Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Кузбасский гуманитарно-педагогический институт

Кафедра математики, физики и математического моделирования

Л.А. Осипова

Алгебра многочленов

*Методические указания по подготовке к практическим занятиям
студентов направления 44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)
профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика»*

Новокузнецк

2022

УДК [378.147.88:512.5](072)

ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.144я73

О 74 Алгебра многочленов: методические указания по подготовке к практическим занятиям для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и физика» / Л.А. Осипова. Кузбасский гуманитарно-педагогический институт Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : КГПИ КемГУ, 2022 – 52 с.

В работе изложены теоретические сведения об основных фактах алгебры многочленов в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям, выполнения домашних работ и индивидуальных заданий. Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает классические и современные источники; указана литература основная и дополнительная.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика и Информатика».

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № 8 от 11.03.2022
Заведующий каф. МФММ

_______________ / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики
Протокол № 8 от 05.05.2022
Председатель методической комиссии
ФИМЭ

_______________ / И.А. Жибинова

УДК [378.147.88:512.5](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.144я73
О 74

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика») и направлены на оказание помощи студентам в подготовке к практическим занятиям по курсу «Алгебра многочленов».

Целью изучения дисциплины является формирование необходимой базы знаний для использования математических методов и математических моделей в решении профессиональных задач, а также развитие математического мышления и культуры у обучающихся. Изучение этого курса дает возможность студентам понять достоверность применяемых в школьном курсе алгоритмов.

Целью методических рекомендаций является содействие в организации процесса самостоятельной работы студентов в ходе изучения курса «Алгебра многочленов». Для этого преподавателю необходимо целенаправленно формировать у студентов план учебных действий, как некоторую схему освоения учебного предмета.

В методические рекомендации включено:

1) краткий конспект лекций (основные понятия, свойства, теоремы, формулы);
2) примеры решения основных типовых задач;
3) вопросы для самопроверки;
4) задания для самостоятельного решения;
5) список рекомендуемой литературы.

Теоретические сведения об основных фактах алгебры многочленов представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям, выполнения домашних работ и индивидуальных заданий.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает классические и современные источники; указана литература основная и дополнительная.

Таким образом, данные методические материалы позволят получить студенту целостное представление о содержании основных разделов курса «Алгебра многочленов» и логике его развертывания, эффективно подготовиться к практическим занятиям, успешно выполнить индивидуальные самостоятельные работы.

1 Многочлены, определенные над кольцом К

1.1 Основные понятия

Выражение вида $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ (1), где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in$ К, К – целостное кольцо, $a_0 \neq 0$, называется многочленом n-ой степени от одной переменной x, определенным над целостным кольцом К.

Обозначают многочлены, указывая переменную (переменные), от которой зависит многочлен: f(x), g(y), например: $f(x)=3x^2-2x+1$, $g(y)=y^3+2y^2-1$.

Многочлен вида (1) называется многочленом, записанным по убывающим степеням переменной x. Многочлены можно записывать и по возрастающим степеням переменной, например:

$g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$, $b_n \neq 0$, $b_1, \ldots, b_n \in$ К.

Элементы кольца К $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются коэффициентами многочлена соответственно при степенях переменной в записи (1).

Многочлен, все коэффициенты которого равны нулю из К, называется нулевым многочленом.

Степенью многочлена называют наибольший показатель степени переменной, при котором коэффициент не равен нулю. Тот факт, что степень многочлена (1) равна n, можно записать: $deg\, f(x)=n$.

Например, для $g(x)=0x^2+x-3$ $deg\, g(x)=1$, $h(y)=3y^3+0y^2+y+1$ $deg\, h(y)=3$.

Степень нулевого многочлена считается неопределенной.

Множество всевозможных многочленов от переменной x с коэффициентами из кольца К обозначают К[x], С[x] – множество многочленов от переменной x с комплексными коэффициентами.

Многочлены f(x), g(x) $\in$ К[x] принято считать равными, если у них равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной.

Пусть даны многочлены $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ и $g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \in$ К, и для определенности пусть m < n.

Сумма, разность и произведение многочленов определяются равенствами:

$f(x)+g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+(a_{n-k}+b_{m-k})x^k+\ldots+(a_{n-1}+b_{m-1})x+(a_n+b_m)$,

$f(x)-g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \ldots+(a_{n-m}-b_0)x^m+\ldots+(a_{n-k}-b_{m-k})x^k+\ldots+(a_{n-1}-b_{m-1})x+(a_n-b_m)$,

$f(x)\cdot g(x)=c_0x^{m+n}+\ldots+c_{m+n-1}x+c_{m+n}$, *где* $c_0=a_0b_0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0,\ldots$,

$c_{m+n-1}=a_{n-1}b_m+a_nb_{m-1}$, $c_{m+n}=a_nb_m$.

$deg(f(x)\cdot g(x))=deg\,f(x)+deg\,g(x)$.

Следовательно, множество K[x] замкнуто относительно этих операций. Для любых многочленов g(x), f (x), φ(x) є K[x] выполняются условия:

1. $g(x)+f(x)=f(x)+g(x)$.
2. $(g(x)+f(x))+\varphi(x)=g(x)+(f(x)+\varphi(x))$.
3. В K[x] существует нулевой элемент – нулевой многочлен.
4. Для каждого многочлена $f(x)$ из K[x] существует ему противоположный $-f(x)\in K[x]$.
5. $g(x)\cdot f(x)=f(x)\cdot g(x)$.
6. $g(x)\cdot f(x)\cdot\varphi(x)=(g(x)\cdot f(x))\cdot\varphi(x)$.
7. $g(x)\cdot(f(x)+\varphi(x))=g(x)\cdot f(x)+g(x)\cdot\varphi(x)$,

   $(f(x)+\varphi(x))\cdot g(x)=f(x)\cdot g(x)+\varphi(x)\cdot g(x)$.

1.2 Деление многочлена на двучлен. Корни многочлена

Теорема: Для любого многочлена *f(x)* двучлена *(x-a)*, определенных над целым кольцом K, существуют, и притом единственные, неполное частное *q(x)* и остаток r из K[x], такие что $f(x)=q(x)(x-a)+r$, причем $\deg q(x)=\deg f(x)-1$, $deg\ r=0$.

Пример 1. *Найти q(x) и r, если* $f(x)=2x^4-x^2+1$ *и* $(x-3)\in R[x]$.

Решение: *Проведем деление в столбик и получим:*

$$\begin{array}{l|l}
_\,2x^4-x^2+1 & \ \ x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4-6x^3} & 2x^3+6x^2+17x+51 \\
\quad_\,6x^3-x^2 & \\
\quad\ \ \underline{6x^3-18x^2} & \\
\qquad\quad_\,17x^2+1 & \\
\qquad\quad\ \ \underline{17x^2-51x} & \\
\qquad\qquad_\,51x+1 & \\
\qquad\qquad\ \ \underline{51x-153} & \\
\qquad\qquad\qquad 154 &
\end{array}$$

$f(x)=(2x^3+6x^2+17x+51)(x-3)+154$ и $q(x)=2x^3+6x^2+17x+51$, $r=154$.

Не всегда деление в столбик занимает мало времени, поэтому используют более простой способ получения неполного частного q(x) и остатка r. Этот способ получил название «схема Горнера».

Пусть необходимо разделить с остатком многочлен $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ на двучлен $x-a$.

Пусть $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, r-остаток, deg r=0,

$f(x)=q(x)(x-a)+r$, $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(x-a)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})+r$. Раскроем скобки и по определению равных многочленов приравняем коэффициенты при равных степенях переменной. Получим:

$$\begin{array}{l} a_0=b_0 \\ a_1=b_1-ab_0 \\ a_2=b_2-ab_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{n-1}=b_{n-1}-ab_{n-2} \\ a_n=r-ab_{n-1} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} b_0=a_0 \\ b_1=a_1+ab_0 \\ b_2=a_2+ab_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ b_{n-1}=a_{n-1}+ab_{n-2} \\ r=a_n+ab_{n-1} \end{array}$$

По полученным равенствам составим таблицу

	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
a	$b_0=a_0$	$b_1=a_1+b_0a$	$b_2=a_2+b_1a$	…	$b_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-2}a$	$r=a_n+b_{n-1}a$

Используя схему Горнера, можно решить многие задачи теории многочленов.

Пример 2. Разделить с помощью схемы Горнера многочлен

$f(x)=4x^5-x^4+x^3+2x^2-1$ *на* $(x+1)$

Решение:

Составим таблицу, учитывая $x+1=x-(-1)$

	4	-1	1	2	0	-1
-1	4	5	6	-4	4	-5

Получим $q(x)=4x^4-5x^3+6x^2-4x+4$, $r=-5$. Заметим, что одновременно мы нашли $f(-1)=-5$

Всякий многочлен можно разложить по степеням *(x-a)* по формуле Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{(n)}$$

Коэффициенты разложения f(a), $\frac{f'(a)}{1!}, \frac{f''(a)}{2!}, \dots, \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ можно находить непосредственно.

$f(x)=f(a)+(x-a)(\frac{f'(a)}{1!}+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1}),$

$f_1(x)=\frac{f'(a)}{1!}+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1}=\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)(\frac{f''(a)}{2!}+$
$\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-2})$

$f_2(x)=\frac{f''(a)}{2!}+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-2}=\frac{f''(a)}{2!}+(x-a)(\frac{f'''(a)}{3!}+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-3})$

$,\dots,$

$f_n(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$

Получили $f(x)=f(a)+f_1(x)(x-a),$

$f_1(x)=\frac{f'(a)}{1!}+f_2(x)(x-a),$

$f_2(x)=\frac{f''(a)}{2!}+f_3(x)(x-a),\dots,$

$f_{n-1}(x)=\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+f_n(x)(x-a),$

$f_n(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$

Коэффициенты разложения *f(x)* по степеням *(x-a)* являются остатками при последовательном делении $f(x)$, $f_1(x)$, …, $f_{n-1}(x)$ на *(x-a)*. Удобно их находить с помощью схемы Горнера.

Пример 3. Разложить по степеням *(x+5)* многочлен $f(x)=2x^4+x^3-x+1$. Решение: Воспользуемся схемой Горнера несколько раз. Будем делить *f(x)* на *(x+5)*

	2	1	0	-1	1
-5	2	-9	45	-226	1131
-5	2	-19	140	-926	

-5	2	-29	285
-5	2	-39	
-5	2		

После первого деления имеем: $f(x)=q_1(x)(x-5)+1131$. Делим $q_1(x)$ на $(x+5)$, пользуемся этой же таблицей, заполняем 3-ю строку. В результате деления получаем $q_1(x)=q_2(x)(x+5)-926$ или

$f(x)=q_2(x)(x+5)^2-926(x+5)+1131$.

Делим $q_1(x)$ *на* $(x+5)$, заполняем 4-ю строку табл. и т.д.

$q_2(x)=q_3(x)(x+5)+285,$

$q_3(x)=2(x+5)-39.$

Подставив получившиеся выражения в f(x), получим

$f(x)=((2(x+5)-39)(x+5)+285)(x+5)^2-926(x+5)+1131=2(x+5)^4-39(x+5)^3+$
$+285(x+5)^2-926(x+5)+1131$.

Пример 4. Записать по степеням x многочлен $f(x)=3(x-2)^5+2(x-2)^3-(x-2)+3$.

Решение: Можно решить эту задачу, возведя каждую разность в нужную степень, используя бином Ньютона. Но преобразования будут громоздкими и займут много времени, поэтому удобнее воспользоваться схемой Горнера. Заменив $(x-2)=t$ может сформулировать задачу по-другому: записать многочлен $f(t)$ по степеням $(t+2)$, т.к. $t+2=x-2+2=x$. Таким образом, задача сведена к предыдущей:

	3	0	2	0	-1	3
-2	3	-6	14	-28	55	-107
-2	3	-12	38	-104	263	
-2	3	-18	74	-252		
-2	3	-24	122			
-2	3	-30				
-2	3					

$f(x)=3x^5-30x^4+122x^3-252x^2+263x-107$.

Пример 5. Разложить дробь $\frac{x^4-x^2+x+2}{(x-3)^5}$ на сумму простейших дробей.

Решение: Чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо многочлен, записанный в числителе дроби, разложить по степеням *(x-3)*, а затем почленно разделить числитель дроби на знаменатель:

	1	0	-1	1	2
3	1	3	8	25	77
3	1	6	26	103	
3	1	9	53		
3	1	12			
3	1				

$$\frac{x^4-x^2+x+2}{(x-3)^5}=\frac{(x-3)^4+12(x-3)^3+53(x-3)^2+103(x-3)+77}{(x-3)^5}=$$

$$=\frac{1}{x-3}+\frac{12}{(x-3)^2}+\frac{53}{(x-3)^3}+\frac{103}{(x-3)^4}+\frac{77}{(x-3)^5}.$$

Пусть даны многочлен $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ над областью целостности К и элемент с є К. Подставим вместо *x* элемент *c* и выполним все указанные действия. Полученный результат обозначается *f(c)* и называется значением многочлена *f(x)* при *x=c.* В частности $f(0)=a_0$, а $f(1)=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$.

Определение. Корнем многочлена *f(x)* над областью целостности К называется элемент с є К, такой что *f(c)=0.*

Теорема (Безу). Остаток от деления многочлена *f(x) на x – c равен f(c)* – значению многочлена при *x=c, т.е.* $f(x)=(x-c)q(x)+f(c)$.

Теорема (критерий корня). Элемент с є К является корнем многочлена *f(x)* є К[x] тогда и только тогда, когда *f(x)* ⋮ *(x-c).*

Определение. Корень *c* многочлена *f(x)* называется корнем кратности *к,* если *f(x)* делится на $(x-c)^{к}$, но не делится на $(x-c)^{к+1}$.

Пример. Проверить является ли число *-3* корнем многочлена $f(x)=x^5+8x^4+19x^3+9x^2+27$, и если да, то найти его кратность.

Решение. Воспользуемся схемой Горнера.

	1	8	19	9	0	27	
-3	1	5	4	-3	9	0	*-корень*
-3	1	2	-2	3	0	*-корень*	

-3	1	-1	1	0	*корень*
-3	1	-4	13	*≠0*	

Ответ. $f(x)= (x+3)^3(x^2-x+1)$, *-3* - корень кратности *3*.

1.3 Основные понятия теории делимости многочленов

Определение. Пусть К – область целостности. Многочлен $f(x)\in K[x]$ делится на ненулевой многочлен $h(x)\in P[x]$ если существует многочлен $q(x)\in P[x]$, такой что $f(x)= h(x)q(x)$.

Многочлен $f(x)$ называют *кратным многочлена* $h(x)$, а многочлен $h(x)$ – *делителем* $f(x)$. Этот факт символически записывают $f(x) \vdots h(x)$.

Рассмотрим основные свойства делимости многочленов.

1. Если $f(x) \vdots g(x)$ и $g(x) \vdots h(x)$, то $f(x) \vdots h(x)$.
2. Для любого $f(x)\neq 0$, $f(x) \vdots f(x)$.
3. Если $f(x) \vdots h(x)$ и $g(x) \vdots h(x)$, то $(f(x)+ g(x)) \vdots h(x)$.
4. Если $f(x) \vdots h(x)$, то $f(x)g(x) \vdots h(x)$, для любого многочлена $g(x)$.

Определение. В кольце многочленов К[x] над областью целостности К многочлен $D(x)$ называется общим делителем многочленов $f(x)$ и $h(x)$, если $f(x) \vdots D(x)$ и $h(x) \vdots D(x)$.

Определение. В кольце многочленов К[x] над областью целостности К наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $h(x)$ называется такой их общий делитель $d(x)$, который делится на любой другой общий делитель данных многочленов. Обозначение: НОД $(f(x), h(x))= d(x)$.

1.4 Вопросы для самопроверки

1. Существует ли многочлен, имеющий бесконечное множество корней?
2. Что устанавливает теорема Безу?
3. Что такое кратность корня?
4. Может ли кратность корня превосходить его степень?
5. Какие типы задач можно решать с помощью схемы Горнера?

1.5 Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен f(x) по степеням $x - x_0$

1. $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + x^2 - 8,\ x_0 = 3$
2. $f(x) = -x^5 + x^2 + 2,\ x_0 = -1$
3. $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i,\ x_0 = -i$
4. $f(x) = x^6 + (2-i)x^4 - (1-i)x^3 + (1+i)x^2 - (1+i)x + 3 - i,\ x_0 = i$
5. $f(x) = x^7 + x^3 + 4x + 5,\ x_0 = 2$
6. $f(x) = x^6 - 5x^5 + 3x^3 - 8x + 4,\ x_0 = -3$
7. $f(x) = x^7 + 2x^6 - 6x^5 + 2x^3 - x - 5,\ x_0 = 4$
8. $f(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x + 1,\ \ x_0 = 3$
9. $f(x) = 5x^3 - 2x^4 - 8x^3 + 7,\ \ x_0 = 6$
10. $f(x) = 8x^8 + x + 8,\ \ x_0 = -2$

Использовать схему Горнера, разложить по степеням многочлен:

11. $f(x) = (x+3)^4 - 3(x+3) + 5(x+3) - 2$
12. $f(x) = 2(x-3)^6 + 7(x-3)^5 + (x-3)^3 - 5(x-3)^2 + 4$
13. $f(x) = 4(x-i)^3 + 2(x-i)^3 + 18(x-i) - 22 - 13i$
14. $f(x) = 5(x-2)^5 + 4(x-2)^3 - 12(x-2) + 5$
15. $f(x) = 2(x+3)^7 + 6(x+3)^5 - 5(x+3)^3 + (x+3) - 6$
16. $f(x) = 4(x+8)^5 - 3(x+8)^4 + 3(x+8)^3 - (x+8)^2 + 4(x+8) - 2$
17. $f(x) = 3(x-4)^5 + 2(x-4)^4 - (x-4)^2 + 8$
18. $f(x) = 2(x-5)^6 - 4$
19. $f(x) = 8(x+2)^7 - 3(x+2)^4 - (x+2) - 1$
20. $f(x) = 4(x-4)^5 - 5(x-4)^4 + 2(x-4)^2 - 4$

Разложить дробь на простейшие дроби, используя схему Горнера:

21. $\frac{x^2+7x^3+4x^2-25x+1}{(x+5)^6}$
22. $\frac{x^4-8x^3+24x^2-50x+90}{(x-3)^3}$
23. $\frac{(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20}{x^5}$
24. $\frac{(x-3)^5-(x-3)^4+(x-3)^2}{x^6}$
25. $\frac{x^7-x+x^3-x+3}{(x-2)^5}$

2 Многочлены, определенные над полем P

Пусть P=<P, +, · > -поле. Тогда P[x] – множество многочленов от переменной x, определенных над полем P. Т.к. поле является целостным кольцом, операции сложение, вычитание и умножение на P[x] обладают теми же свойствами, что и на K[x], значит <P[x], +, ·> -целостное кольцо с единицей, где единица – единица поля P.

2.1 Деление с остатком в кольце многочленов над полем

Перенесем известное для целых чисел понятие деления с остатком на многочлены с коэффициентами из произвольного поля P.

Определение. Пусть P – поле и $f(x)$, $h(x)\in P[x]$, причем $h(x)\neq 0$. Разделить с остатком многочлен $f(x)$ на ненулевой многочлен $h(x)$ – это значит найти многочлены $q(x)$ и $r(x)$, такие что $f(x)= h(x)\, q(x)+ r(x)$, причем $r(x)$ – либо нулевой многочлен, либо его степень меньше степени $h(x)$. Многочлен $f(x)$ называют *делимым,* $h(x)$ – *делителем,* $q(x)$ – *неполным частным,* $r(x)$ – *остатком.*

Пример. Разделим многочлен $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2$ на многочлен $g(x) = x^2 + 3x + 1$. Для выполнения деления используем прием деления «уголком».

$$
\begin{array}{r|l}
\_3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2}
3x^4 + 9x^3 + 3x^2 & 3x^2 - 4x + 8 \quad \textit{неполное частное} \\ \cline{1-1}
\_{-4x^3} - 4x^2 + 2 & \\
-4x^3 - 12x^2 - 4x & \\ \cline{1-1}
\_8x^2 + 4x + 2 & \\
8x^2 + 24x + 8 & \\ \cline{1-1}
-20x - 6 & \textit{остаток}
\end{array}
$$

В итоге получаем

$3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2 = (x^2 + 3x + 1)(3x^2 - 4x + 8) - 20x - 6$

2.2. Алгоритм Евклида

Теорема: для любых многочленов f(x) и g(x) из P(x), если f(x) не делится на g(x), существуют многочлены $q_0(x), q_1(x), \ldots, q_s(x) r_1(x), r_2(x), \ldots, r_s(x)$ из P[x] такие что имеют место условия:

1. $f(x)= g(x)q_0(x)+r_1(x)$
   $g(x)= r_1(x)q_1(x)+r_2(x)$
   $r_1(x)= r_2(x)q_2(x)+r_3(x)$
   ……………………………..
   $r_{s-2}(x)=r_{s-1}(x)q_{s-1}(x)+r_s(x)$
   $r_{s-1}(x)=r_s(x)q_s(x)$
2. $deg\ g(x)>deg\ r_1>\ldots>deg\ r_s(x)$
3. $НОД\ (f(x),g(x))=r_s(x)$

Пример. Найти НОД f(x),g(x), если $f(x)=2x^4-4x^3+x^2-x+2$, $g(x)=3x^3-x^2+3x-4$.

Замечание: Поскольку наибольший общий делитель двух многочленов над полем находится с точностью до постоянного множителя, то при нахождении с помощью алгоритма Евклида многочленов с целыми коэффициентами можно избежать дробей, умножая на любом шаге алгоритма, если надо делимое и делитель на подходящее целое число. Однако, при таком преобразовании меняются неполные частные.

Пример. Найти НОД ($2x^4-3x^3+x^2-x+2,\ 3x^3-x^2+3x-4$).

Решение. Применим алгоритм Евклида.

$2x^4-3x^3+x^2-x+2$ | $3x^3-x^2+3x-4$

$\_6x^4-9x^3+3x^2-3x+6$ | $2x - 7$

$6x^4-2x^3+6x^2-8x$

$\_\ -7x^3-3x^2+5x+6$

$-\_21x^3-9x^2+15x+18$

$-21x^3+7x^2-21x+28$

$-16x^2-+36x-10$

$8x^2-18x+5$

2) $3x^3-x^2+3x-4$ | $8x^2-18x+5$

$\_\ 24x^3-8x^2+24x-32$ | $3x+52$

$24x^3-54x^2+15x$

$46x^2+9x-32$

$\_184x^2+36x-128$

$\underline{184x^2\text{-}414x+115}$

$\underline{\underline{450x\text{-}243}}$

$50x\text{-}27$

3) $\underline{8x^2\text{-}18x+5}$ | $50x\text{-}27$

$\_200x^2\text{-}450x+125$ | $|4x+|171$

$\underline{200x^2\text{-}108x}$

$\underline{\underline{\text{-}342x+125}}$

$8550x\text{-}3125$

$\underline{\underline{8550x\text{-}4617}}$

$\underline{\underline{1492}}$

1

4) $\_50x\text{-}27$ | 1

$\underline{50x}$ | $50x\text{-}27$

-27

$\underline{-27}$

0

Последний ненулевой остаток и есть НОД *(f(x),g(x))*

Ответ: НОД *(f(x),g(x))=1*.

2.3 Вопросы для самопроверки

1. Любой ли многочлен можно взять в качестве делителя?

2. Верно ли, что если первый многочлен делится на второй, то степень первого многочлена, больше степени второго?

3. Верно ли, что в кольце Q[x] (Z[x]) всякий многочлен делится на всякий многочлен нулевой степени?

2.4 Задачи для самостоятельного решения

Найти НОД многочленов f(x) и g(x):

1. $f(x) = 3x^6 - x^5 - 3x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1, \in R[x]$
$g(x) = 3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9$
2. $f(x) = 2x^6 - 5x^5 + x^3 + x^2 + 5x - 3,\ \in R[x]$
$g(x) = 2x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x$
3. $f(x) = x^4(4 + i)x^3 + (i - 1),\ \in C[x]$
$g(x) = ix^3 - (3 - 2i)x^2 + i$
4. $f(x) = x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x - 10,\ \in R[x]$
$g(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + 19x - 12$
5. $f(x) = ix^5 + (1 + i)x^4 - ix^3 - (3 + 2i)x^2 - 3x - i,\ \in C[x]$
$g(x) = x^4 - (2 - i)x^3 - x^2 - (2 + i) + 1$
6. $f(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 1,\ \in R[\text{x}]$

$g(x) = 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2$

7. $f(x)$=$x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x - 2$, ∈R[x]

$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

8. $f(x) = x^6 - 4ix^5 - x^4 + (i + 1)x^3 - x^2 - 1$, $\in C[x]$

$g(x) = x^5 + ix^4 + x^3 - (i - 1)x^2 + x + i$

9. $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$, ∈R[x]

$g(x) = 3x^4 - 7x^3 - x^2 - x - 2$

10. $f(x) = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$, $\in Q[x]$

$g(x) = x^5 + x^2 - x + 1$

3 Неприводимые многочлены

Определение. Многочлен $p(x)$ с коэффициентами из поля P называется неприводимым над полем P, если его степень ≥1 и он не представим в виде произведения многочленов из P[x] степени ≥1. Многочлен $f(x) \in P[x]$ называется приводимым над полем P, если он представим в виде произведения многочленов из P[x] степени ≥1.

Таким образом кольцо многочленов P[x] состоит из элементов поля P (это нулевой многочлен и многочлены степени 0), а остальные многочлены являются либо приводимыми, либо неприводимыми.

3.1 Основные свойства неприводимых многочленов

1. Делителем неприводимого над полем P многочлена $p(x)$ являются лишь ненулевые элементы поля P.

2. Если $p(x)$ *и* $q(x)$ неприводимы над полем P, $p(x)=kq(x)$, где k – *ненулевой элемент поля P.*

3. Если многочлен $p(x)$ неприводим над полем *P,* то для любого многочлена $f(x) \in P[x]$ либо $f(x) \vdots p(x)$, либо $f(x)$ и $p(x)$ взаимно просты.

4. Если многочлен $p(x)$ неприводим над полем P и для многочленов $f(x)$ *и* $h(x)$ $\in P[x]$ имеет место $f(x) \cdot h(x) \vdots p(x)$, то хотя бы один из многочленов $f(x)$ или $h(x)$ делится на $p(x)$,

3.2 Разложение многочлена в произведение неприводимых множителей

Теорема (о факторизации многочленов) Всякий многочлен, определенный над полем P, либо неприводим над этим полем, либо представим в виде произведения неприводимых многочленов над этим полем, если этот многочлен отличен от нулевого и степень его не меньше единицы. Причем его разложение однозначно с точностью до порядка следования множителей и до множителей – элементов поля P.

Каноническим разложением многочлена f(x) над P называется представления его в виде произведения неприводимых множителей над P, т.е. $f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}(x)$, *где* $p_1(x),\ldots,p_s(x)$ – неприводимые многочлены над P с коэффициентом при старшем члене равным единице.

Определение. Будем говорить, что многочлен $f(x)$ не имеет кратных множителей, если всякий его неприводимый множитель имеет кратность 1. В противном случае, будем говорить, что многочлен имеет кратные множители

Например, многочлен $f(x) = (x^2+1)(x-1)$ не имеет кратных множителей, а многочлен $h(x) = (x^2-1)(x-1)$ имеет кратный множитель $(x-1)$ кратности 2.

Теорема. Если для многочлена $f(x)$ над числовым полем P многочлен $p(x)$ над тем же полем является неприводимым множителем кратности α, то для производной $f'(x)$ он будет неприводимым множителем кратности α-1.

Следствие 1. Если $f(x) = p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}(x)$ – каноническое разложение многочлена на неприводимые множители, то $f'(x) = p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s-1}(x)\cdot q(x)$, где $f(x)$ и $q(x)$ взаимно просты.

Следствие 2. Многочлен $f(x)$ не имеет кратных множителей тогда и только тогда, когда он взаимно прост со своей производной.

Следствие 3. Элемент $c \in P$ является кратным корнем многочлена f(x) тогда и только тогда, когда он является корнем его производной.

Следствие 4. Если $f(x) = p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}(x)$ – каноническое разложение многочлена на неприводимые множители, то *НОД(f(x),* $f'(x)) = p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s-1}(x)$

3.3 Алгоритм отделения кратных множителей

Отделить кратные множители многочлена f(x) – это значит представить его в виде $a_0X_1^1X_2^2\ldots X_s^s$ *где Xк* – произведение неприводимых многочленов кратности k.

Рассмотрим алгоритм получения множителей $X_к$.

Шаг 1. Если $f(x) = a_0X_1^1X_2^2\ldots X_s^s$, то

$d_1(x)$=НОД($f(x), f'(x)$)$= a_0X_2X_3^2\ldots X_s^{s-1}$

$d_2(x)$=НОД($d_1(x), d_1'(x)$)$= a_0X_3\ldots X_s^{s-2}$

$d_3(x)$=НОД$(d_2(x), d_2\ (x)) = a_0 X_4 \dots X_s^{s-3}$

……………………………………………

$d_{s-1}(x)$=НОД$(d_{s-2}(x), d'_{s-2}(x)) = a_0 X_s$

Все остальные НОД будут = a_0.

Шаг 2. $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_s = \frac{f(x)}{d_1(x)} = E_1(x);$

$X_2 \cdot X_3 \cdot \ldots \cdot X_s = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = E_2(x);$

$X_3 \cdot \ldots \cdot Xs = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = E_3(X)$

…………………………………………..

$Xs = \frac{d_{s-1}(x)}{d_s} = Es(x)$

Шаг 3. $X_1 = \frac{E_1(x)}{E_2(x)}$, $X_2 = \frac{E_2(x)}{E_3(x)}$, …, $X_{s-1} = \frac{E_{s-1}(x)}{E_s(x)}$, $X_s = E_s(x);$

Чтобы преобразования были проще, можно Получающиеся наибольшие общие делители заменить ассоциированными им многочленами.

Пример. Отделить кратные множители многочлена

$f(x)=x^6-3x^5+3x^4+2x^3-9x^2+9x-3 \in R[x]$.

Решение:

Найдем $d_1(x)$= НОД$(f(x), f'(x))$: $f'(x)=6x^5-15x^4+12x^3+6x^2-18x+9$

$$\begin{array}{l|l}
_6x^6-18x^5+18x^4+12x^3-54x^2+54x-18 & 6x^5-15x^4+12x^3+6x^2-18x+9 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^6-15x^5+12x^4+6x^3-18x^2+9x} & x-1 \\
\underline{\underline{-\ 3x^5+6x^4+6x^3-36x^2+45x-18}} & \\
_-6x^5+12x^4+12x^3-72x^2+90x-36 & \\
-\ \underline{6x^5+15x^4-12x^3-6x^2+18x-9} & \\
\qquad \underline{\underline{-3x^4+24x^3-66x^2+72x-27}} & \\
\qquad \quad x^4-8x^3+22x^2-24x+9 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
_6x^5-15x^4+12x^3+6x^2-18x+9 & x^4-8x^3+22x^2-24x+9 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^5-48x^4+132x^3-144x^2+54x} & 6x+33 \\
\quad _33x^4-120x^3+150x^2-72x+9 & \\
\quad \underline{\quad 33x^4-264x^3+726x^2-792x+297} & \\
\qquad \quad \underline{\underline{144x^3-576x^2+720x-288}} & \\
\qquad \qquad x^3-4x^2+5x-2 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{\ }\ x^4-8x^3+22x^2-24x+9 & x^3-4x^2+5x-2 \\
\quad \underline{x^4-4x^3+5x^2-2x} & \overline{x-4} \\
\quad\quad \underline{\ }-4x^3+17x^2-22x+9 & \\
\quad\quad\quad \underline{-4x^3+16x^2-20x+8} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad x^2-2x+1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{\ }x^3-4x^2+5x-2 & x^2-2x+1 \\
\underline{\ x^3-2x^2+x} & \overline{x-2} \\
\quad \underline{\ }-2x^2+4x-2 & \\
\quad\quad \underline{-2x^2+4x-2} & \\
\quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$d_1(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$, $\quad d_1' = 2(x-1)$;

$d_2(x)=x-1$, $\quad d_2'(x)=1$;

$d_3(x)=1$.

Найдем: $E_1(x)$, $E_2(x)$ и $E_3(x)$.

$E_1(x)=\dfrac{f(x)}{d_1(x)}=x^4-x^3+3x-3$

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{\ }x^6-3x^5+3x^4+2x^3-9x^2+9x-3 & x^2-2x+1 \\
\underline{\ x^6-2x^5+x^4} & \overline{x^4-x^3+3x-3} \\
\quad \underline{\ }-x^5+2x^4+2x^3-9x^2+9x-3 & \\
\quad\quad \underline{-x^5+2x^4-x^3} & \\
\quad\quad\quad\quad \underline{\ }3x^3-9x^2+9x-3 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad \underline{3x^3-6x^2-3x} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{\ }-3x^2+6x-3 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{-3x^2+6x-3} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$E_2(x)=\dfrac{d_1(x)}{d_2(x)}=x-1$

$E_3(x)=\dfrac{d_2(x)}{d_3(x)}=x-1$

$X_1=\dfrac{E_1(x)}{E_2(x)}=x^3+3$

Разделим $E_1(x)$ на $E_2(x)$ по схеме Горнера

	1	-1	0	3	-3
1	1	0	0	3	0

$X_2=\frac{E_2(x)}{E_3(x)}=1$

$X_3=E_3(x)=x-1$

Ответ: $f(x)=X_1\cdot X_3^3=(x^3+3)(x-1)^3$

Замечание. При выполнении задания необходимо помнить, что при вычислении НОД промежуточные многочлены можно умножать на элементы поля, как и сами значения $d_1(x)$, $d_2(x)$, … . При отыскании E_1, E_2, …, E_S, X_1, X_2, …, X_S нельзя умножать остаток на элементы поля.

3.4 Вопросы для самопроверки

1. Над каким полем неприводимы многочлены:

а) $2x^2+x-6$;

б) $3x^2-5x+5$;

в) x^2+6x+7;

г) $2x^2-11x+9$;

д) x^4-x^2-2x-1?

2. Если многочлен $p(x)$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$, то будут ли неприводимыми над этим полем многочдены $3p(x)$, $xp(x)$, $(p(x))^2$?

3. Какова связь между НОД и НОК двух данных многочленов?

4. В каком случае алгоритм отделения кратных множителей приводит к разложению данного многочлена в произведение неприводимых множителей?

3.5 Задачи для самостоятельного решения

Отделить кратные множители многочлена:

1. $f(x)=x^5+6ix^4-14x^3-16ix^2+9x+2i$
2. $f(x)=x^8+2x^7+5x^6+6x^5+8x^4+6x^3+5x^2+2x+1$
3. $f(x)=x^6-4x^5+7x^4-8x^3+7x^2-4x+1$
4. $f(x)=x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2-3x-1$
5. $ff(x)=x^6+6x^5+3x^4+6x^3+9x^2+12x+3$
6. $f(x)=x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1$
7. $f(x)=x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$
8. $f(x)=2x^6+6x^5+6x^4+x^3-3x^2-1$
9. $f(x)=x^7-7x^6+18x^5-20x^4-x^3-15x^2+6$
10. $f(x)=x^6-2x^5-9x^4+4x^3+31x^2+30x+9$

4 Комплексные числа

4.1 Основные понятия

Комплексными числами называются пары (x, y) действительных чисел x и y, если для них определено понятие равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

1) два комплексных числа (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$;

2) суммой двух комплексных чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) называется комплексное число $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$;

3) произведением двух комплексных чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) называется комплексное число $(x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Для обозначения равенства, суммы, произведения и других операций над комплексными числами применяются те же знаки, что и для действительных чисел.

Таким образом, по определению комплексного числа:

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Комплексное число $(0,1)$ называют *мнимой единицей* и обозначают буквой i, т.е. $i = (0,1)$. По формуле произведение

$$i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Из формул вытекают также равенства

$$(0, y) = (0,1)(y,0) = iy, \quad (x, y) = (x,0) + (0, y) = x + iy.$$

Таким образом, каждое комплексное число (x, y) можно представить в виде $x + iy$. Запись комплексного числа в виде $x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа. Комплексные числа вида iy

называют чисто мнимыми. В частности число 0, т.е. комплексное число (0.0), является единственным числом, которое одновременно и действительное и чисто мнимое.

Комплексное число $x+iy$ принято обозначать одной буквой z, т.е. $z=x+iy$. Число x называют действительной, а $y-$мнимой частью комплексного числа $z=x+iy$. Для этих чисел приняты обозначения: $x=\operatorname{Re}(x+iy)=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im}(x+iy)=\operatorname{Im} z$.

Комплексное число $x-iy$ называют *сопряженным* с комплексным числом $x+iy$ и обозначают $\overline{z}$:

$$\overline{z}=\overline{x+iy}=x-iy$$

Очевидно, $\overline{(\overline{z})}=z$ для любого комплексного числа z. Равенство $\overline{z}=z$ имеет место только тогда, когда $z-$действительное число.

Число $\sqrt{x^2+y^2}$ называют модулем комплексного числа $z=x+iy$ и обозначают $|z|$:

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Очевидно, $|z|\geq 0$, причем $|z|=0$, только, если $z=0$.

Отметим две формулы:

$$|z|=|\overline{z}|$$

$$z\overline{z}=|z|^2$$

$$z\,\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2.$$

Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами:

1) коммутативности: $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$;

2) ассоциативности: $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$;

3) дистрибутивности: $(z_1+z_2)\,z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

Числа нуль и единица обладают в множестве комплексных чисел теми же свойствами, что и в множестве действительных чисел. А именно, для любого комплексного числа z имеют место равенства: $z+0=z, \quad z\cdot 1=z$.

4.2 Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме

$x_1+iy_1=x_2+iy_2$ тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

При суммировании двух комплексных чисел складываются их действительные и мнимые части

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

Произведение двух комплексных чисел находится так же, как произведение двух многочленов. При умножении перемножаются попарно все слагаемые, затем приводятся подобные члены, с учетом того, что $i^2=-1$.

Покажем это. $(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2+iy_1x_2+ix_1y_2+i^2y_1y_2$. $=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2+iy_1x_2+ix_1y_2-y_1y_2$.

Во множестве комплексных чисел операция сложения обладает обратной операцией, называемой вычитанием. Это означает, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 существует, и при том только одно, число z, удовлетворяющее равенству:

$$z+z_2=z_1$$

Это число называют разностью чисел z_1 и z_2 и обозначают z_1-z_2. Для комплексных чисел $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$:

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

Операция, обратная умножению комплексных чисел, называется делением, а частным двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое число z, которое удовлетворяет условию:

$$z \cdot z_2 = z_1$$

и обозначается z_1 / z_2 или $z_1 : z_2$.

Докажем, что уравнение имеет единственное решение для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2, если $z_2 \neq 0$. Умножая обе части уравнения на комплексное число $\overline{z}_2$ и используя формулу умножения сопряженных комплексных чисел, получим $z\left|z_2\right|^2 = z_1\overline{z}_2$, откуда умножением на число $\dfrac{1}{\left|z_2\right|^2}$ находим $z = \dfrac{z_1\overline{z}_2}{\left|z_2\right|^2}$. Таким образом,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{\left|z_2\right|^2}, \quad z_2 \neq 0$$

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то формула имеет вид:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{\left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 - iy_2\right)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Чтобы найти частное двух комплексных чисел z_1 и z_2, надо числитель и знаменатель дроби z_1 / z_2 умножить на комплексное число $\overline{z}_2$, сопряженное знаменателю.

*Пример***.** Даны комплексные числа $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -3 + 2i$, $z_3 = -1 - 3i.$. Найти: $z_1 + z_2$, $z_2 - z_3$, $z_1 - \overline{z}_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2.

Решение. Используем выше рассмотренные формулы, получаем.

$z_1 + z_2 = \left(2 - i\right) + \left(-3 + 2i\right) = \left(2 - 3\right) + i\left(-1 + 2\right) = -1 + i$

$z_2 - z_3 = \left(-3 + 2i\right) - (-1 - 3i) = \left(-3 - \left(-1\right)\right) - i\left(2 - \left(-3\right)\right) = -2 + 5i$;

$\overline{z}_2 = -3 - 2i$, $z_1 - \overline{z}_2 = \left(2 - i\right) - \left(-3 - 2i\right) = 5 + i$;

$z_1 \cdot z_2 = (2 - i) \cdot (-3 + 2i) = -6 + 4i + 3i - 2i^2 = -4 + 7i$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-i}{-3+2i}=\frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-6+3i-4i+2i^2}{9-4i^2}=$$

$$=\frac{-8-i}{13}=-\frac{8}{13}-i\frac{1}{13}.$$

*Пример***.** Даны комплексные числа $z_1=2-i,\ z_2=-3+2i,$

$z_3=-1-3i.$ Найти комплексное число $z=\dfrac{z_1+z_1z_2+z_3^2}{z_1-z_3}.$

Решение. $z_1\cdot z_2=(2+3i)\cdot(1-2i)=2-4i+3i-6i^2=8-i$;

$$z_3^2=\left(3+i\right)^2=9+6i+i^2=8+6i$$

$$z_1+z_1z_2+z_3^2=\left(2+3i\right)+\left(8-i\right)+\left(8+6i\right)=18+8i;$$

$$z_1-z_3=\left(2+3i\right)-\left(3+i\right)=-1+2i;$$

$$z=\frac{18+8i}{-1+2i}=\frac{\left(18+8i\right)\left(-1-2i\right)}{\left(-1+2i\right)\left(-1-2i\right)}=\frac{-18-8i-36i-16i^2}{1-4i^2}=-\frac{2}{5}-i\frac{44}{5}.$$

4.3 Геометрическая интерпретация комплексного числа

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $x+iy$ изображается точкой плоскости с координатами $\left(x,y\right)$ и эта точка обозначается той же буквой z. Такое соответствие, очевидно, является однозначным. При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые – точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется действительной, а ось ординат мнимой осями. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

Комплексное число z изображают также вектором с началом в точке 0 и концом в точке z (рис. 1). Соответствие между комплексными числами и векторами комплексной плоскости также взаимно однозначно. Из формулы (5) и рисунка 1 видно, что длина вектора z равна модулю комплексного числа $|z|$.

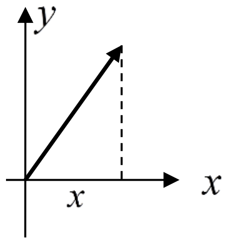

Рис. 1

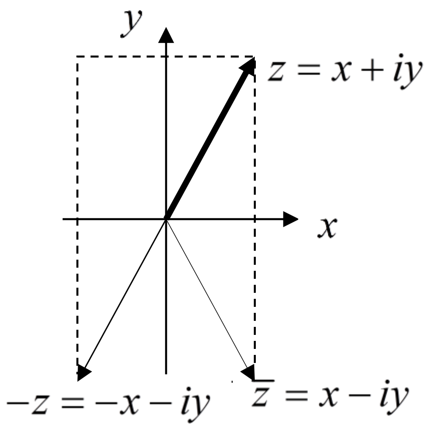

Рис. 2

Числа z и $-z$ симметричны относительно точки 0, а числа z и $\overline{z}$ относительно действительной оси, так как (рис. 2)

$$-z = (-x) + i(-y) = (-x, -y),$$

$$\overline{z} = x + i(-y) = (x, -y).$$

Векторная интерпретация наглядно иллюстрирует операции сложения и вычитания комплексных чисел. Число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по обычному правилу сложения векторов z_1 и z_2 (правило параллелограмма). Вектор $z_1 - z_2$ строится как сумма векторов z_1 и $-z_2$ (рис.3).

*Пример***.** Привести геометрическую интерпретацию комплексных чисел $z_1 = 2 + 2i$ и $z_2 = -1 - 3i$, их суммы и разности.

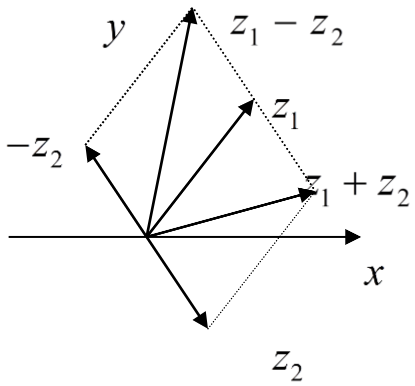

Рис. 3

Решение. Построим радиус-векторы r_1 и r_2 точек $M_1(2,2)$ и $M_2(-1,-3)$ (рис. 4). Эти точки и их радиус-векторы являются изображением комплексных чисел $z_1 = 2+2i$, $z_2 = -1-3i$. Сумму и разность векторов z_1 и z_2 строим по правилу параллелограмма (рис. 5).

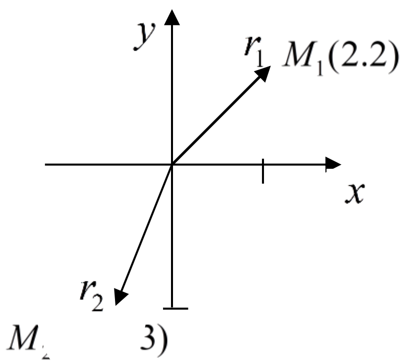

Рис. 4

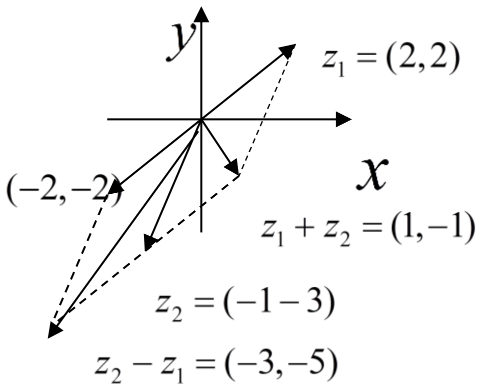

Рис. 5

4.4 Тригонометрическая форма комплексного числа

Положение точки $z = x + iy$ однозначно определяется не только декартовыми координатами x, y, но и полярными координатами r, φ, где $r = |z|$ – расстояние от точки O до точки z, $\varphi -$угол между действительной осью и вектором z (рис. 6). При этом, если отсчет ведется против часовой стрелки, величина угла считается положительной, и, если по часовой стрелке – отрицательной. Этот угол называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\arg z$. Если полярную и декартову системы координат

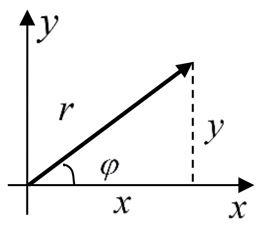

Рис. 6

совместить так, что их начала совпадают, а полярная ось направлена по оси Ox, то (рис. 6)

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Следовательно, любое комплексное число $z = x + iy \neq 0$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Эта запись комплексного числа называется тригонометрической формой комплексного числа, где r – модуль, а φ – аргумент комплексного числа.

Из формул вытекает, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Аргумент комплексного числа $z = x + iy$ определяется из системы уравнений (17). Система имеет бесконечное множество решений $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где φ_0 – одно из решений системы. Аргумент числа $z = 0$ не определен.

Таким образом, аргумент комплексного числа определяется неоднозначно с точностью до слагаемого $2\pi k$:

$$\arg z = \varphi_0 + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В качестве главного значения аргумента обычно берут значение в промежутке $(-\pi, \pi]$ или $[0; 2\pi)$. При записи комплексного числа в тригонометрической форме часто используют главное значение аргумента, так как $\sin(\varphi + 2\pi k) = \sin\varphi$, $\cos(\varphi + 2\pi k) = \cos\varphi$.

Аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$ удовлетворяет также уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi = y/x$$

Если $|z| = 1$, $\varphi = \arg z$, то имеем $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Комплексное

Формула Муавра

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Пример. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z = 2 + i2$; б) $z = -1 + i\sqrt{3}$; в) $z = -\sqrt{3} - i$, г) $z = 1 - i$; д) $z = 3i$.

Решение. а) $z = 2 + i2$, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, точка $z = 2 + i2$ лежит в первой четверти, по формуле (20) $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = arctg1 = \dfrac{\pi}{4}$. Тогда в тригонометрической форме: $z = 2 + i2 = 2\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\pi}{4} + i\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$.

б) $z = -1 + i\sqrt{3}$. $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Точка $-1 + i\sqrt{3}$ лежит во второй четверти комплексной плоскости, $\arg z = -arctg\sqrt{3} + \pi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}$. Тогда тригонометрическая форма комплексного числа $z = -1 + i\sqrt{3}$: $z = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

в) $z = -\sqrt{3} - i$, $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, Точка $-\sqrt{3} - i$ лежит в третьей четверти, поэтому $\arg z = arctg\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \dfrac{\pi}{6} - \pi = -\dfrac{5\pi}{6}$.

$z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} - i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

г) $z = 1 - i$. $r = |z| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Точка $1 - i$ лежит в четвертой четверти, поэтому $\arg z = arctg\left(-1\right) = -arctg1 = -\dfrac{\pi}{4}$,

$z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

д) $z = 3i$. $r = |z| = \sqrt{0+3^2} = 3$, $\arg z = arctg\dfrac{3}{0} = arctg\infty = \dfrac{\pi}{2}$.

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

*Пример***.** Записать комплексное число z в алгебраической форме, если $|z| = \sqrt{13}$ а $\arg z = \pi - \operatorname{arctg} 3/2$.

Решение. Чтобы записать число z в алгебраической форме $z = x + iy$, надо найти его действительную и мнимую части. По условию $\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, следовательно, x и y имеют разные знаки. Из формул (20) следует, что точка z находится во 2 четверти, а это значит, что $x < 0,\ y > 0$. Из системы уравнений $y/x = -2/3,\ \ x^2 + y^2 = 13$ и учетом знаков x и y, получим: $x = -2,\ y = 3$ и, соответственно, $z = -2 + 3i$.

4.5 Операции над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$, $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$.

Тогда $z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) =$

$$= r_1 r_2\left[\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right] =$$

$$= r_1 r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)} =$$

$$= \frac{r_1\left[\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + i\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1\right)\right]}{r_2\left(\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2\right)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right).$$

Таким образом,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2 \right) + i \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2 \right) \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2 \right) + i \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2 \right) \right)$$

Из формул следует, что

$$\left| z_1 z_2 \right| = \left| z_1 \right| \cdot \left| z_2 \right|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\left| z_1 \right|}{\left| z_2 \right|}, \ \arg\left(z_1 z_2 \right) = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

При умножении двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются, при делении модули делятся, а аргументы вычитаются.

Из геометрической интерпретации комплексных чисел следует правило равенства комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Таким образом, $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда

$$\left| z_1 \right| = \left| z_2 \right| \ \text{ и } \ \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi$$

где k - целое число.

Определение. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на $2\pi k$.

Пример. Пусть $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = -\sqrt{3} - i$. Найти $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$,

используя тригонометрическую форму z_1, z_2.

Решение. Из примера 4 $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \sin\dfrac{2\pi}{3} \right)$,

$$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right).$$

По формулам

$$z_2 z_2 = 2 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6} \right),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)\right)=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$z^n=\left(r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right)^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right),\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

При возведении комплексного числа в степень n, его модуль возводится в степень n, а аргумент умножается на n.

Пример. Вычислить $\left(1+i\right)^{14}$.

Решение. Представим число $z=1+i$ в тригонометрической и показательной форме. Модуль и аргумент z: $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\arg z=arctg1=\frac{\pi}{4}$, $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

По формулам

$$z^{14}=\left(\sqrt{2}\right)^{14}e^{14\frac{\pi}{4}i}=\left(\sqrt{2}\right)^{14}\left(\cos 14\frac{\pi}{4}+i\sin 14\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$128\left(\cos\frac{7\pi}{2}+i\sin\frac{7\pi}{2}\right)=128\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-128i \text{ в}$$

Комплексное число z называется корнем $n-й$ степени из числа a (обозначается $\sqrt[n]{a}$), если $z^n=a$. Покажем, что при $a\neq 0$ имеется ровно n различных корней $n-й$ степени из числа a. Рассмотрим уравнение

$$z^n=a$$

где $a\neq 0$ - комплексное число, n - натуральное число. Пусть $a=re^{i\varphi}$, где $r=\left|a\right|,\ \rho=\left|z\right|$. Из этого условия находим: $\rho^n=r$, $n\theta=\varphi+2\pi k$ (k - целое число), откуда $\rho=\sqrt[n]{r}$, $\theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n}$, и

В тригонометрической форме эти корни имеют вид:

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad k=0,1,\ldots,n-1$$

При извлечении корня степени n из комплексного числа из его модуля извлекается корень степени n, а аргумент делится на n.

На комплексной плоскости точки (39) расположены в вершинах правильного $n-$ угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке 0 (рис. 8).

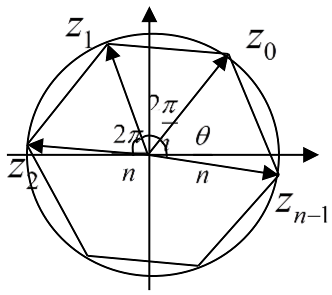

Рис. 8

Пример. Найти: $\sqrt[4]{-1}$,

Решение.

$$k=0, \quad z_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

$$k=1 \quad z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$

$$k=2 \quad z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

$$k=3 \quad z_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

На комплексной плоскости точки z_0, z_1, z_2, z_3 расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса $R=1$ с центром в точке O. Угол между векторами z_0, z_1, z_2, z_3 равен $\pi/2$, угол, составляемый вектором z_0 с осью Ox, равен аргументу этого числа и равен $\varphi_0=\pi/4$ (рис. 9).

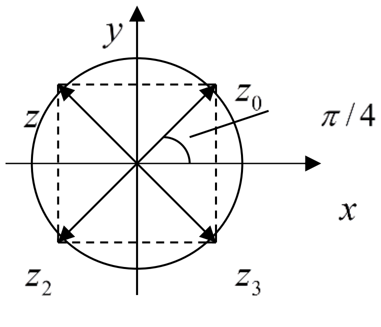

Рис. 9

$$k=0,\quad z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}},$$

$$k=1\quad z_1=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},$$

$$k=2\quad z_2=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}=\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

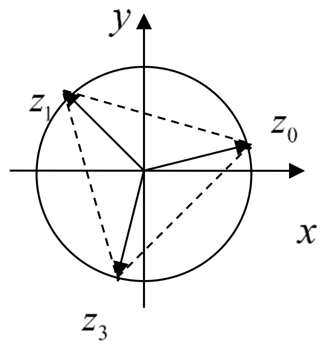

Рис. 10

На комплексной плоскости точки z_0, z_1, z_2 расположены в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt{2}$ с центром в точке 0 (рис. 10).

Пример. Решить уравнения: $z^3-1=0$, $z^6-2z^3+4=0$

Решение. а) Запишем уравнение $z^3=1$, откуда $z=\sqrt[3]{1}$. Уравнение имеет три корня:

$$k=0,\quad z_0=c\mathrm{os}\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k=1,\quad z_1=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k=2,\quad z_2=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

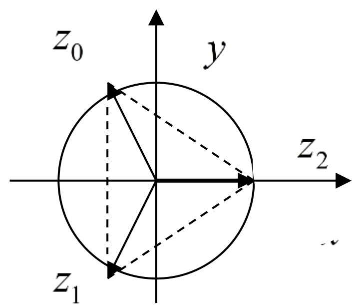

Рис. 11

Эти корни располагаются на комплексной плоскости в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $R=1$ с центром в точке O (рис. 11)

б) $z^6-2z^3+4=0$. Подстановкой $t=z^3$ сведем уравнение к квадратному уравнению: $t^2-2t+4=0$, $D=-12=12i^2$, $t_{1,2}=1\pm i\sqrt{3}$.

Подставляя полученные значения t в $t=z^3$, получим систему уравнений

$$\left[\begin{array}{l} z^3=1-i\sqrt{3} \\ z^3=1+i\sqrt{3} \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} z=\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}} \\ z=\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Представим комплексные числа $1\pm i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

$$\left|1\pm i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1+3}=2,\ \arg\left(1\pm i\sqrt{3}\right)=arctg\left(\pm\sqrt{3}\right)=\pm\frac{\pi}{3}.$$

В результате получим шесть различных корней:

$$k=0\quad z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right),$$

$$k=1\quad z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right),$$

$$k=2\quad z_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}\right),$$

$$l=0\quad z_4=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}-i\sin\frac{\pi}{9}\right),$$

$$l=1\quad z_5=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right),$$

$$l=2\quad z_6=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}\right).$$

4.6 Вопросы для самопроверки

1. Как строятся точка и вектор, изображающие комплексное число $z=x+iy$? Как они между собой связаны?

2. Каков геометрический смысл сложения комплексных чисел?

3. Что называется действительной и мнимой частью комплексного числа?

4. Какие числа называются чисто мнимыми?

5. Как определяется мнимая единица? Чему равен квадрат мнимой единицы?

6. Сформулировать правило нахождения суммы двух комплексных чисел.

7. Сформулировать правило нахождения произведения двух комплексных чисел.

8. Какими свойствами обладают операции сложения и умножения комплексных чисел?

9. Сформулировать правило нахождения разности двух комплексных чисел

10. Сформулировать правило нахождения частного двух комплексных чисел.

11. Как связаны модули и аргументы равных комплексных чисел?

12. Как связаны аргументы сопряженных комплексных чисел?

13. Чему равны модуль и аргумент произведения и частного двух комплексных чисел?

14. В чем состоит формула Муавра?

4.7 Задания для самостоятельного решения

1. Даны комплексные числа $z_1 = 8 + 3i,\ z_2 = 8 + 6i$. Найти: а) $z_1 + z_2$, б) $z_1 - z_2$, в) $z_1 \cdot z_2$, г) z_1 / z_2.

2. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i,\ z_2 = 3 - 4i,\ z_3 = 1 - 2i$. Найти значение выражения $\dfrac{(z_1 + z_3) z_2}{z_3}$.

3. Представить в показательной форме комплексные числа: а) $2 - 2i$, б) $-1 + i$, в) $-i$, г) -4.

4. $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i$. Представив z_1 и z_2 в тригонометрической форме, найти: а) $z_1 \cdot z_2$, б) z_1 / z_2.

5. $z = -\sqrt{3} + i$. Найти: а) z^{10}, б) $\sqrt[3]{z^2}$.

6. Найти: а) i^9, б) i^{12}, в) $\left(\sqrt{3} - i\right)^4$, г) $\left(-1 + i\right)^5$.

7. Найти: а) $z = \dfrac{(1-i)^{100}}{\left(\sqrt{3} + i\right)^{50}}$, б) $z = \dfrac{\left(\sqrt{3} + i\right)^{50}}{(1+i)^{100}}$, в) $z = \dfrac{(-1+i)^{50}}{\left(-\sqrt{3} + i\right)^{25}}$.

8. При каких целых значения n справедливо равенство $(1+i)^n = (1-i)^n$.

9. Найти корни уравнений: а) $z^2 + 4 = 0$; б) $z^2 - 2z + 2 = 0$; в) $z^4 + 64 = 0$, г) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$

10. Построить на комплексной плоскости множество точек: а) $|z| = 3$; б) $\arg z = \pi / 3$; в) $|z| \le 4$; г) $|z - 3 - 3i| < 5$; д) $|z + 1| \le 5,\ -1 < \operatorname{Im} z \le 2$

5 Многочлены, определенные над числовыми полями

5.1 Многочлены, определенные над полем комплексных чисел

Теорема (основная теорема алгебры). Всякий многочлен с комплексными коэффициентами степени $n\geq 1$ имеет по крайней мере один комплексный корень.

Теорема. Неприводимыми над полем C являются многочлены первой степени и только они.

Следствие 1. Всякий многочлен $f(z) \epsilon$ C[z] степени $n\geq 1$*представим в виде* $f(z)=a_0(z-c_1)(z-c_2)\dots(z-c_n)$.

Следствие 2. Всякий многочлен $f(z)$ с комплексными коэффициентами представим в виде $f(z)=a_0(z-c_1)^{m_1}(z-c_2)^{m_2}\dots(z-c_n)^{m_n}$..

Следствие 3. Многочлен $f(z)$ с комплексными коэффициентами степени n имеет n комплексных корней, с учетом их кратности.

Пример. Найдите приведенный многочлен наименьшей степени, имеющий двукратные корни 2 и 1+i.

Решение. Искомым будет многочлен

$$f(z) = (z-2)^2\big(z-(1+i)\big)^2 = z^4 - 2(3+i)z^3 + 2(4+5i)z^2 -$$
$$-8(1+2i)z + 8i.$$

5.2 Формулы Виета

Пусть $f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = a_0(z-c_1)(z-c_2)\dots(z-c_n)$.

Используя это равенство, выведем формулы, связывающие корни данного многочлена с его коэффициентами. Они называются формулами Виета.

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_т = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$c_1c_2 + c_1c_3 +,,, + c_{n-1}c_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_1c_2 \cdot \dots \cdot c_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

5.3 Многочлены, определенные над полем действительных чисел

Если *f(x) є R[x]*, то он обладает свойствами:

1. Если $\alpha=a+bi$ –корень многочлена *f(x)*, то и число $\alpha=a\text{-}bi$ также корень многочлена *f(x).*
2. Если *deg f(x)* – четное число, то *f(x)* либо не имеет действительного корня, либо их четное количество.
3. Если *deg f(x)* – нечетное число, то *f(x)* имеет нечетное количество действительных корней.
4. Неприводимыми могут быть многочлены степени не выше второй.

Канонический вид разложения многочлена f(x) представляет собой произведение многочленов 1-ой и 2-ой степени, причем многочлены 1-ой степени имеют один действительный корень, а многочлены 2-ой степени – 2 комплексных.

Пример. Построить многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий простые корни 2+3i и 4, а также двукратный корень 1-2i.

Решение: Многочлен, который мы должны построить лежит в R[x], поэтому если он имеет корень 2+3i кратности 1, то число 2-3i – также корень скомого многочлена кратности 1. Искомый многочлен имеет двукратный корень 1-2i, а значит и двукратный корень 1+2i. Учитывая, что 4 – простой корень, можем записать искомый многочлен в виде

$f(x)=(x-(2+3i))(x-(2-3i))(x-4)(x-(1-2i))^2(x-(1+2i))^2=x^5-10x^4+50x^3-150x^2+249x-260.$

5.4 Границы действительных корней многочлена с действительными коэффициентами

Пусть *f(x)* є R[x] и все его действительные корни принадлежат отрезку [*a*,*b*].

Определение. Число a є R в этом случае называют нижней границей действительных корней многочлена f(x) и обозначают a=НГх. Число b є R называют верхней границей действительных корней многочлена f(x) и обозначают b=ВГx.

Для отыскания границ действительных корней многочлена существует несколько способов: способ Маклорена, способ Лагранжа, метод Ньютона и др. Наиболее используемым является метод, основанный на применении теоремы о модуле старшего члена многочлена f(x).

Теорема. Если $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \in R[x]$, то для всех корней x многочлена $f(x)$ имеет место неравенство $|x| < \frac{A}{|a_0|} + 1$, где $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, то есть $-\frac{A}{|a_0|} - 1 < x < \frac{A}{|a_0|} + 1$.

Пример. Найти границы всех действительных корней многочлена

$f(x)=2x^5-6x^3+3x^2-7x-1$.

Решение:

$A = \max\{6,3,7,1\} = 7 \to -\frac{7}{2} - 1 < x < \frac{7}{2} + 1 \to -\frac{9}{2} < x < \frac{9}{2}$.

Ответ: $-\frac{9}{2} = \text{НГ}x, \frac{9}{2} = \text{ВГ}x$.

5.5 Отделение действительных корней многочлена методом Штурма

Конечная упорядоченная совокупность функций $f_0(x)$, $f_1(x),\ldots,f_s(x)$ называется системой функций Штурма, если она удовлетворяет условиям:

1. Никакие две рядом стоящие функции не имеют общих корней.
2. Если какая-либо из промежуточных функций $f_k(x)$ проходит через свой корень $x=c$, то рядом стоящие с ней функции $f_{k-1}(x)$ и $f_{k+1}(x)$ при $x=c$ имеют противоположные знаки.
3. Последняя функция в системе не имеет корня.
4. Если x, возрастая, проходит через корень $f_0(x)$, то произведение $f_0(x)\cdot f_1(x)$ меняет при этом знак с «-» на «+».

Если многочлен $f(x) \in R[x]$ не имеет кратных корней, то для него можно составить систему функций Штурмана по алгоритму:

$f_0(x)=f(x)$

$f_1(x)=f'(x)$

$f_2(x)=-r_1(x)$, $f_0(x)=f_1(x)q_0(x)+r_1(x)$

$f_3(x)=-r_2(x)$, $f_1(x)=f_2(x)q_1(x)+r_2(x)$ *и т.*д.

Определение. Совокупность действительных чисел имеет перемену знаков, если какие-нибудь рядом стоящие числа имеют разные знаки.

*Пример***.** Совокупность чисел 2, -3, 4, 5, -1, 6, 7 имеет 4 перемены знаков.

Если для многочлена $f(x)\in R[x]$ построена система функций Штурма $f_0(x)$, $f_1(x),\ldots,f_s(x)$, при $x=a$ будем иметь совокупность чисел $f_0(a)$, $f_1(a),\ldots,f_s(a)\in R$.
Будем обозначать $W(a)$ число перемен знаков в этой последовательности.

Теорема Штурма. Число действительных корней у многочлена $f(x)\in R[x]$, не имеющего кратных корней на $[a,b]$, где a и b не являются корнями $f(x)$ вычисляется по формуле $W(a)-W(b)$.

Пример. Определить число действительных корней многочлена

$f(x)=x^4-2x^3-4x^2+5x+5$ и границы каждого корня с точностью до 1.

Решение: Чтобы найти число всех действительных корней многочлена $f(x)$, необходимо найти границы всех его действительных корней и применить теорему Штурма. Найдем границы корней многочлена $f(x)$, используя формулы рассмотренные ранее:

$$\mathrm{A}=\max\{2,4,5,5\}=5 \to -\frac{5}{1}-1<x<\frac{5}{1}+1 \to -6<x<6.$$

т.е. все его действительные корни, если они есть, принадлежат промежутку $[-6;6]$.

Число действительных корней у $f(x)$ по теореме Штурма равно $W(a)-W(b)$. Составим систему функций Штурма для многочлена $f(x)$. Проверять, имеет ли $f(x)$ кратные корни мы не будем, т.к. если в системе Штурма последняя функция будет иметь действительный корень, то $f(x)$ имеет кратные корни.

$f_0(x)=f(x)=x^4-2x^3-4x^2+5x+5$

$f_1(x)=f'(x)=4x^3-6x^2-8x+5.$

Найдём $f_2(x)$.

Замечание. Так как, исходя из свойств функций, входящих в систему функций Штурма, учитываются знаки значений функций, будем умножать многочлены в ходе деления с остатком только на положительные числа.

$$\begin{array}{l|l}
\underline{x^4-2x^3-4x^2+5x+5} & \underline{4x^3-6x^2-8x+5} \\
_4x^4-8x^3-16x^2+20x+20 & |x|-1 \\
\underline{4x^4-6x^3-8x^2+5x} & \\
\quad \underline{_-2x^3-8x^2+15x+20} & \\
\quad\quad _-4x^3-16x^2+30x+40 & \\
\quad\quad \underline{-4x^3+6x^2+8x-5} & \\
\quad\quad\quad -22x^2+22x+45 &
\end{array}$$

По алгоритму построения системы функций Штурма, поменяем знаки у полученного при делении остатка.

$f_2(x)= 22x^2-22x-45$

$$\begin{array}{l|l}
\underline{4x^3-6x^2-8x+5} & \underline{22x^2-22x-45} \\
_44x^3-66x^2-88x+55 & |2x-|1 \\
\underline{44x^3-44x^2-90x} & \\
\quad _-22x^2+2x+55 & \\
\quad \underline{-22x^2+22x+45} & \\
\quad\quad \underline{-20x+10} & \\
\quad\quad -2x+1 &
\end{array}$$

$f_3(x) =2x-1$.

$$\begin{array}{l|l}
_22x^2-22x-45 & \underline{2x-1} \\
\underline{22x^2-11x} & 11x|-11 \\
\underline{-11x-45} & \\
\quad _-22x-90 & \\
\quad \underline{-22x-11} & \\
\quad\quad \underline{-79} & \\
\quad\quad -1 &
\end{array}$$

$f_4(x) = 1$.

Система функций Штурма имеет вид:

$f_0(x) =x^4-2x^3-4x^2+5x+5;$

$f_1(x) =4x^3-6x^2-8x+5;$

$f_2(x) = 22x^2-22x-45;$

$f_3(x) =2x-1;$

$f_4(x) = 1.$

Найдём число действительных корней многочлена $f(x)$.

Для этого составим таблицу:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$W(x)$
-6	+	-	+	-	+	4
0	+	+	-	-	+	2
6	+	+	+	+	+	0

Число действительных корней многочлена $f(x)$ равно:

$W(-6)$- $W(6)=4$-$0=4$.

$W(-6)$- $W(0)=4$-$2=2$

$W(0)$- $W(6)=2$-$0=2$

Получаем, что многочлен имеет четыре действительных корня, причем, два положительных и два отрицательных.

Определим границы каждого корня с точностью до единицы, это значит, что длина каждого указанного интервала, которому принадлежит один корень, должна быть не более 1.

Построим новую таблицу. Разбиение отрезка $[-6; 6]$ будем производить от точки 0, двигаясь с шагом 1 вверх и вниз постепенно.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$W(x)$
-2	+	-	+	-	+	4
-1	-	+	-	-	+	3
0	+	+	-	-	+	2
1	+	-	-	+	+	2
2	-	-	-	+	+	1
3	+	+	+	+	+	0

Ответ: Многочлен имеет 4 действительных корня, которые находятся в промежутках $[-2; -1][-1; 0][1; 2][2; 3]$.

5.6 Многочлены, определенные над полем рациональных чисел

Многочлен *f(x)* є Q[x] обладает свойствами:

1. Если *f(x)* с целыми коэффициентами и если $\frac{P}{q} \in Q$ – его корень, причем D(p,q)=1, то p является делителем свободного члена многочлена *f(x)*, а q – делителем коэффициента старшего члена *f(x)*.

2. Если α - целый корень многочлена *f(x)*єZ[x], то числа $\frac{f(1)}{1-\alpha}$ и $\frac{f(-1)}{1+\alpha}$ одновременно целые.

3. Многочлен *f(x)*єQ[x] степени 2 и 3 приводим тогда и только тогда, когда имеет хотя бы один рациональный корень.

4. Критерий Эйзенштейна: если для *f(x)*єZ[x], ged *f(x)*>1 существует простое число p, что

1) коэффициент при старшем члене *f*(x) не делится на p;

2) все остальные его коэффициенты делятся на p;

3) свободный член не делится на p^2; то *f(x)* неприводим над Q.

Пример: Найти все рациональные корни многочлена $f(x)=4x^5+4x^4-43x^3-34x^2+63x-18$.

Решение:

1 способ. Воспользуемся 1 свойством.

-18 ⋮ ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18,

4 ⋮ ±1, ±2, ±4.

Корнями многочлена *f(x)* могут быть числа:

$$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 2, \pm 3, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{9}{4}, \pm 9, \pm 18, \pm 6.$$

Целые значения из записанной последовательности можно отсеять с помощью свойства 2. Для нахождения *f(1) и f(-1)* воспользуемся схемой Горнера.

	4	4	-43	-34	63	-18
1	4	8	-35	-69	-6	-24
-1	4	0	-43	9	54	-72

f(1)=-24 и f(-1)=-72.

Выделим числа, которые могут быть корнями *f(x)*.

α	2	-2	3	-3	6	-6	9	-9	18	-18
$-\frac{24}{1-\alpha}$	*ц*	*ц*	*ц*	*ц*	*д*	*д*	*ц*	*д*	*д*	*д*
$-\frac{72}{1-\alpha}$	*ц*	*ц*	*ц*	*ц*			*д*			

На основании полученных данных можно сделать вывод, что числа ±2, ±3 могут быть корнями *f(x)*. Проверим их с помощью схемы Горнера, причем найденные корни сразу проверяем на кратность:

	4	4	-43	-34	63	-18
2	4	12	-19	-72	-81	-180≠0
-2	4	-4	-35	36	-9	0 - корень
-3	4	-16	13	-3	0 – корень	
-3	4	-28	97	-294≠0		
3	4	-4	1	0 – корень		
3	4	8	25≠0			

-2 – корень, так как остаток от деления многочлена. Проверим его кратность. В этом случае будем работать с последней получившейся строкой. Получили -2 простой корень.

Дальнейшие рассуждения удобнее вести с той строкой, где в конце получается ноль. В этом случае с каждым следующим делением степень многочлена уменьшается на один. Получили $x_{2,3}$=±3 – простые корни**.** Из таблицы перепишем многочлен, корни которого осталось найти. Корни многочлена второй степени проще найти непосредственно по формуле:

$4x^2-4x+1=0$,

$(2x-1)^2=0$,

$x_{4,5}=\frac{1}{2}$- *корень кратности 2.*

Ответ: -2; 3; -3; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ –рациональные корни многочлена *f(x).*

2 способ: $f(x)=4x^5+4x^4-43x^3-34x^2+63x-18$.

Домножим многочлен *f(x)* так что бы коэффициент при x^5 был равен n^5, и коэффициент при x^4 имел множитель n^4. То есть *f(x)* надо умножить на 2^3. Получим многочлен:

$2^3 \cdot f(x)=2^5x^5+2\cdot 2^4x^4-43\cdot 2^3x^3-68\cdot 2^2x^2+252\cdot 2x-144=(2x)^5+2\cdot(2x)^4-43\cdot(2x)^3-68\cdot(2x)^2+252\cdot(2x)-144.$

Произведем замену y=2x, получим новый многочлен:

$g(y)=y^5+2y^4-43y^3-68y^2+252y-144.$

У полученного многочлена могут быть только целые корни. Будем их искать среди делителей свободного члена:

-144: ±1, ±2; ±3, ±4, ±6, ±8, ±9, ±12, ±16, ±18, ±24, ±36, ±48, ±72, ±144.

Чтобы выбрать числа, которые могут быть корнями, найдем g(1) и g(-1) .

g(1)= 0 и g(-1)=-420. Замечаем, что 1 – корень данного многочлена и $\frac{f(1)}{1-\alpha}$ при любых x принимает целые значения, поэтому при отсеивании корней нужно проверить только условие $\frac{f(-1)}{1+\alpha}$ - целое число.

α	2	-2	3	-3	4	-4	6	-6	8	-8	9	-9	12	-12
$-\frac{420}{1+\alpha}$	*ц*	*ц*	*ц*	*ц*	*ц*	*ц*	*ц*	*ц*	*д*	*ц*	*ц*	*д*	*д*	*д*
α	*16*	*-16*	*18*	*-18*	*24*	*-24*	*36*	*-36*	*48*	*-48*	*72*	*-72*	*144*	*-144*
$-\frac{420}{1+\alpha}$	*д*	*ц*	*д*	*д*	*д*	*д*	*д*	*д*	*д*	*д*	*д*	*д*	*д*	*д*

Получаем, корнями могут быть числа 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6,-6, -8, 9, -16. Проверим их с помощью схемы Горнера, а также кратность найденного корня 1.

	1	*2*	*-43*	*-68*	*252*	*-144*
1	*1*	*3*	*-40*	*-108*	*144*	*0*
1	*1*	*4*	*-36*	*-144*	*0*	
1	*1*	*5*	*-31*	*-175≠0*		
2	*1*	*6*	*-24*	*-192≠0*		
-2	*1*	*2*	*-40*	*-224≠0*		
3	*1*	*7*	*-15*	*-189≠0*		
-3	*1*	*1*	*-39*	*-27≠0*		
4	*1*	*8*	*-4*	*-150≠0*		
-4	*1*	*0*	*-36*	*0*		
-4	*1*	*-4*	*-20≠0*			
6	*1*	*6*	*0*			
6	*1*	*12≠0*				
-6	*1*	*0*				

Получили $y_{1,2}=1.$, $y_3=-4$, $y_{4,5}=\pm 6$. Тогда $x_{1,2}=\frac{1}{2}, x_3=-2, x_{4,5}=\pm 3.$

Пример: Найти все рациональные корни многочлена

f(x)=$72x^4 - 108x^3 + 58x^2 - 13x + 1$.

Решение: Если свободный член многочлена равен ±1, лучше перейти к другой переменной. Найти рациональные корни многочлена *f(x),* т.е. те значения х, при которых *f(x)*=0, т.е. найти корни уравнения.

$72x^4 - 108x^3 + 58x^2 - 13x + 1 = 0$.

$x=0$ не является корнем уравнения. Разделим уравнение на x^4:

$72 - 108\frac{1}{x} + 58\frac{1}{x^2} - 13\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = 0$.

Произведем замену $y = \frac{1}{x}$ и запишем многочлен по убыванию степеней у:

$y^4 - 13y^3 + 58y^2 - 108y + 72 = 0$.

У полученного многочлена могут быть только целые корни. Будем их искать среди делителей свободного члена. Так как по виду многочлена в уравнении видно, что он имеет только положительные корни, то остается проверить только положительные делители.

72:1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

	1	-13	58	-108	72
1	1	-12	46	-62	10≠0
2	1	-11	36	-36	0
2	1	-9	18	0	

$y_{1,2} = 2$.

Находим оставшиеся корни из уравнения $y^2 - 9y + 18 = 0$,

$y_1 = 6, y_4 = 3$.

Ответ:$x_{1,2} = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{6}, x_4 = \frac{1}{3}$.

5.7 Вопросы для самопроверки

1. Что говорит основная теорема алгебры о многочленах над полем комплексных чисел?

2. Как выглядит разложение многочлена с комплексными коэффициентами в произведение неприводимых над полем комплексных

чисел сомножителей?

3. В чем смысл формул Виета?

4. Как формулируются формулы Виета для (приведенного) квадратного трехчлена, для многочленов степени 3 и 4?

5. Верно ли, что сумма и произведение всех корней данного многочлена над некоторым числовым полем принадлежит этому полю, даже если не все его корни принадлежат данному полю?

6. Существуют ли неприводимые над полем действительных чисел многочлены степени 3? Степени 4?

7. Может ли многочлен степени 4 с действительными коэффициентами иметь ровно три действительных корня? Чему равно минимальное число его действительных корней?

8. Как построить систему функций Штурма для данного многочлена.

9. Нужно ли проверять имеет ли f(x) кратные корни при построении системы функций Штурма?

10. Как найти границы корней многочлена f(x)?

11. Как найти число действительных корней у f(x)?

12. Как за конечное число шагов найти все рациональные корни многочлена с рациональными коэффициентами либо убедиться, что их нет?

13. При каком условии на коэффициенты всякий рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами будет целым?

14. Пусть старший коэффициент многочлена с целыми коэффициентами есть простое число, а его свободный член равен 1. Каково максимальное число рациональных корней этого многочлена?

15. В чем состоит признак Эйзенштейна?

5.8 Задания для самостоятельного решения

1. Построить многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий:

1. Простые корни 1 и 2 и двукратный корень 1 +i
2. Двукратный корень –1 и простые кони 2;1 и 1-i

3. Двукратный корень i и простые корни1+ i и i
4. Двукратный корень 1- i и простой корень - i
5. Простые корни 1+ i и i и двукратный корень 2
6. Простой корень2+ i и двукратные корни i и 1+ i
7. Простой корень 3 двукратные корни 2- i и 3+ i
8. Простые корни i, 3- i и двукратный корень 1- i
9. Простые корни 2, 5 + i и двукратный корень 1+ i
10. Простой корень 2+ i и двукратный корень 4+3 i
11. Простой корень $\sqrt{5}$ и двукратные корни 2 и 3-2 i
12. Простые корни $\sqrt{3}$ и 1+2 i и двукратный корень 3+ i

2. Отделить действительные корни многочлена с точностью до 1

1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x + 2$
2. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 8x - 5$
3. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4x - 6$
4. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 1$
5. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$
6. $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1$
7. $f(x) = x^4 - 12x^3 - 16x^2 - 4$
8. $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$
9. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1$
10. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

3. Найти все рациональные корни многочленов:

1. $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$ и $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$
2. $5x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ и $x^4 - x^3 + 2x + 1$
3. $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$ и $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$
4. $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$ и $3x^8 - 10x^5 + 4x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 30x + 14$
5. $x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30$ и $2x^7 - 3x^4 + 45x^2 - 21x + 6$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Ларин, С. В. Алгебра: многочлены : учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 136 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07825-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/493274

2. Ляпин, Е.С. Курс высшей алгебры. [Электронный ресурс] : учебник / Е. С. Ляпин — Электронные текстовые данные. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 368 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/246

3. Окунев Л.Я. Высшая алгебра [Текст] : учебник для вузов / Л.Я. Окунев. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: лань, 2009. – 335 с.

Дополнительная литература

1. Алферова, З.В. Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс] : учебно-методический комплекс / З.В. Алферова, Э.Л. Балюкевич, А.Н. Романников. - Электронные текстовые данные. - Москва : Евразийский открытый институт, 2011. - 279 с. - Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90645

2. Избранные главы алгебры и теории чисел [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов ИФМИЭО / М. П. Тропин; Новосиб. гос. пед. ун-т. - Электронные текстовые данные. - Новосибирск: НГПУ, 2012. - 89 с. - Режим доступа: http://icdlib.nspu.ru/catalog/details/icdlib/636/

3. Колесникова Ж. В. Методическое пособие "Лабораторные работы по теории многочленов" (Специальность: 032100 "Математика с дополнительной специальностью", квалификация: учитель математики и информатики) [Текст] / Колесникова Ж. В., Осипова Л. А., Полещук Г. Г.; Федеральное агентство по образованию, Кузбасская государственная педагогическая академия. - Новокузнецк, 2007. - 66 с.