив ранний срок наступления завершающего события, мы тем самым определяем длину критического пути. По данным таблицы 7.1 критический путь составляет 26 недель. Так как критический путь в данном случае один, то этот путь проходит через критические события, т.е. события с нулевыми резервами времени. В таблице 7.1 6 событий с нулевыми резервами (1, 2, 4, 5, 6, 7), и одно событие с ненулевым резервом. Таким образом, событие 3 можно отложить на 3 недели, при этом не вызывая увеличения срока выполнения всего проекта.

Для ответа на вопросы с 4 по 6 необходимо найти параметры работ (таблица 7.2).

Ранний срок начала работы совпадает с ранним сроком наступления предшествующего события, т.е. $t_{рн}(i,j)=t_p(i)$, ранний срок окончания работы определяется по формуле $t_{ро}(i,j)=t_p(i)+t(i,j)$. Ни одна работа не может окончиться позже допустимого позднего срока своего конечного события j, поэтому поздний срок окончания работы определяется соотношением $t_{по}(i,j)=t_n(j)$, а поздний срок начала этой работы – соотношением $t_{пн}(i,j)=t_n(j)-t(i,j)$. Полный резерв времени $R_n(i,j)$ работы показывает, на сколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения проекта не измениться. Полный резерв времени по формуле $R_n(i,j)=t_n(j)-t_p(i)-t(i,j)$.

Таблица 7.2

Работа (i,j)	Время выполнения t(i,j), недели	Работа, предшествующая событию i	Работа, предшествующая событию j	Ранний срок начала работы $t_{рн}(i, j)$	Ранний срок окончания работы $t_{ро}(i, j)$	Поздний срок окончания работы $t_{по}(i, j)$	Поздний срок начала работы $t_{пн}(i, j)$	Полный резерв времени $R_п$, недели
A (1,2)	5	-	C, D, E	0	5	5	0	0
B (1,3)	6	-	H	0	6	12	6	6
C (2,3)	4	A	H	5	9	12	8	3
D (2,5)	3	A	G	5	8	10	7	2
E (2,4)	1	A	F	5	6	6	5	0
F (4,5)	4	E	G	6	10	10	6	0
G (5,6)	14	D, F	I	10	24	24	10	0
H (3,6)	12	B, C	I	9	21	24	12	3
I (6,7)	2	G, H	-	24	26	26	24	0

По полученным результатам можно сделать следующие выводы:
- на критическом пути 5 работ (нулевой резерв времени $R_п$,);
- начало выполнения работы *E* отложить нельзя;
- полный резерв времени работы *B* составляет 6 недель.

2. Найти максимальный поток сети, приведенной на рисунке 7.2,

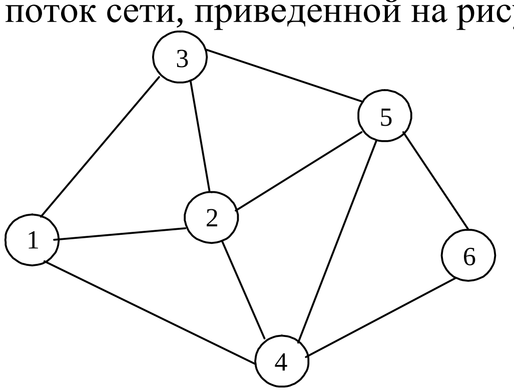


Рисунок 7.2

со следующей матрицей пропускных способностей: $R = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

Решение.

1. Сформулируем произвольный первоначальный поток. Для этого выберем несколько возможных путей от первой вершины к шестой, и высчитаем минимальное количество вещества, которое можно пропустить по каждому из путей.

1) 1-3-5-6, $\min\limits_{1-3-5-6}\{x_{ij}\} = 2$,

2) 1-4-6, $\min\limits_{1-4-6}\{x_{ij}\} = 2$,

3) 1-2-5-6, $\min\limits_{1-2-5-6}\{x_{ij}\} = 1$.

Составляем матрицу потока по сети:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Мощность первоначального потока равна $f^0 = \sum_{i=1}^{6} x_{1i}^0 = 5$.

2. Составляем матрицу $R - X^0$ с целью выявления ненасыщенных ребер (ненулевые элементы матрицы).

$$R - X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Составляем подмножество вершин, по которым можно достичь стока через ненасыщенные ребра. Если сток в это подмножество не входит, то план является оптимальным.

$$1\|2,3, \qquad 2\|4, \qquad 4\|6.$$

Таким образом, составляется новый путь из истока в сток: 1-2-4-6. Вершина 6 входит в подмножество вершин, значит необходимо увеличить поток по ребрам, составляющим этот путь на величину $\Delta = \min\limits_{1-2-4-6}\{r_{ij} - x_{ij}^0\} = \min\limits_{1-2-4-6}\{6;4;2\} = 2$, которая определяется на ребрах данного пути.

4. Формируется новый поток $X^1 = X^0 + \underset{1-2-4-6}{\Delta}$.

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Мощность потока X^1 равна $f^1 = \sum_{i=1}^{6} x_{1i}^1 = 7$.

5. Составляем матрицу $R - X^1$ с целью выявления ненасыщенных ребер (ненулевые элементы матрицы).

$$R-X^1=\begin{bmatrix}0&4&2&0&0&0\\6&0&8&2&0&0\\8&8&0&0&0&0\\7&11&0&0&8&2\\0&6&4&3&0&2\\0&0&6&10&10&0\end{bmatrix}.$$

6. Составляем подмножество вершин, по которым можно достичь стока через ненасыщенные ребра.

$$1\|2,3, \qquad 2\|4, \qquad 4\|5 \qquad 5\|6.$$

Таким образом, составляется новый путь из истока в сток: 1-2-4-5-6. Вершина 6 входит в подмножество вершин, значит необходимо увеличить поток по ребрам, составляющим этот путь на величину $\Delta=\min\limits_{1-2-4-5-6}\{4;2;8;2\}=2$, которая определяется на ребрах данного пути.

7. Формируется новый поток $X^2=X^1+\underset{1-2-4-5-6}{\Delta}$.

$$X^2=\begin{bmatrix}0&5&2&2&0&0\\-5&0&0&4&1&0\\-2&0&0&0&2&0\\-2&-4&0&0&2&4\\0&-1&-2&-2&0&5\\0&0&0&-4&-5&0\end{bmatrix}.$$

Мощность потока X^2 равна $f^2=\sum\limits_{i=1}^{6}x_{1i}^2=9$.

8. Составляем матрицу $R-X^2$ с целью выявления ненасыщенных ребер (ненулевые элементы матрицы).

$$R-X^2=\begin{bmatrix}0&2&2&0&0&0\\8&0&8&0&0&0\\8&8&0&0&0&0\\7&13&0&0&6&0\\0&6&4&5&0&0\\0&0&0&10&12&0\end{bmatrix}.$$

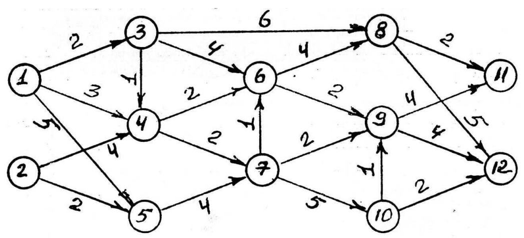
9. Составляем подмножество вершин, по которым можно достичь стока через ненасыщенные ребра:

$$1\|2,3.$$

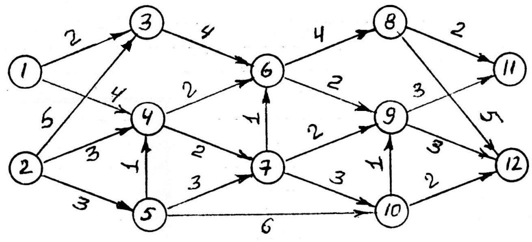
Сток не входит в полученное подмножество вершин, значит максимальная мощность потока равна 9, на пути 1-2-4-5-6.

Задания для решения

Вычислить максимальный и минимальный поток по сети.



7.1



7.2

7.3 Проект пуско-наладки компьютерной системы состоит из восьми работ. Непосредственно предшествующие работы и продолжительность выполнения работ показаны ниже.

Работа	Предшествующая работа	Врем выполнения, дни
A	-	3
B	-	6
C	A	2
D	B,C	5
E	D	4
F	E	3
G	B,C	9
H	F,G	3

1. Найдите критический путь и ответьте на следующие вопросы:
   1. Сколько времени потребуется для выполнения проекта?
   2. Чему равно наиболее ранее время начала работы C?
   3. На сколько можно отложить выполнение работы C без отсрочки завершения проекта в целом?
   4. Чему равно наиболее позднее время окончания работы F?
   5. На сколько можно отложить выполнение работы F без отсрочки завершения проекта в целом?
2. Вычислить максимальный поток по сети.

7.4 Ректорат РУДН рассматривает предложение о строительстве новой библиотеки. Работы, которые следует выполнить перед началом строительства, представлены ниже. Продолжительность работ показана в неделях.

Найдите критический путь и ответьте на следующие вопросы:

1. Сколько работ находится на критическом пути?
2. Через какое минимальное время после принятия решения о реализации проекта можно начать работу по строительству библиотеки?
3. На сколько недель можно отложить выбор архитектурной мастерской?
4. Чему равно наиболее позднее время завершения работы по обеспечению финансирования?

Работа	Содержание работы	Предшествующая работа	Врем выполнения, недели

A	Определить место строительства	-	6
B	Разработать первоначальный проект	-	8
C	Получить разрешение на строительство	A, B	12
D	Выбрать архитектурную мастерскую	C	4
E	Разработать смету затрат на строительство	C	6
F	Разработать проект строительства	D, E	15
G	Получить финансирование	E	12
H	Нанять подрядчика	F, G	8

7.5 Постройте сетевую модель разработки и производства станков, используя упорядочение работ из таблицы.

Работа	Непосредственно Предшествующие работы	Время, ед. времени
A – составление сметы затрат	–	3
B – согласование оценок	A	6
C – покупка собственного оборудования	B	1
D – подготовка конструкторских проектов	B	2
E – строительство основного цеха	D	1
F – монтаж оборудования	C,E	5
G – испытание оборудования	F	4
H – определение типа модели	D	9
I – проектирование внешнего корпуса	D	7
J – создание внешнего корпуса	H,I	6
K – конечная сборка	G,J	3
L – контрольная проверка	K	7

7.6 Постройте сетевую модель, используя упорядочение работ из таблицы.

Название	Непосредственно предшествующие работы	Длительность, ед.времени
A	–	2
B	–	10
C	–	8
D	A,B	4
E	B,C	3
F	C	1
G	D,E	9
H	F,G	7

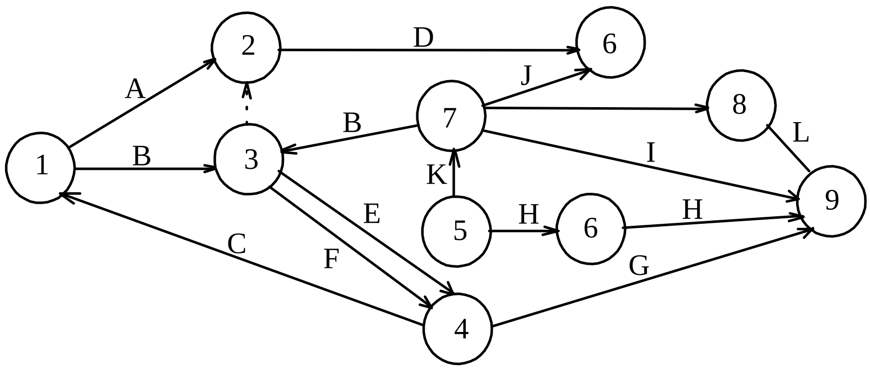
7.7 Постройте сетевую модель организации выступления хора при свечах, используя данные таблицы.

Содержание работы	Длительность, ед.времени
A – выбор музыкального произведения	21
B – разучивание музыки	14
C – размножение нотных партий	14
D – репетиции хора	70
E – получение канделябров в прокат	14
F – закупка свечей	1
G – установка канделябров со свечами	1
H – закупка декораций	1
I – установка декораций	1
J – заказ костюмов для хора	7
K – отглаживание костюмов	7
L – проверка системы усиления звука	7
M – настройка системы усиления звука	1
N – генеральная репетиция хора	1
O – банкет	1
P – проведение концерта	1

7.8 Постройте сетевую модель переноса участка воздушной высоковольтной линии, используя упорядочение работ из таблицы.

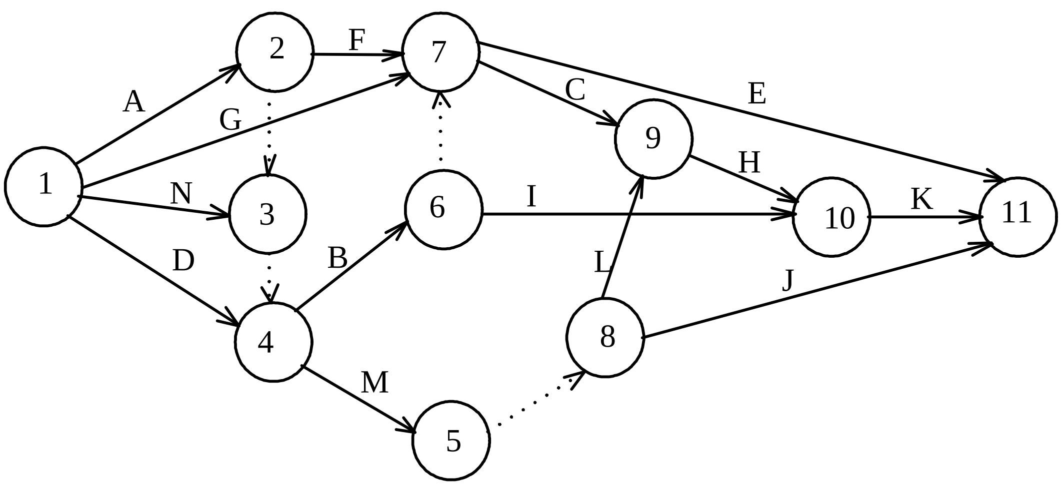
Содержание работы	Непосредственно предшествующие работы	Длительность, ед. времени
A – оценка состава и содержания работ	–	1
B – осведомление потребителей электроэнергии о временном отключении системы	A	0,5
C – составление заявки на материалы и оборудование	A	1
D – обследование района проведения работ	A	0,5
E – доставка опор и материалов	C,D	3
F – распределение опор по точкам монтажа	E	3,5
G – увязка точек монтажа	D	0,5
H – разметка точек монтажа	G	0,5
I – рытье ям под опоры	H	3
J – монтаж опор	F,I	4
K – защита старых проводов	F,I	1
L – протяжка новых проводов	J,K	2
M – монтаж арматуры	L	2
N – выверка провиса новых проводов	L	2
O – подстрижка деревьев	D	2
P – обесточивание и переключение линий	B,M,N,O	0,1
Q – включение и фазировка новой линии	P	0,5
R – уборка строительного мусора	Q	1
S – снятие старых проводов	Q	1
T – демонтаж старых опор	S	2
U – доставка неиспользованных материалов на склад	I	2

7.9 Найдите нарушения правил построения сетевых графиков в сетевой модели на рисунке.

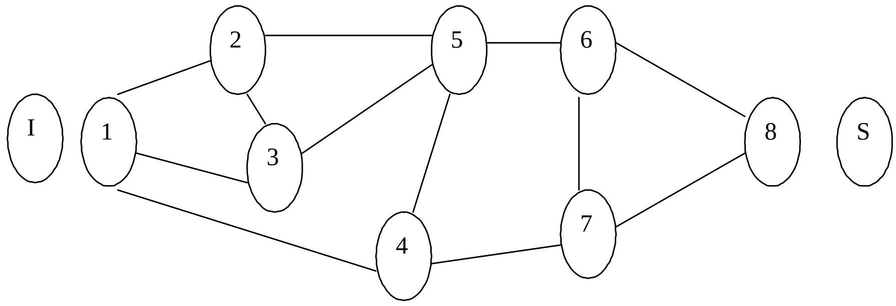


7.10 Используя данные о непосредственно предшествующих работах, перечислите работы, которые неверно отображены на сетевом графике, устраните найденные ошибки.

Название	Непосредственно предшествующие работы	Длительность, ед.времени
A	–	9
B	D	6
C	B, F, G	5
D	–	8
E	B, F, G	8
F	A, N	4
G	–	5
H	C, L	7
I	B, G	1
J	I,M	12
K	H,I,M	6
L	I,M	4
M	D	2
N	–	6



7.11 Найти мощность потока, начертить разрез по сети.



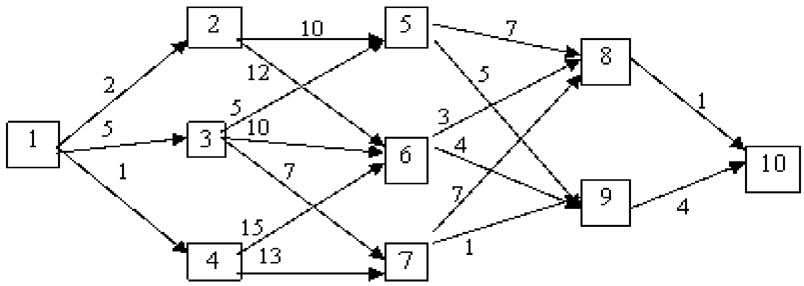
Пропускные способности ребер представлены в таблице:

i-j	1-2	1-3	1-4	2-3	2-5	3-5	4-5	4-7	5-6	6-7	6-8	7-8
R_1(i-j)	17	29	31	10	11	5	8	9	13	11	25	35
R_2(i-j)	15	13	43	24	5	15	9	11	22	33	15	47
R_3(i-j)	38	37	48	18	12	15	16	9	23	18	24	37
R_4(i-j)	22	13	32	8	12	15	10	9	13	10	22	30
R_5(i-j)	32	35	45	15	12	15	16	9	13	16	25	32
R_6(i-j)	18	17	43	13	12	15	9	14	13	15	24	43
R_7(i-j)	22	22	42	12	12	15	16	9	12	15	25	47
R_8(i-j)	12	23	10	13	12	15	7	9	13	15	11	47
R_9(i-j)	29	39	49	19	12	19	16	9	13	16	29	46
R_{10}(i-j)	40	32	15	11	9	15	16	9	13	18	9	40
R_{11}(i-j)	21	19	24	13	8	15	26	19	29	30	19	24
R_{12}(i-j)	17	21	22	35	29	36	33	22	25	15	24	33
R_{13}(i-j)	22	13	32	8	12	15	10	9	13	10	22	30
R_{14}(i-j)	36	22	42	12	12	15	16	24	28	33	40	35
R_{15}(i-j)	23	14	25	62	34	29	35	44	53	46	31	29
R_{16}(i-j)	28	36	45	31	25	15	24	36	18	29	24	32
R_{17}(i-j)	21	19	24	13	8	15	16	9	13	15	19	26
R_{18}(i-j)	29	24	40	33	29	36	32	19	23	19	25	50
R_{19}(i-j)	21	19	24	13	8	15	16	9	13	15	19	26
R_{20}(i-j)	15	35	20	11	12	8	19	21	33	34	25	37

7.12 Жил некогда мистер М., который решил отправиться искать счастья в Сан-Франциско. В те дни дилижансы были единственным видом общественного транспорта для поездки из восточных штатов, где проживал мистер М., на Запад. В бюро путешествий ему показали карту Соединенных Штатов с нанесенными на ней дилижансовыми маршрутами, которые обслуживались в то время. Каждый квадрат на карте (рисунок) изображает один из штатов (состояний); для удобства штаты пронумерованы. Заметим, что какой бы из вариантов пути от штата 1 (Восток) до штата 10 (Запад) мы ни выбрали, он включает 4 дилижансовых маршрута – или 4 “шага”.

Поскольку мистеру М. было известно, что путешествие связано с серьезными опасностями для здоровья и жизни, перед отъездом он решил застраховаться. Ставка страхового платежа (иными словами, стоимость, отвечающая принятой стратегии выбора пути) зависела от избираемых дилижансовых маршрутов, и она была тем выше, чем опаснее маршрут. Обозначим через C_{ij} стоимость страхового полиса для переезда из штата i в штат j (в денежных единицах). Условные числовые значения C_{ij}

проставлены на рисунке. Цель мистера М. – выбрать такой путь от штата 1 до штата 10, для которого общая стоимость страхования является минимальной.



Рисунок

Проделанные вычисления позволяют не только получить оптимальное решение, но также принять правильное решение при изменившихся условиях задачи:

a. Найти оптимальный путь из штата 1 в штат 10, проходящий через штат 5.
b. Предположим, что между штатами 7 и 9 нет дилижансового сообщения. Каким будет оптимальный путь из штата 1 в штат 10?
c. Пусть введен дополнительный маршрут из штата 3 в штат 8. какой должна быть наименьшая ставка страхового платежа на этом маршруте, что бы мистер М. по-прежнему считал предпочтительным выбранный ранее путь?
d. Определить диапазон ставок страхового платежа для переезда из штата 1 в штат 3, в рамках которого ранее выбранный путь остается оптимальным. Найти аналогичный диапазон для переезда из штата 3 в штат 7, а также из штата 2 в штат 6.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Орлова, И.В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач / И.В. Орлова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2012. – ISBN 978-5-9558-0107-0.– URL: http://znanium.com/bookread.php?book=359462 .- (дата обращений 21.01.2020). – Текст: электронный

Дополнительная литература

1. Исследование операций в экономике : учебное пособие для вузов / под ред. Н.Ш. Кремера. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. - 407с. - Гриф МО "Рекомендовано".

2. Сапронов, И. В. Теория игр: учебное пособие / Сапронов И.В., Уточкина Е.О., Раецкая Е.В. - Воронеж:ВГЛТУ им. Г.Ф. Морозова, 2013. – ISBN 978-5-7994-0603-5. – URL: http://znanium.com/bookread2.php?book=858524 .- (дата обращений 21.01.2020). – Текст: электронный

3. Лемешко, Б. Ю. Теория игр и исследование операций / Лемешко Б.Ю. - Новосиб.:НГТУ, 2013. – ISBN 978-5-7782-2198-7. – URL: http://znanium.com/bookread2.php? book=558878 .- (дата обращений 21.01.2020). – Текст: электронный

4. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций / Шапкин А.С., Шапкин В.А. - Москва:Дашков и К, 2016. – ISBN 978-5-394-02610-2. – URL: http://znanium.com/bookread2.php?book=557767 .- (дата обращений 21.01.2020). – Текст: электронный

5. Тавокин, Е. П. Исследование социально-экономических и политических процессов: учебное пособие / Е.П. Тавокин. – Москва: ИНФРА-М, 2008. – ISBN 978-5-16-003115-6. – URL: http://znanium.com/bookread2.php?book=128010 .- (дата обращений 21.01.2020). – Текст: электронный