Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Кузбасский гуманитарно-педагогический институт

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Позднякова

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ГЕОМЕТРИИ

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Методические рекомендации по выполнению контрольной работы
обучающихся по направлению подготовки
44.04.01 Педагогическое образование
Профиль «Математика в профильном и профессиональном образовании»*

Новокузнецк

2021

УДК [378.147.88:514](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.151.5я73
П 47

Позднякова Е.В.

П 47 Избранные главы геометрии. Проективная геометрия: методические рекомендации по выполнению контрольной работы обучающихся по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование (уровень магистратуры), профиль «Математика в профильном и профессиональном образовании» / Е.В. Позднякова; Кузбасский гуманитарно-педагогический институт Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : КГПИ КемГУ, 2021 – 61 с.

В работе изложены методические рекомендации по выполнению контрольной работы по дисциплине “Избранные главы геометрии” (модуль Проективная геометрия): основные факты проективной геометрии, вопросы для самоконтроля, варианты контрольной работы и образец ее решения, методические рекомендации по решению и оформлению работы, оценивание работы в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы, современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.04.01 Педагогическое образование, профиль «Математика в профильном и профессиональном образовании».

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 1 от 30.08.2021

Заведующий каф. МФММ
_____________ / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 1 от 09.09.2021

Председатель методической комиссии ФИМЭ
_____________/ Г.Н. Бойченко

УДК [378.147.88:514](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.151.5я73
П 47

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию магистра по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование (профиль «Математика в профильном и профессиональном образовании») и направлены на оказание помощи студентам в выполнении внеаудиторной самостоятельной работы, а именно контрольной работы по дисциплине “Избранные главы геометрии”.

Целью изучения данной дисциплины является формирование профессиональной компетентности студента в области преподавания математики в системе среднего общего, среднего профессионального и высшего образования.

В результате освоения дисциплины у обучающегося должны быть сформированы профессиональные и специальные профессиональные компетенции, обеспечивающие готовность к реализации образовательного процесса в предметной области “Математика”. Содержание дисциплины “Избранные главы геометрии” включает три модуля:

- Проективная геометрия;
- Основания геометрии;
- Геометрия Лобачевского.

Данные методические рекомендации направлены на оказание помощи студентами в выполнении контрольной работы по модулю “Проективная геометрия”.

В методические рекомендации включено:

1) основные теоретические сведения (основные понятия, формулы и теоремы проективной геометрии);
2) особенности оценивания контрольной работы в балльно-рейтинговой системе;
3) варианты контрольной работы и образец ее решения;
4) требования к выполнению и оформлению контрольной работы;

5) список рекомендуемой литературы

6) список современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.

Основные теоретические сведения по дисциплине иллюстрируются соответствующими примерами, необходимыми чертежами.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает современные источники; указана литература основная и дополнительная. Помощь в изучении дисциплины могут оказать рекомендуемые профессиональные базы данных, информационные справочные системы.

ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Проективная система координат на прямой и на плоскости

Упорядоченная тройка точек $\{X_1;\ X_2;\ E\}$ называется проективной системой координат на проективной прямой.

Отношение двух действительных чисел $(x_1:x_2)$, не равных нулю одновременно, называется проективными координатами точки. Обозначается $M(x_1:x_2)$. Верно, что $X_1(1:0)$, $X_2(0:1)$, $E(1:1)$.

Для построения точки $M(x_1:x_2)$ в данной системе координат существует следующий алгоритм:

1) Выбираем любую точку $Q \notin d$ и соединяем ее с точками X_1; X_2; E.
2) На луче [QE) выбираем любую точку E_0 и вводим вектор $\vec{e} = \overrightarrow{QE_0}$.
3) Разлагаем вектор $\vec{a}$ по направлениям QX_1 и QX_2. Строим $QQ_1E_0Q_2$ – параллелограмм с диагональю QE_0.
4) Обозначаем $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{QQ_1}$; $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{QQ_2}$. Получили аффинный базис $\{\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2}\}$, порождающий проективную систему координат на прямой.
5) В базисе $\{\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2}\}$ строим вектор $\vec{m}\{x_1:x_2\}$.

6) Прямая, проходящая через точку Q и содержащая вектор $\vec{m}$, пересекает прямую d в искомой точке М. (рис.1)

Упорядоченная система четырех точек $\{X_1; X_2; X_3; E\}$, никакие три из которых не лежат на одной прямой, называется проективной системой координат на плоскости.

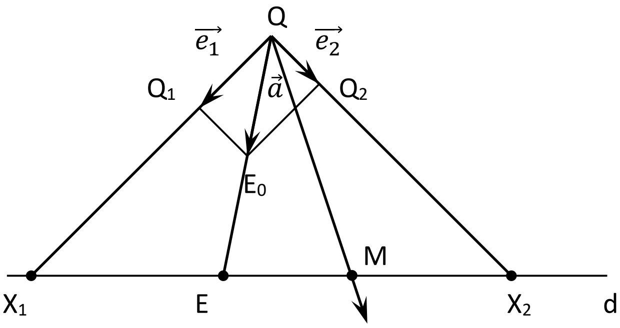

Рис.1

Треугольник $X_1X_2X_3$ называется координатным треугольником, Е – единичная точка.

Отношение трех действительных чисел, не равных нулю одновременно, называется проективными координатами точки на плоскости и обозначается $M(x_1:x_2:x_3)$.

Соединим точку Е с точками X_1, X_2, X_3.

$X_1E \cap X_2X_3 = E_1$; $X_2E \cap X_1X_3 = E_2$; $X_3E \cap X_2X_1 = E_3$

Точки $E_1(0:1:1)$, $E_2(1:0:1)$, $E_3(1:1:0)$ называются проекциями точки Е на стороны координатного треугольника.

Аналогично, точки $M_1(0: x_2: x_3)$, $M_2(x_1: 0: x_3)$, $M_3(x_1: x_2: 0)$ есть проекции точки М на сторонах треугольника $X_1X_2X_3$.

Для построения точки М в системе координат достаточно построить $M_1(0: x_2: x_3) \in X_2X_3$ в системе координат $\{X_2; X_3; E_1\}$ и $M_2(x_1: 0: x_3) \in X_1X_3$ в системе координат $\{X_1; X_3; E_2\}$. Тогда $M = X_1M_1 \cap X_2M_2$ (рис.2).

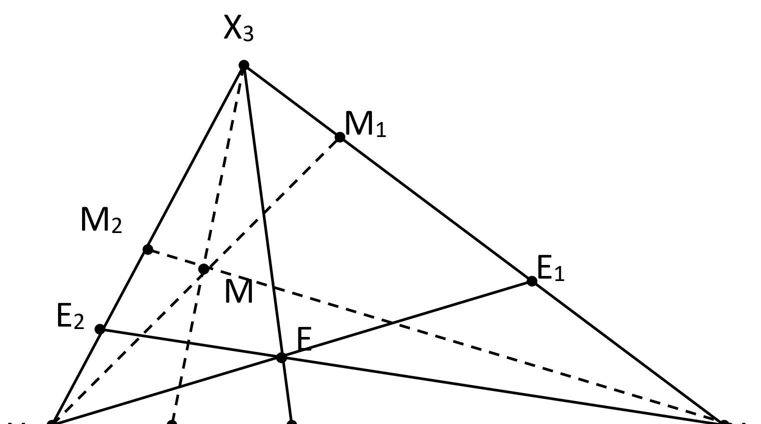

Рис.2

Пусть на расширенной аффинной (евклидовой) плоскости дана система координат $\{O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$ и пусть дана точка M(x; y).

Тройка чисел $x_1: x_2: x_3$, пропорциональная x: y: 1, называется однородными координатами точки M. $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$.

Если $x_3 \to 0$, то точка $M(x_1: x_2: 0)$ – несобственная точка на расширенной плоскости.

Уравнения проективной прямой

Пусть $A(a_1:a_2:a_3)$ и $B(b_1:b_2:b_3)$ – различные точки. $M(x_1: x_2: x_3)$ – произвольная точка прямой AB.

$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ - уравнение прямой, заданной двумя точками.

Раскрыв определитель, получаем $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ – общее уравнение прямой.

$(u_1: u_2: u_3)$ – координаты прямой.

$\begin{cases} \lambda x_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 \\ \lambda x_2 = \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 \\ \lambda x_3 = \alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3 \end{cases}$ - параметрические уравнения прямой.

$A(a_1:a_2:a_3)$, $B(b_1:b_2:b_3)$, $C(c_1:c_2:c_3)$.

$\begin{vmatrix} \grave{a}_1 & \grave{a}_2 & \grave{a}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ - условие коллинеарности трех точек.

Двойное (сложное) отношение четырех точек на прямой

Пусть $A(a_1: a_2)$, $B(b_1: b_2)$, $C(c_1: c_2)$, $D(d_1: d_2)$ – различные точки, инцидентные одной прямой.

$(AB, CD)=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}$ - двойное отношение четырех точек.

Если A(a_1: a_2 : a_3), B(b_1: b_2: b_3), C(c_1: c_2: c_3), D(d_1: d_2: d_3) заданы в системе координат на плоскости, то $(AB,CD)=(A_1B_1,C_1D_1)=(A_2B_2,C_2D_2)=(A_3B_3,C_3D_3)$.

Если (AB, CD)>0, то говорят, что пара AB не разделяет пару CD. Если (AB, CD)<0, то говорят, что пара AB разделяет пару CD. (рис.3).

Рис.3

Пусть даны четыре прямые пучка $\pi[L]$: a, b, c, d. Пусть прямая $f\notin\pi[L]$.

$f\cap a=A$, $f\cap b=B$, $f\cap c=C$, $f\cap d=D$.

Двойное отношение четырех прямых (ab, cd) есть двойное отношение четырех точек (AB, CD), т.е. (ab, cd)= (AB, CD) (рис. 4).

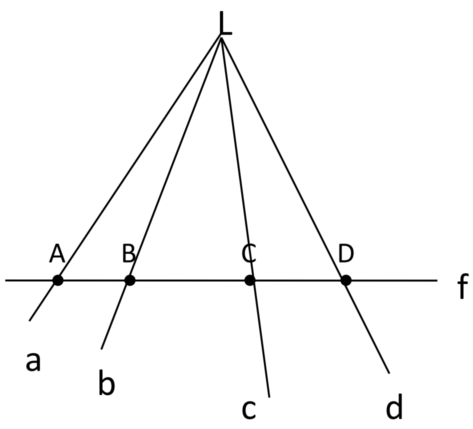

Рис.4

Гармоническая четверка точек и прямых

Если двойное отношение четырех точек (прямых) равно (-1), т.е. (AB,CD)=(ab,cd)=-1, то четверка точек (прямых) называется гармонической.

Если (AB, CD)=-1, то пара AB разделяет пару CD.

Если A, B, C, D принадлежат расширенной прямой и C – середина отрезка AB, то (AB, CD)=-1 тогда и только тогда, когда D – несобственная точка прямой.

Пусть a⌒b=O, c и d – биссектрисы смежных углов. Тогда (ab,cd)=-1. (рис.5)

Совокупность четырех точек A, B, C, D общего положения и шести прямых AB, AD, BC, CD, FC, BD, соединяющих эти точки, называется полным четырехвершинником. AB и CD, AD и BC, AC и BD – противоположные пары сторон.

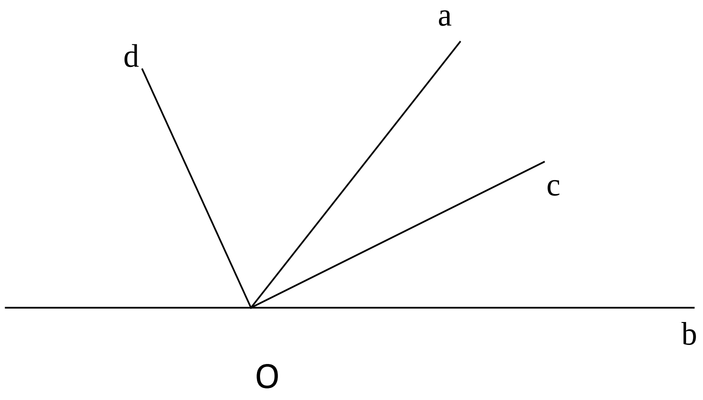

Рис.5

AB⌒CD=Q, AD⌒BC=R, AC⌒BD=P. Точки Q, R, P – диагональные точки. Прямые QR, QP, RP – диагональные прямые. Треугольник PQR – диагональный треугольник.

Пусть PB⌒QR=N, AC⌒QR=M. Тогда Q, R, M, N и B, D, P, N – гармонические четверки точек. (рис.6)

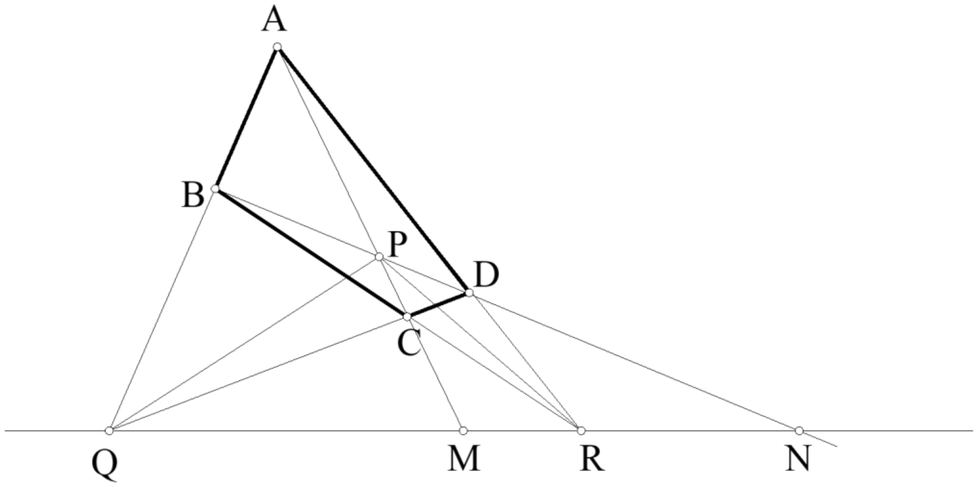

Рис.6

Теорема Дезарга

Пусть даны два треугольника ABC и A′B′C′, расположенные так, что прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, пересекаются в одной точке. Тогда соответственные стороны треугольников пересекаются в точках, лежащих на одной прямой.

$AA' \cap BB' \cap CC' = Q \;\Rightarrow\; AB \cap A'B' = M,\ AC \cap A'C' = N,\ BC \cap B'C' = P$ и M, N, P принадлежат одной прямой q.

Q – центр конфигурации Дезарга, q – прямая Дезарга. (рис. 7)

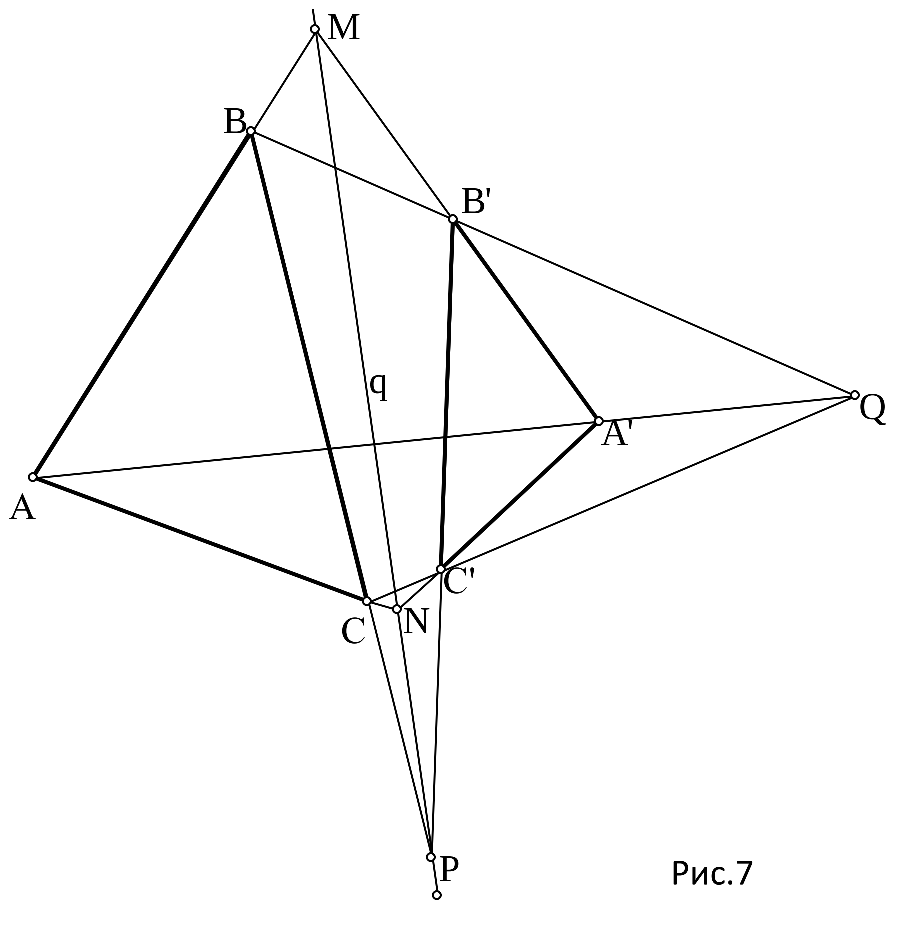

Рис.7

Справедлива о*братная теорема Дезарга:*

Если два треугольника расположены так, что соответственные стороны треугольников пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины этих треугольников, пересекаются в одной точке.

Прямая и обратная теоремы Дезарга являются взаимно – двойственными. В конфигурации Дезарга любая точка может служить центром Дезарга и любая прямая может быть прямой Дезарга.

Проективные преобразования плоскости

Преобразование проективной плоскости называется проективным, если при этом прямая переходит в прямую с сохранением двойного отношения четырех точек прямой.

Уравнение проективного преобразования точек плоскости:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \lambda x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

или в матричной форме $\lambda X' = AX$.

Пусть даны две проективные системы координат на плоскости $R=\{X_1; X_2; X_3; E\}$ и $R'=\{Y_1; Y_2; Y_3; E'\}$. Тогда существует единственное преобразование плоскости, при котором $R \to R'$, так что $X_1 \to Y_1$, $X_2 \to Y_2$, $X_3 \to Y_3$, $E \to E'$, при этом точка $M(x_1: x_2: x_3)$ в старой системе координат переходит в точку M' с теми же координатами в новой системе координат, т.е. $M(x_1: x_2: x_3)_R \to M'(x_1: x_2: x_3)_{R'}$.

Проективное преобразование плоскости однозначно определяется четырьмя парами соответственных точек: A, B, C, D $\to$ A′, B′, C′, D′. (Никакие из трех точек A, B, C, D не лежат на одной прямой).

Гомологией называется преобразование плоскости, имеющее прямую s неподвижных точек, называемую осью гомологии, и пучок неподвижных прямых с центром в точке S, называемым центром гомологии.

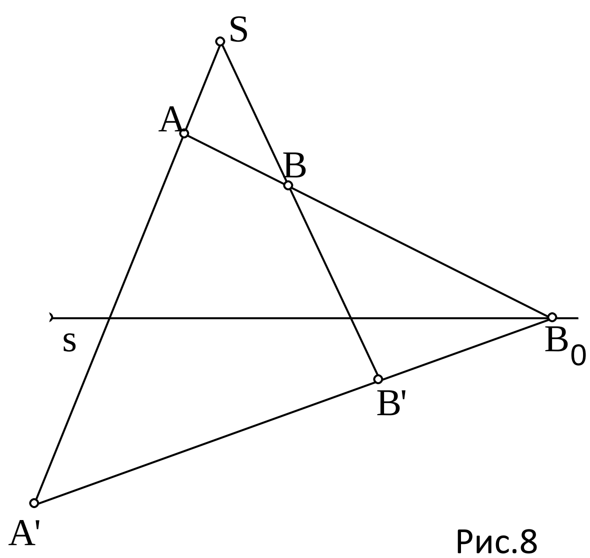

Рис.8

Гомология определяется осью s, центром S и парой соответственных точек. Чтобы построить образ данной точки B, необходимо:

1) провести прямую SB;

2) $AB \cap s = B_0$;

3) $A'B_0 \cap SB = B'$.

B' - искомая точка. (рис.8)

Проективное отображение прямой на прямую вполне определяется тремя парами соответственных точек: $l \to l'$, $A, B, C \in l$, $A', B', C' \in l'$, причем $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.

а) Если $AA' \cap BB' \cap CC' = S$, то отображение называется перспективным.

б) Отображение $l \to l'$ является перспективным тогда и только тогда, когда точка пересечения прямых l и l' переходит сама в себя.

в) Для построения образа точки D достаточно провести прямую SD до пересечения с прямой l'. Получим D' - образ точки D (рис.9).

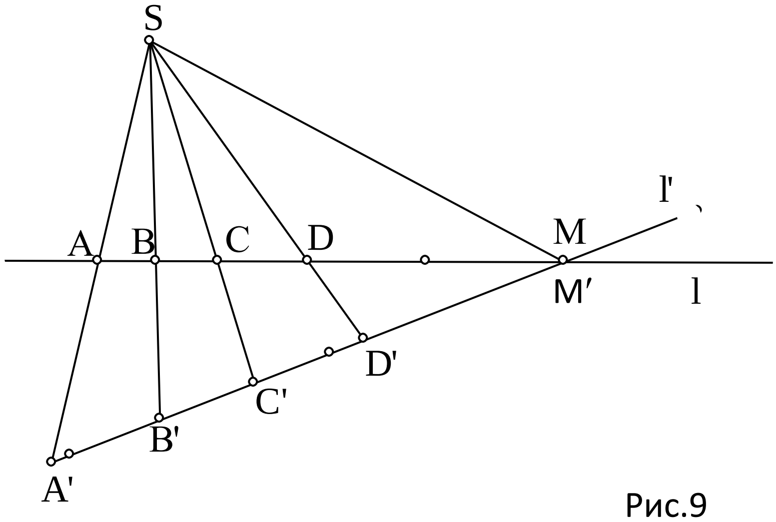

Рис.9

Проективное, но неперспективное отображение прямой на прямую сводится к композиции двух перспективных отображений прямой на прямую. Пусть $A, B, C, M \in l$, $A', B', C' \in l'$. Требуется построить образ точки M. Для этого применим следующий алгоритм:

1) Соединяем точки A и A'.

2) Выбираем любые точки Q и Q', принадлежащие прямой AA'.

3) $QB \cap Q'B' = B_0$, $QC \cap Q'C' = C_0$.

4) $B_0C_0 = q$ – дополнительная прямая, называемая осью родства.

5) Точку M соединяем с точкой Q.

6) $QM \cap q = M_0$.

7) $Q'M_0 \cap l' = M'$ - искомая точка (рис.10).

По принципу двойственности можно рассмотреть проективное отображение пучка на пучок (перспективное и неперспективное)

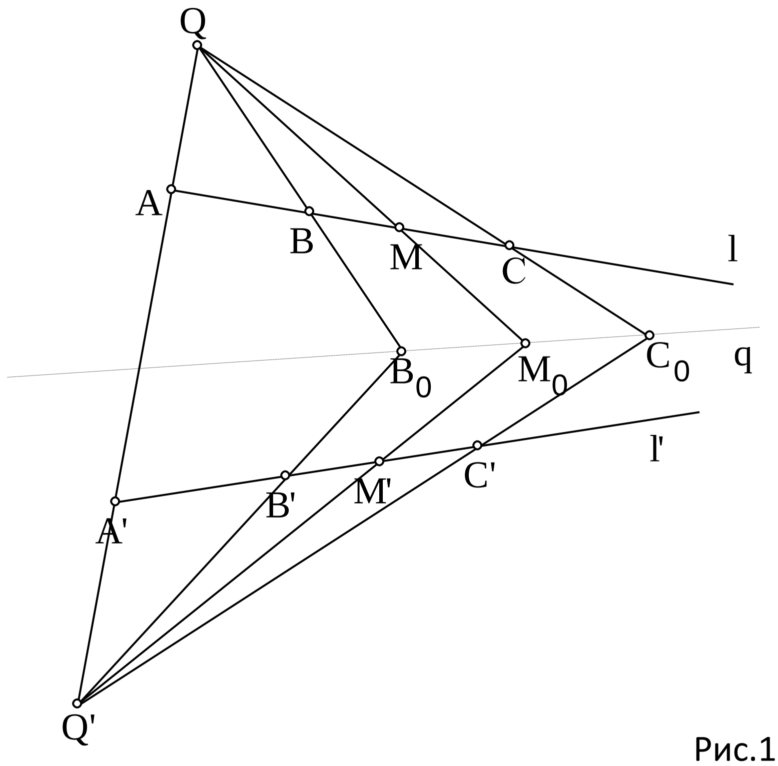

Рис.10

а) Пусть даны пучок $\pi[L]$ и пучок $\pi[L']$, и $a\to a'$, $b\to b'$, $c\to c'$, причем $a\cap a'=A$, $b\cap b'=B$, $c\cap c'=C$.

Если A, B, C принадлежат одной прямой s, то отображение называется перспективным (рис.11).

Отображение пучка на пучок является перспективным тогда и только тогда, когда прямая m, соединяющая центры пучков, переходит сама в себя.

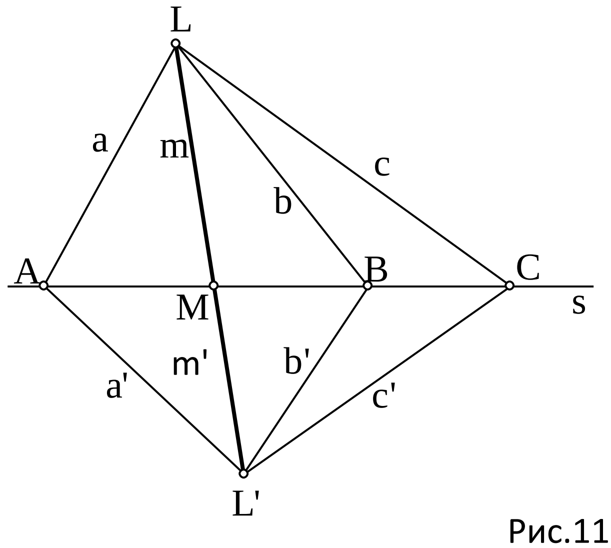

Рис.11

б) Пусть дано проективное, но неперспективное отображение пучка на пучок.

$a\cap b\cap c=L$, $a'\cap b'\cap c'=L'$, $a\to a'$, $b\to b'$, $c\to c'$. Прямая $m\in \pi[L]$. Требуется построить образ прямой m.

Решение задачи проводится по принципу двойственности, а именно:

1) Строим данные пучки прямых a, b, c и a', b', c'.
2) $a\cap a'=A$.
3) Через точку A проводим любые две прямые q и q', не проходящие через точки L и L'.

4) q∩b=B, q∩c=C.

5) q′∩b′=B′ q′∩c′=C′.

6) BB′∩CC′=Q – центр родства.

7) Находим точку пересечения данной прямой m с прямой q, т.е. m∩q=M.

8) Соединяем M и Q и проводим MQ до пересечения с q′. Получаем точку M′.

9) Прямая LM′=m′ - искомая (рис.12).

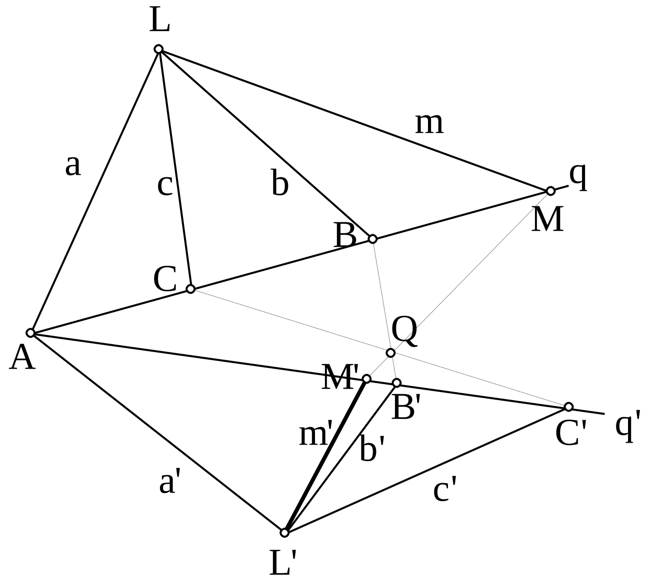

Рис.12

Если прямые *l* и *l′* совпадают, то имеем проективное преобразование прямой, которое вполне определяется тремя парами соответственных точек A→A′, B→B′, C→C′.

Проективное преобразование прямой *l* сводится к композиции перспективного отображения с произвольным центром O прямой *l* на m и перспективного проективного отображения m на *l*.

Задача: A, B, C, A′, B′, C′, M∈*l*, причем A→A′, B→B′, C→C′. Построить образ точки M.

Решение:

Выбираем произвольную прямую m и произвольную точку O, не принадлежащую m и *l*.

OA∩m=$\overline{A}$, OB∩m=$\overline{A}$,

OC∩m=$\overline{N}$, OM∩m=$\overline{I}$.

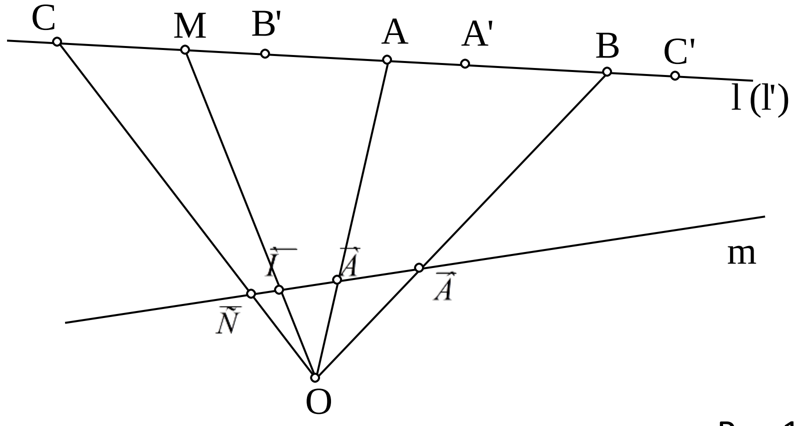

Рис.13

Получили, что A→$\overline{A}$, B→$\overline{A}$, C→$\overline{N}$, M→$\overline{I}$ (рис.13). Затем строим образ точки $\overline{I}$ при отображении m на *l*: $\overline{A}$→A′, $\overline{A}$→B′, $\overline{N}$→C′.

Проективные отображения пучка на прямую

Проективные преобразования плоскости, которые прямую переводят в прямую, называются коллинеациями. Но есть преобразования другого вида, при которых прямая переходит в точку.

Рассмотрим *перспективное отображение пучка π[L] на прямую l.*

Пусть даны пучок прямых *π[L]* и прямая *l*.

$a\cap l=A$, $b\cap l=B$, $c\cap l=C$.

Если $a\to A$, $b\to B$, $c\to C$, то такое отображение и называется перспективным отображением пучка на прямую. Значит, образом прямой m будет точка M пересечения m и *l* (рис.14).

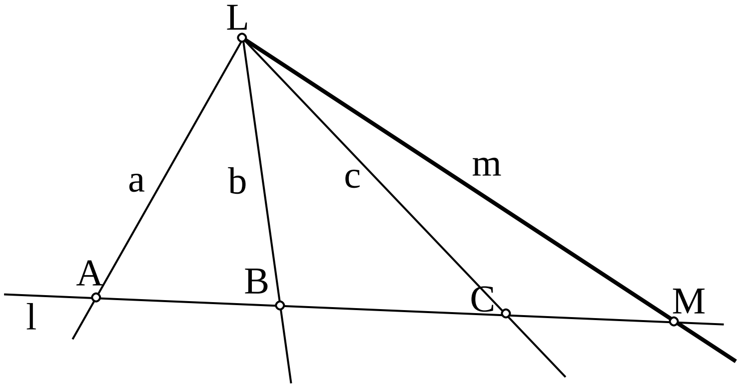

Рис.14

Рассмотрим *неперспективное отображение пучка на прямую.*

Пусть $a\to A$, $b\to B$, $c\to C$, но по крайней мере, одна из точек A, B, C не является точкой пересечения соответствующей прямой пучка с прямой *l*. Тогда говорят, что задано неперспективное отображение пучка на прямую.

Пересечем пучок *π[L]* произвольной прямой l' и обозначим $A'=a\cap l'$, $B'=b\cap l'$, $C'=c\cap l'$, $M'=m\cap l'$. Тогда чтобы построить образ прямой m, достаточно построить образ точки M′ при отображении l' на *l*, при котором $A'\to A$, $B'\to B$, $C'\to C$ (рис. 15).

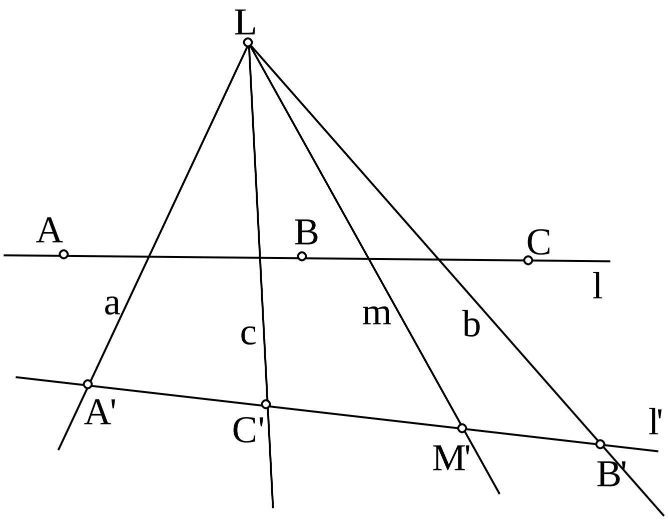

Рис. 15

Рассмотрим *проективное преобразование пучка*.

Пусть центры пучков π[L] и π[L′] совпадают, т.е. L≡L′. Тогда отображение π[L]→π[L′] называется проективным преобразованием пучка.

Пусть a→a′, b→b′, c→c′. Пересечем прямые пучка двумя произвольными прямыми *l* и *l′*.

A=a∩ *l*, B=b∩ *l*, C=c∩ *l*, M=m∩ *l*.

A′=a∩ *l′*, B′=b∩ *l′*, C′=c∩ *l′*.

Тогда a→A, b→B, c→C, m→M,

A′→a′, B′→b′, C′→c′.

Пусть *l*→ *l′* | A→A′, B→B′, C→C′.

Построить точку M′, являющуюся образом точки M, можно. Тогда прямая LM′ есть образ прямой m≡LM (рис. 16).

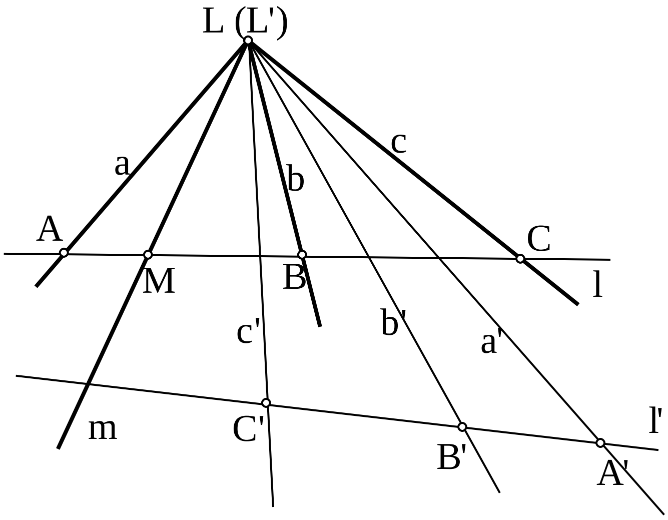

Рис. 16

Квадрики на проективной плоскости

Квадрикой называется множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$.

Матрица $\begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \\ \grave{a}_{31} & \grave{a}_{32} & \grave{a}_{33} \end{pmatrix}$, где $\grave{a}_{ij} = a_{ji}$, называется матрицей квадрики (или матрицей квадратичной формы).

Используя метод выделения полных квадратов (метод Лагранжа), общее уравнение квадрики приводится к каноническому виду:

$b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 = 0$,

или нормальному виду: $E_1z_1^2 + E_2z_2^2 + E_3z_3^2 = 0$, где E_i={0; ±1}.

Классификация квадрик представлена в таблице 1.

Таблица 1

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$	нулевая квадрика
$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0$	овальная квадрика
$z_1^2 + z_2^2 = 0$	пара мнимых прямых
$z_1^2 - z_2^2 = 0$	пара действительных прямых
$z_1^2 = 0$	пара совпадающих прямых

Уравнения записаны с точностью до перемены индексов.

При приведении общего уравнения квадрики к каноническому виду получаются уравнения:

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ y_2 = c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ y_3 = c_{33}x_3 \end{cases}$$ - формулы преобразования координат точек

В матричной форме Y=CX. Тогда $X=C^{-1}Y$.

На расширенной евклидовой плоскости эллипс, гипербола и парабола относятся к одному проективному классу – овальная квадрика.

Пусть на квадрике дана точка $P(p_1: p_2: p_3)$. Касательная к квадрике в этой точке имеет координаты $(u_1: u_2: u_3)$, которые можно найти как U=A·P, где $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $A=[a_{ij}]$ (квадрика должна быть овальной).

Полюсы и поляры

Пусть точка P не принадлежит овальной квадрике γ. Проведем через P прямую *l*, пересекающую квадрику в двух точках M и N.

Точка Q, четвертая гармоническая точкам M, N, P называется сопряженной точке P относительно квадрики γ.

Геометрическое место точек, сопряженных точке P относительно квадрики, называется полярой точки P, а точка P называется полюсом этой поляры.

Свойство взаимности: Если точка Q принадлежит поляре точки P, то точка P принадлежит поляре точки Q. (рис. 17)

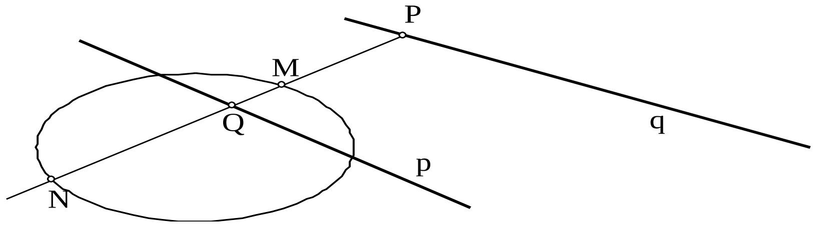

Рис. 17

Если точка P принадлежит квадрике, то ее полярой будет касательная к квадрике.

Если поляра точки P пересекает квадрику в точка Q_1 и Q_2, то прямые PQ_1 и PQ_2 есть касательные к квадрике (рис.18).

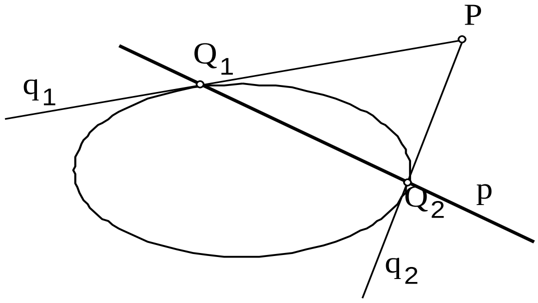

Рис. 18

Если полный четырехвершинник ABCD вписан в овальную квадрику, то его диагонали есть поляры точек, являющихся противоположными диагональными точками (рис. 19).

Если $P(p_1: p_2: p_3)$ – полюс, $u\ (u_1: u_2: u_3)$ – поляра, то координаты поляры можно найти по формуле $U=A\cdot P$, где

$$U=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \\ \grave{a}_{31} & \grave{a}_{32} & \grave{a}_{33} \end{pmatrix}$$ - матрица квадрики.

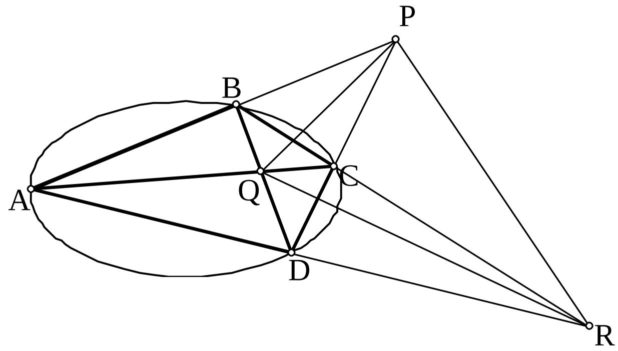

Рис. 19

Пусть квадрика – это эллипс, гипербола или парабола, P – фокус кривой, p – соответствующая директриса. Тогда директриса квадрики есть поляра одноименного фокуса (т.е. фокус – это полюс директрисы).

Теоремы Штейнера, Паскаля и Брианшона

Теорема Штейнера

Пусть дано проективное, но неперспективное отображение пучка на пучок. Тогда точки пересечения соответствующих прямых этих пучков принадлежат овальной квадрике, проходящей через центры пучков

Следствие: Прямая, соединяющая центры пучков $\pi[L]$ и $\pi[L']$ переходит в касательную к квадрике в точке L'.

$a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$, $a \cap a' = A$, $b \cap b' = B$, $c \cap c' = C$

$A, B, C, L, L' \in$ овальной квадрике γ.

$m \equiv LL' \to m'$ - касательная к квадрике γ в точке L' (рис.20).

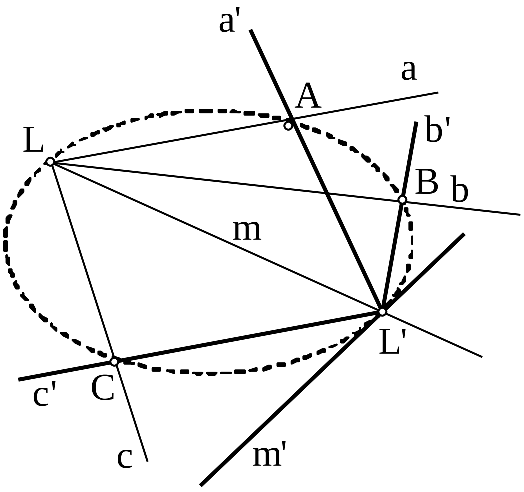

Рис.20

Теорема Паскаля

Пусть на овальной квадрике даны шесть точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. Упорядоченная совокупность этих точек называется шестивершинником. Стороны M_1M_2 и M_4M_5, M_2M_3 и M_5M_6, M_3M_4 и M_6M_1 называются противоположными. Если шестивершинник вписан в овальную квадрику, то точки пересечения противоположных сторон принадлежат одной прямой, называемой прямой Паскаля.

Введем обозначения:

$M_1M_2 = d_1$, $M_2M_3 = d_2$, $M_3M_4 = d_3$

$M_4M_5 = g_1$, $M_5M_6 = g_2$, $M_6M_1 = g_3$

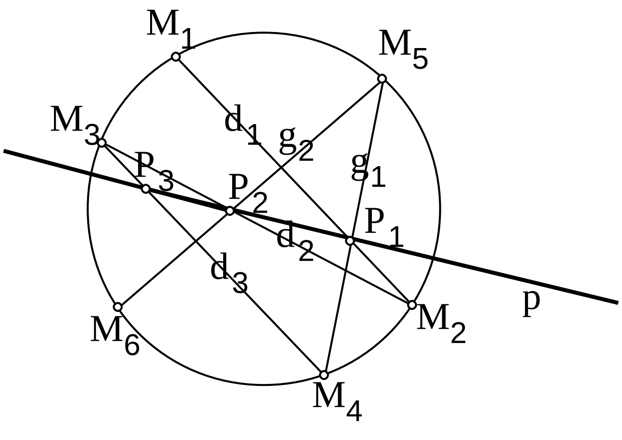

Рис.21

Тогда $d_1 \cap g_1 = P_1$, $d_2 \cap g_2 = P_2$, $d_3 \cap g_3 = P_3$,

P_1, P_2, $P_3 \in p$, где p – прямая Паскаля (рис.21).

Если $M_1 \equiv M_6$, то имеем, что g_3 – касательная к квадрике (рис.22).

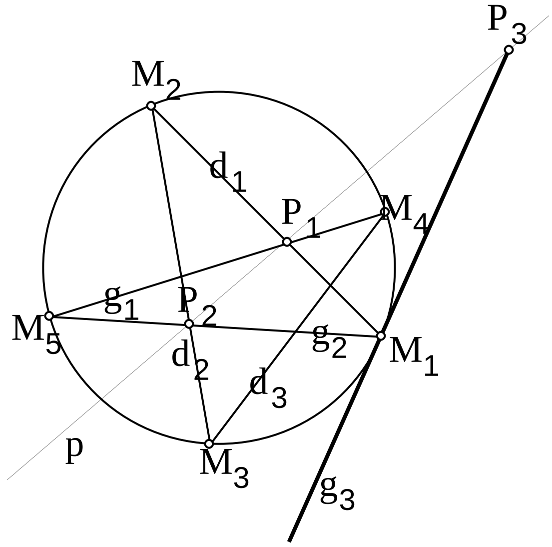

Рис. 22

Теорема Брианшона

Пусть к овальной квадрике проведены шесть различных касательных m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 соответственно в точках M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. Упорядоченная совокупность шести прямых называется шестисторонником.

Пусть шестисторонник $m_1m_2m_3m_4m_5m_6$ описан около овальной квадрики. Тогда прямые, соединяющие противоположные вершины шестисторонника, пересекаются в одной точке, называемой точкой Брианшона.

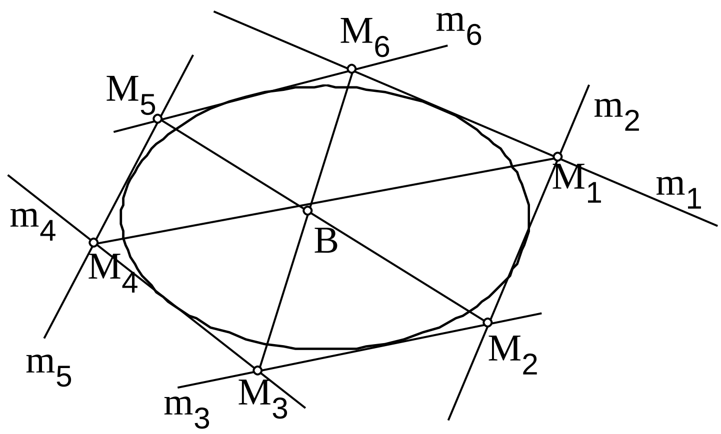

Рис.23

$m_1 \cap m_2 = M_1$ $m_4 \cap m_5 = M_4$

$m_2 \cap m_3 = M_2$ $m_5 \cap m_6 = M_5$

$m_3 \cap m_4 = M_3$ $m_6 \cap m_1 = M_6$

$M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 = B$ (рис. 23).

Следствие: Если около овальной квадрики описан пятисторонник $m_1m_2m_3m_4m_5$ ($m_1 \equiv m_6$), то прямые, соединяющие противоположные вершины M_1 и M_4, M_2 и M_5, M_3 и точку касания M_6 прямой m_1 (m_6) пересекаются в одной точке.

$m_1 \cap m_2 = M_1$ $\qquad$ $m_4 \cap m_5 = M_4$

$m_2 \cap m_3 = M_2$ $\qquad$ $m_5 \cap m_6 (m_1) = M_5$

$m_3 \cap m_4 = M_3$ $\qquad$ $m_6(m_1) \cap \gamma = M_6$

$M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 = B$ (рис. 24).

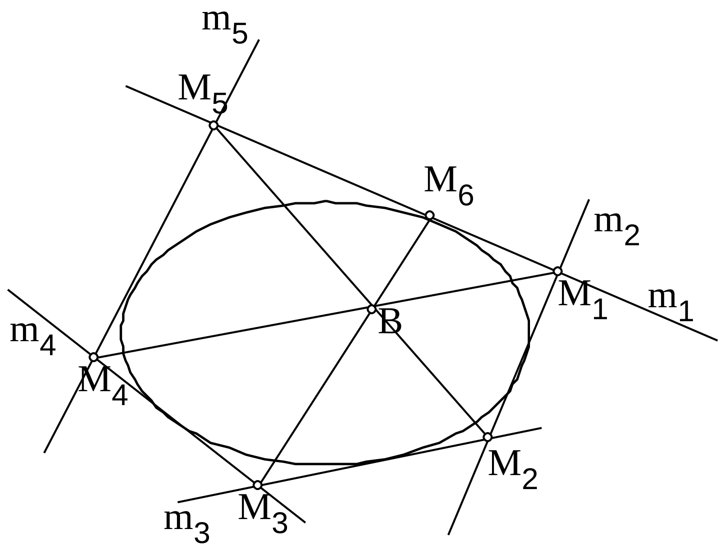

Рис.24

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Выберите верное утверждение.

Проективная система координат на проективной прямой определяется

а) прямой и точкой, ей не принадлежащей;

б) тремя точками, не лежащими на одной прямой;

в) упорядоченной тройкой точек на прямой.

2. Проверьте правильность построения точки M(2:-4) в проективной системе координат (рис. 25). Если построение неверно, исправьте ошибку.

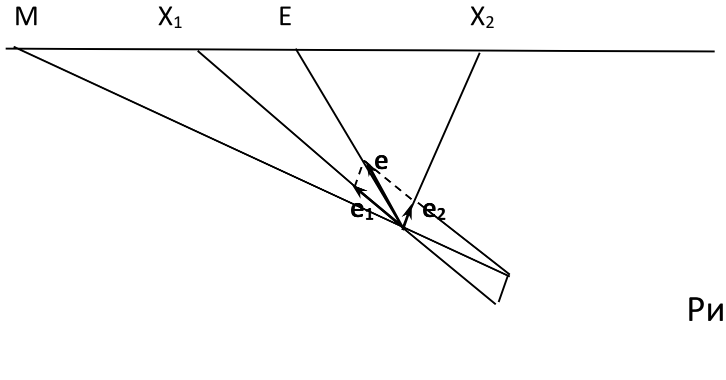

Рис. 25

3. Выберите верное утверждение.

Проективная система координат на плоскости определяется

а) треугольником и точкой;

б) тремя пересекающимися прямыми и точкой, им не принадлежащей;

в) упорядоченной системой четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

4. Дана точки M(5; -40) на расширенной аффинной плоскости. Найдите однородные координаты точки M.

5. Дано уравнение проективной прямой $9x_1-3x_2+18x_3=0$. Назовите координаты прямой.

6. Даны точки A(1:-1:2), B(4:1:5), C(-4:-3:2). Являются ли они коллинеарными? Почему?

7. Оцените, глядя на чертеж (рис. 26), сложное отношение четырех точек (CB, AE) (больше или меньше нуля).

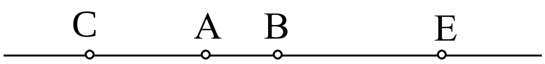

Рис. 26

8. По чертежу (рис.27) найдите, чему равно сложное отношение четырех прямых пучка (ae,ck).

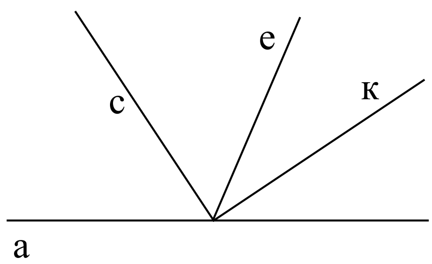

Рис. 27

9. Пусть на рисунке 6 PCRD – полный четырехвершинник. Введите необходимые обозначения и назовите противоположные пары его сторон, диагональные точки, диагональные прямые, диагональный треугольник. На прямой CD найдите гармоническую четверку точек.

10. Пусть на рисунке 7 AA′ - ось Дезарга. Назовите треугольники Дезарга.

11. Преобразование плоскости прямую переводит в прямую. При каком условии это преобразование будет проективным?

12. Какое проективное преобразование представлено на рисунке 28 ?

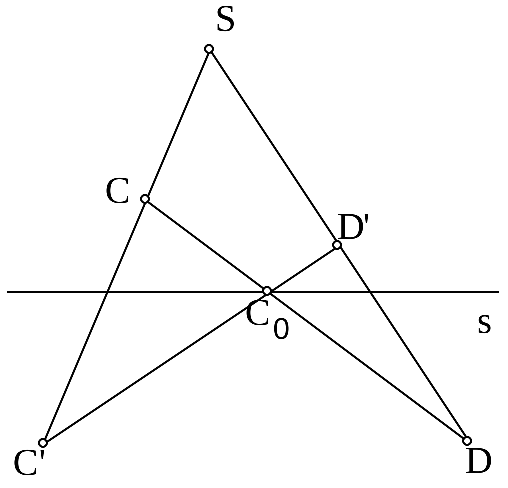

Рис. 28

13. При каком проективном преобразовании плоскости для построения образа данной точки требуется построить ось родства?

14. При отображении пучка на пучок прямая, соединяющая центры пучков, перешла сама в себя. Является ли отображение перспективным?

15. При каком проективном преобразовании плоскости для построения образа прямой строят центр родства?

16. Сформулируйте определение перспективного отображения пучка на прямую.

17. В чем основное отличие перспективного и неперспективного отображения пучка на прямую?

18. Отображение пучков $\pi[L]\to\pi[L']$ таково, что $L\equiv L'$. Как называется такое отображение?

19. К какому классу квадрик относятся эллипс, гипербола и парабола?

20. Какой метод позволяет общее уравнение квадрики привести к каноническому виду? В чем его суть?

21. Сформулируйте определение поляры точки P. Что такое полюс с точки зрения проективной геометрии?

22. Найдите на рисунке 29 поляру точки P.

23. На чертеже дан эллипс и указаны его фокусы. Как с помощью одной линейки построить директрисы эллипса?

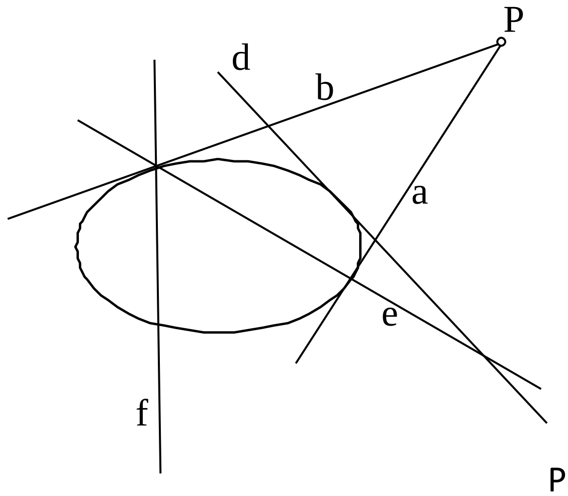

Рис. 29

24. Сформулируйте теорему Штейнера. Как с помощью этой теоремы построить касательную к квадрике γ в данной точке, принадлежащей этой квадрике?

25. Сформулируйте теорему Паскаля. Как построить прямую Паскаля?

26. Сформулируйте теорему Брианшона. Как построить точку Брианшона?

27. Опишите способы построения касательной к овальной квадрике.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания контрольной работы

Контрольная работа № 1 “Элементы проективной геометрии” является промежуточной формой контроля знаний студентов и представляет собой письменное выполнение определенных заданий. Она предназначена для проверки знаний студентов по учебной дисциплине “Избранные главы геометрии”, (модуль “Проективная геометрия”), а также служит для закрепления полученных знаний, умений и навыков. В контрольной работе студентам предлагаются задачи, сформулированные на основании материала, изложенного в лекциях, проработанного на практических занятиях или самостоятельно изученного студентами.

Контрольная работа № 1 по проективной геометрии направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по геометрии;

- развитие навыков самоорганизации и самоконтроля;

- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

- оценка сформированности профессиональных компетенций и умений самостоятельной учебной и поисковой деятельности.

В работе представлено 10 вариантов заданий контрольной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними. В каждом из десяти вариантов содержится восемь задач, при этом восьмая задача – повышенного уровня сложности и не является обязательной для решения.

Задания №№ 2, 3, 4, 5, 7 оцениваются в два балла; задания №№ 1, 6 – в три балла, задание № 8 оценивается в 4 балла.

Система оценивания заданий контрольной работы представлена в таблице 2.

Таблица 2. Оценивание домашней контрольной работы в БРС

№ задания	**Характеристика задания**	**Критерии оценивания**	**Баллы**
1	По двум заданным точкам построить прямую в проективной системе координат, написать уравнение этой прямой, найти координаты еще двух точек этой прямой, найти двойное отношение четырех точек	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы. Сделан правильный, точный чертеж.	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения (и / или в построении чертежа) ИЛИ один из четырех пунктов выполнен неверно	2

		Верно решены только два пункта из четырех	1
2	Построить образ и прообраз точки при заданной гомологии	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы. Сделан правильный, точный чертеж.	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения (и / или в построении чертежа)	1
3	Построить прямую, четвертую гармоническую к трем данным	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы. Сделан правильный, точный чертеж	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения (и / или в построении чертежа)	1
4	Построить образ точки при заданном проективном отображении	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы. Сделан правильный, точный чертеж	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения (и / или в построении чертежа)	1

5	Привести уравнение заданной квадратики к каноническому виду и определить ее проективный класс	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы.	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения	1
6	Построить касательную к квадрике, применяя теорему Паскаля, теорему Штейнера; составить уравнение касательной	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получены верные выводы. Сделан правильный, точный чертеж	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения ИЛИ представлено верное решение, но чертеж отсутствует.	2
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок логического характера.	1
7	Дана овальная квадрика. Построить поляру заданной точки и составить ее уравнение	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы. Сделан правильный, точный чертеж	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения (и / или в построении чертежа)	1
8	Доказать данное утверждение методами проективной геометрии	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получены верные	4

		выводы. Сделан правильный, точный чертеж	
		Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получены верные выводы. Чертеж сделан неверно или отсутствует. ИЛИ Задача решена логически верно, сделан правильный чертеж, но в решении имеется вычислительная ошибка	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения. Имеются ошибки в построении чертежа.	2
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок логического и вычислительного характера. Имеются ошибки в построении чертежа	1
ИТОГО			максимум 20

Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Даны две точки A(2:3:-5) и B(3:6:12) в проективной системе координат.

1) Построить прямую AB в этой системе координат.

2) Написать уравнение прямой AB.

3) Найти координаты еще двух точек C и D этой прямой.

4) Найти двойное отношение (AB,CD).

2. Дана гомология центром S(1;4), осью гомологии s с уравнением x-y+1=0 и парой соответственных точек A(1;1) и A_1(1;5). Построить образ и прообраз точки B(2;2). Система координат – прямоугольная декартовая.

3. Дан треугольник ABC, O – точка пересечения его биссектрис. Построить прямую OD, четвертую гармоническую к прямым OA, OB и OC.

4. Дано проективное отображение прямой a на прямую a_1 тремя парами соответственных точек в прямоугольной системе координат:

$A(-1;9)\to A_1(3;-3)$, $B(2;6)\to B_1(12;0)$, $C(4;4)\to C_1(0;-4)$. Построить образ точки M(3;5) при этом преобразовании.

5. Привести уравнение квадрики $4x^2+y^2+5z^2+4xy-12xz-6yz=0$ к каноническому виду и определить ее проективный класс.

6. Дана овальная квадрика $9x^2+25y^2=225$ и точка $M(3;\ y_0)$ на ней ($y_0<0$). При помощи одной линейки построить касательную к квадрике, применяя

1) теорему Паскаля;

2) теорему Штейнера. Перейдя к однородным координатам, написать уравнение этой касательной.

7. Дана овальная квадрика $y^2=4x$ и точка M(-3;1). Построить поляру точки M и написать ее уравнение (сначала перейти к однородным координатам).

8*. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ распложены в одной плоскости так, что $AA_1\cap BB_1\cap CC_1=Q_1$ и $AB_1\cap BC_1\cap CA_1=Q_2$. Доказать, что прямые AC_1, BA_1, CB_1 пересекаются в одной точке Q_3. (*Указание:* ввести проективную систему координат $X_1=A$, $X_2=B$, $X_3=C$, $E=Q_1$)

Вариант 2

1. Даны две точки A(-2:1:-5) и B(9:6:12) в проективной системе координат.

1) Построить прямую AB в этой системе координат.

2) Написать уравнение прямой AB.

3) Найти координаты еще двух точек C и D.

4) Найти двойное отношение (AB,CD).

2. Дана гомология центром S – несобственная точка, не принадлежащая оси гомологии s с уравнением y-x+1=0 и парой соответственных точек A(2;2) и $A_1(1;-1)$. Построить образ и прообраз точки B(-1;1). Система координат – прямоугольная декартовая.

3. Дан четырехугольник ABCD, O – точка пересечения AC и BD. Построить прямую ON, четвертую гармоническую к прямым OA, OD и OM, где M – середина AD.

4. Дано проективное преобразование прямой а тремя парами соответственных точек в прямоугольной системе координат:

$A(0;8) \rightarrow A_1(1;7)$, $B(9;-1) \rightarrow B_1(8;0)$, $C(3;5) \rightarrow C_1(4;4)$. Построить образ точки $M(-2;10)$ при этом преобразовании.

5. Привести уравнение квадрики $2x^2+y^2-z^2+3xy-xz+2yz=0$ к каноническому виду и определить ее проективный класс.

6. Дана овальная квадрика $y^2=4x$ и точка M(4; 4). При помощи одной линейки построить касательную к квадрике, применяя

1) теорему Паскаля;

2) теорему Штейнера. Перейдя к однородным координатам, написать уравнение этой касательной.

7. Дана овальная квадрика $x^2- y^2=9$ и точка M(0;5). Построить поляру точки M и написать ее уравнение (сначала перейти к однородным координатам).

8*. Трапеция вписана в четырехугольник так, что ее параллельные стороны параллельны одной из его диагоналей. Докажите, что непараллельные стороны трапеции пересекаются на другой диагонали. *(Указание:* применить теорему Дезарга).

Вариант 3

1. Даны две точки A(2:1:5) и B(9:-6:12) в проективной системе координат.

1) Построить прямую AB в этой системе координат.

2) Написать уравнение прямой AB.

3) Найти координаты еще двух точек C и D.

4) Найти двойное отношение (AB,CD).

2. Дана гомология центром S – несобственная точка, принадлежащая оси гомологии s с уравнением x-2y+4=0 и парой соответственных точек A(2;1) и A_1(-

4;-2). Построить образ и прообраз точки B(-1;3). Система координат – прямоугольная декартовая.

3. Дан параллелограмм ABCD. Построить прямую AM, четвертую гармоническую к прямым AB, AD и AC.

4. Дано проективное отображение пучка $\pi[O]$ на пучок $\pi[O_1]$ тремя парами соответственных прямых в прямоугольной системе координат:

$a \to a_1$, $b \to b_1$, $c \to c_1$, где

a: y=2x, b: y=3x, c: y=-x,

a_1: y=x+1, b_1: y=2x-3, c_1: y=4x-11. Построить образ прямой m: y=0 при этом преобразовании.

5. Привести уравнение квадрики $2x^2+3y^2+z^2-4xy+2yz=0$ к каноническому виду и определить ее проективный класс.

6. Дана овальная квадрика $x^2-y^2=4x$ и точка $M(8; y_0)$ на ней ($y_0>0$). При помощи одной линейки построить касательную к квадрике, применяя

1) теорему Паскаля;

2) теорему Штейнера. Перейдя к однородным координатам, написать уравнение этой касательной.

7. Дана овальная квадрика $9x^2-25y^2=225$ и точка M(-4;6). Построить поляру точки M и написать ее уравнение (сначала перейти к однородным координатам).

8*. Трапеция ABCD пересечена прямыми p и q, параллельными основанию AB. $p\cap AD=M$, $p\cap AC=P$, $q\cap BD=N$, $q\cap BC=Q$. Доказать, что точка пересечения прямых MN и PQ лежит на прямой AB. (*Указание:* применить теорему Дезарга).

Вариант 4

1. Даны две точки A(4:2:5) и B(8:-6:2) в проективной системе координат.

1) Построить прямую AB в этой системе координат.

2) Написать уравнение прямой AB.

3) Найти координаты еще двух точек C и D.

4) Найти двойное отношение (AB,CD).

2. Дана гомология центром S(1;-1), осью гомологии s с уравнением x+y=0 и парой соответственных точек A(-2;3) и A_1(-0,5;1). Построить образ и прообраз точки B(2;4). Система координат – прямоугольная декартовая.

3. Дан треугольник ABC, O – его центр тяжести. Построить прямую OM, четвертую гармоническую к прямым OA, OB и OC.

4. Дано проективное отображение пучка π[O] на прямую a тремя парами соответственных прямых и точек в прямоугольной системе координат:

$a \to A$, $b \to B$, $c \to C$, где a: y=0, b: y=-x, c: y=2x, A(2;6), B(3;5), C(4;4). Построить образ прямой m: y=x при этом преобразовании.

5. Привести уравнение квадрики $x^2+9y^2+z^2-6xy-2yz=0$ к каноническому виду и определить ее проективный класс.

6. Дана овальная квадрика $9x^2+4y^2=36$ и точка M(1; y_0) на ней ($y_0>0$). При помощи одной линейки построить касательную к квадрике, применяя

1) теорему Паскаля;

2) теорему Штейнера. Перейдя к однородным координатам, написать уравнение этой касательной.

7. Дана овальная квадрика $9x^2+4y^2=36$ и точка M(5;8). Построить поляру точки M и написать ее уравнение (сначала перейти к однородным координатам).

8*. На расширенной евклидовой плоскости дана трапеция ABCD, в которой $AB \parallel CD$, $P=CB\cap AD$, $Q=AC\cap BD$, $X=AB\cap PQ$, $Y=CD\cap PQ$, $K=AY\cap BD$, $T=AB\cap KP$. Доказать, что отрезок AT составляет третью часть отрезка AB. (*Указание:* использовать свойства полного четырехвершинника).

Вариант 5

1. Даны две точки A(4:2:-5) и B(8:6:2) в проективной системе координат.

1) Построить прямую AB в этой системе координат.

2) Написать уравнение прямой AB.

3) Найти координаты еще двух точек C и D.

4) Найти двойное отношение (AB,CD).

2. Дана гомология центром S(3;4), осью гомологии s с уравнением x+y-1=0 и парой соответственных точек A(1;3) и A_1(-3;1). Построить образ и прообраз точки B(-1;1). Система координат – прямоугольная декартовая.

3. Дан треугольник ABC, O – его ортоцентр. Построить прямую OM, четвертую гармоническую к прямым OA, OB и OC.

4. Дано проективное отображение пучка π[O] на прямую a тремя парами соответственных прямых и точек в прямоугольной системе координат:

a$\rightarrow$A, b$\rightarrow$B, c$\rightarrow$C, где a: y=3x, b: y=0, c: y=-x, A(2;8), B(0;10), C(5;5). Построить образ прямой m: y=x при этом преобразовании.

5. Привести уравнение квадрики $3x^2-y^2+9z^2+2xy+6yz=0$ к каноническому виду и определить ее проективный класс.

6. Дана овальная квадрика $25x^2+16y^2=400$ и точка M(2; y_0) на ней ($y_0<0$). При помощи одной линейки построить касательную к квадрике, применяя

1) теорему Паскаля;

2) теорему Штейнера. Перейдя к однородным координатам, написать уравнение этой касательной.

7. Дана овальная квадрика $x^2=4y$ и точка M(-3;-4). Построить поляру точки M и написать ее уравнение (сначала перейти к однородным координатам).

8*. Дана окружность (O;r) и точка P. Доказать, что OP перпендикулярна поляре точки P. Рассмотреть различные случаи расположения точки P. (*Указание:* применить уравнение поляры).

Вариант 6

1. Даны две точки A(-4:2:-5) и B(8:6:4) в проективной системе координат.

1) Построить прямую AB в этой системе координат.

2) Написать уравнение прямой AB.

3) Найти координаты еще двух точек C и D.

4) Найти двойное отношение (AB,CD).

2. Дана гомология центром S(-1;2), осью гомологии s с уравнением x+y-1=0 и парой соответственных точек A(3;4) и A_1(1;3). Построить образ и прообраз точки B(1;-2). Система координат – прямоугольная декартовая.

3. Дана трапеция ABCD. Построить прямую AM, четвертую гармоническую к прямым AB, AD и AC.

4. Дано проективное отображение прямой a на прямую a_1 тремя парами соответственных точек в прямоугольной системе координат:

$A(3;0) \to A_1(0;10)$, $B(-5;0) \to B_1(0;-5)$, $C(10;0) \to C_1(0;-10)$. Построить образ точки M(5;0) при этом преобразовании.

5. Привести уравнение квадрики $x^2+2y^2+3z^2+2xy-4xz-4yz=0$ к каноническому виду и определить ее проективный класс.

6. Дана овальная квадрика $x^2=4y$ и точка M(4; 4). При помощи одной линейки построить касательную к квадрике, применяя

1) теорему Паскаля;

2) теорему Штейнера. Перейдя к однородным координатам, написать уравнение этой касательной.

7. Дана овальная квадрика $25x^2-16y^2=400$ и точка M(2;8). Построить поляру точки M и написать ее уравнение (сначала перейти к однородным координатам).

8*. Дана окружность Q и прямая a. Произвольные секущие l и l' пересекают окружность соответственно в точках A, B и A′, B′. $l \cap a = C$, $l' \cap a = C'$, $BC' \cap Q = A_0$, $A'C \cap Q = B_0$. Доказать, что точка пересечения прямых a и AB′ принадлежит прямой A_0B_0. (*Указание:* воспользоваться теоремой Паскаля)

Вариант 7

1. Даны две точки A(-3:2:-5) и B(10:6:4) в проективной системе координат.

1) Построить прямую AB в этой системе координат.

2) Написать уравнение прямой AB.

3) Найти координаты еще двух точек C и D.

4) Найти двойное отношение (AB,CD).

2. Дана гомология центром $S(5;7)$, осью гомологии s с уравнением $x-y=0$ и парой соответственных точек $A(6;9)$ и $A_1(-1;-5)$. Построить образ и прообраз точки $B(-5;4)$. Система координат – прямоугольная декартовая.

3. Дан параллелограмм ABCD. Построить прямую AM, четвертую гармоническую к прямым AB, AD и AC.

4. Дано проективное отображение прямой a на прямую a_1 тремя парами соответственных точек в прямоугольной системе координат:

$A(9;-1)\rightarrow A_1(0;12)$, $B(6;2)\rightarrow B_1(-3;3)$, $C(4;4)\rightarrow C_1(-4;0)$. Построить образ точки $M(5;3)$ при этом преобразовании.

5. Привести уравнение квадрики $x^2+5y^2+8z^2-4xy+6xz-12yz=0$ к каноническому виду и определить ее проективный класс.

6. Дана овальная квадрика $25x^2-16y^2=400$ и точка $M(5;\ y_0)$ на ней ($y_0<0$). При помощи одной линейки построить касательную к квадрике, применяя

1) теорему Паскаля;

2) теорему Штейнера. Перейдя к однородным координатам, написать уравнение этой касательной.

7. Дана овальная квадрика $25x^2+16y^2=400$ и точка $M(3;10)$. Построить поляру точки M и написать ее уравнение (сначала перейти к однородным координатам).

8*. Дана окружность и три пары касательных a, a'; b, b'; c, c'; причем $a \parallel a'$; $b \parallel b'$. Пусть $a\cap c=A$, $b\cap c=B$, $a'\cap c'=A'$, $b'\cap c'=B'$. Доказать, что $AB' \parallel BA'$. (*Указание:* воспользоваться теоремами Брианшона и Дезарга).

Вариант 8

1. Даны две точки $A(-3:-2:-5)$ и $B(10:6:8)$ в проективной системе координат.

1) Построить прямую AB в этой системе координат.

2) Написать уравнение прямой AB.

3) Найти координаты еще двух точек C и D.

4) Найти двойное отношение (AB,CD).

2. Дана гомология центром S(3;9), осью гомологии s с уравнением x-y+8=0 и парой соответственных точек A(1;5) и A_1(-4;-5). Построить образ и прообраз точки B(-3;3). Система координат – прямоугольная декартовая.

3. Даны прямые a: y=2x, b: y=3x, c: y=-x. Построить прямую d, четвертую гармоническую к прямым a, b и c.

4. Дано проективное отображение прямой a на прямую a_1 тремя парами соответственных точек в прямоугольной системе координат:

A(5;0)$\rightarrow$$A_1$(0;-3), B(-10;0)$\rightarrow$$B_1$(0;10), C(0;0)$\rightarrow$$C_1$(0;8). Построить образ точки M(-4;0) при этом преобразовании.

5. Привести уравнение квадрики $x^2+5y^2+3z^2+2xy-4xz-4yz=0$ к каноническому виду и определить ее проективный класс.

6. Дана овальная квадрика $x^2+16y^2=16$ и точка M(3; y_0) на ней ($y_0<0$). При помощи одной линейки построить касательную к квадрике, применяя

1) теорему Паскаля;

2) теорему Штейнера. Перейдя к однородным координатам, написать уравнение этой касательной.

7. Дана овальная квадрика $4x^2-y^2=36$ и точка M(2;7). Построить поляру точки M и написать ее уравнение (сначала перейти к однородным координатам).

8*. Дана окружность Q(O,r) и точка P. Доказать, что точки $A_i=M_iN_{i+1}\cap M_{i+1}N_i$ лежат на одной прямой, если $P\in l_i$ и $l_i\cap Q=\{M_i; N_i\}$. (*Указание:* применить определение и свойства полюсов и поляр).

Вариант 9

1. Даны две точки A(3:-2:-5) и B(8:6:8) в проективной системе координат.

1) Построить прямую AB в этой системе координат.

2) Написать уравнение прямой AB.

3) Найти координаты еще двух точек C и D.

4) Найти двойное отношение (AB,CD).

2. Дана гомология центром $S(3;-5)$, осью гомологии s с уравнением $x+y-6=0$ и парой соответственных точек $A(2;-3)$ и $A_1(1;-1)$. Построить образ и прообраз точки $B(-3;-5)$. Система координат – прямоугольная декартовая.

3. Даны прямые a: $y=x$, b: $y=2x$, c: $y=-x$. Построить прямую d, четвертую гармоническую к прямым a, b и c.

4. Дано проективное отображение прямой a на прямую a_1 тремя парами соответственных точек в прямоугольной системе координат:

$A(0;3)\to A_1(-2;8)$, $B(-2;1)\to B_1(0;6)$, $C(-6;-3)\to C_1(4;2)$. Построить образ точки $M(-4;-1)$ при этом преобразовании.

5. Привести уравнение квадрики $3x^2+9y^2+z^2+6xy-4xz-6yz=0$ к каноническому виду и определить ее проективный класс.

6. Дана овальная квадрика $4x^2-y^2=36$ и точка $M(4; y_0)$ на ней ($y_0<0$). При помощи одной линейки построить касательную к квадрике, применяя

1) теорему Паскаля;

2) теорему Штейнера. Перейдя к однородным координатам, написать уравнение этой касательной.

7. Дана овальная квадрика $x^2+16y^2=16$ и точка $M(-5;7)$. Построить поляру точки M и написать ее уравнение (сначала перейти к однородным координатам).

8*. Трапеция ABCD ($AB \parallel CD$) касается окружности $S(O, r)$ в точках P, Q, M, N, где $P\in AB$, $Q\in BC$, $M\in CD$, $N\in AD$. Доказать, что BD, AC и PM пересекаются в одной точке. (*Указание*: применить предельный случай теоремы Брианшона).

Вариант 10

1. Даны две точки $A(6:-2:1)$ и $B(8:12:8)$ в проективной системе координат.

1) Построить прямую AB в этой системе координат.

2) Написать уравнение прямой AB.

3) Найти координаты еще двух точек C и D.

4) Найти двойное отношение (AB,CD).

2. Дана гомология центром S(6;8), осью гомологии s с уравнением 2x-3y-6=0 и парой соответственных точек A(0;-4) и A_1(-1;-6). Построить образ и прообраз точки B(4;5). Система координат – прямоугольная декартовая.

3. Даны прямые a: y=2x, b: y=3x, c: y=0,5x. Построить прямую d, четвертую гармоническую к прямым a, b и c.

4. Дано проективное преобразование прямой а тремя парами соответственных точек в прямоугольной системе координат:

A(0;-10)→A_1(-7;-3), B(-5;-5)→B_1(-8;-2), C(-6;-4)→C_1(-10;0). Построить образ точки M(-4;-6) при этом преобразовании.

5. Привести уравнение квадрики $x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz-12yz=0$ к каноническому виду и определить ее проективный класс.

6. Дана овальная квадрика $(x-2)^2+(y-4)^2=16$ и точка M(x_0; 0) на ней (x_0>0). При помощи одной линейки построить касательную к квадрике, применяя

1) теорему Паскаля;

2) теорему Штейнера. Перейдя к однородным координатам, написать уравнение этой касательной.

7. Дана овальная квадрика $(x-2)^2+(y-4)^2=9$ и точка M(-4;6). Построить поляру точки M и написать ее уравнение (сначала перейти к однородным координатам).

8*. Доказать, что прямая, соединяющая точку M пересечения боковых сторон AB и CD трапеции ABCD с точкой H пересечения ее диагоналей AC и BD, делит основание трапеции пополам. (*Указание:* использовать гармонические свойства полного четырехвершинника).

Образец решения варианта контрольной работы

1. Даны две точки A(2:4:3) и B(-2:3:6) в проективной системе координат.

1) Построить прямую AB в этой системе координат.

2) Написать уравнение прямой AB.

3) Найти координаты еще двух точек C и D.

4) Найти двойное отношение (AB,CD).

Решение:

1) Пусть $\{X_1; X_2; X_3; E\}$ – проективная система координат на плоскости. Для того, чтобы построить точки A и B, сначала необходимо построить координатный треугольник $X_1X_2X_3$ и взять точку E, не лежащую на сторонах этого треугольника. Проводим прямые X_1E, X_2E, X_3E до пересечения со сторонами X_2X_3, X_1X_3, X_1X_2 в точках E_1, E_2, E_3 соответственно. Строим теперь любые две проекции точки A, например

$A_1(0:4:3)$ и $A_3(2:4:0)$.

$A_1(0:4:3) \in X_2X_3$, $A_3(2:4:0) \in X_1X_2$.

Для построения точки A_1 выбираем произвольную точку O_1 и проводим прямые O_1X_2, O_1X_3 и O_1E_1. На луче O_1E_1 от точки O_1 строим любой вектор $\vec{e}$ и разлагаем его по направлениям O_1X_2 и O_1X_3; получили векторы $\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$, исходящие из точки O_1; $\vec{e} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

В базисе $\{\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$ строим вектор $\overrightarrow{a_1} = \{2;1,5\} || \{4;3\}$, т.е. $\overrightarrow{a_1} = 2\overrightarrow{e_2} + 1,5\overrightarrow{e_3}$. Этот вектор порождает точку A_1. Для построения точки A_1 проводим прямую, проходящую через точку O_1, содержащую вектор $\overrightarrow{a_1}$, до пересечения с прямой X_2X_3 в точке A_1.

Чтобы построить точку A_3, выбираем произвольную точку O_3 и соединяем ее с точками X_2, X_1 и E_3. На луче O_3E_3 строим любой вектор $\vec{q}$ и разлагаем его по направлениям O_3X_1 и O_3X_2; т.е. $\vec{q} = \overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2}$.

В базисе $\{\overrightarrow{q_1}; \overrightarrow{q_2}\}$ строим вектор $\overrightarrow{a_3} = \{1;2\} || \{2;4\}$, т.е. $\overrightarrow{a_3} = 1\overrightarrow{q_1} + 2\overrightarrow{q_2}$. Этот вектор порождает точку A_3. Для построения точки A_3 проводим прямую, проходящую через точку O_3, содержащую вектор $\overrightarrow{a_3}$, до пересечения с прямой X_1X_2 в точке A_3.

Проводим прямые X_1A_1 и X_3A_3. Тогда $X_1A_1 \cap X_3A_3 = A$ – искомая точка.

Аналогично строится и точка $B(-2: 3:6)$. Пусть $B = X_1B_1 \cap X_2B_2$, значит, необходимо построить проекции $B_1(0:3:6)$ и $B_2(-2:0:6)$ точки B, где $B_1 \in X_2X_3$, $B_2 \in X_1X_3$.

Пусть B_1 порождается вектором $\vec{b_1}\{1;2\}||\{3:6\}$. Тогда в базисе $\{\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3}\}$ строим вектор $\vec{b_1}=1\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}$. и проводим прямую через точку O_1, содержащую вектор $\vec{b_1}$ до пересечения с прямой X_2X_3 в точке B_1.

Для построения точки B_2 сначала выбираем произвольную точку O_2, соединяем ее с точками X_1, X_3 и E_2. На луче O_2E_2 строим любой вектор $\vec{m}$ и затем разлагаем его по направлениям $\overrightarrow{m_1}$ и $\overrightarrow{m_2}$; $\vec{m}=\overrightarrow{m_1}+\overrightarrow{m_2}$.

Пусть точка B_2 порождается вектором $\vec{b_2}\{-1;3\}$. Проводим прямую через точку O_2 и вектор $\vec{b_2}$ до пересечения с прямой X_1X_3 (точка B_2 лежит на продолжении X_1X_3 стороны треугольника $X_1X_2X_3$). Получили точку B_2.

$B=X_1B_1\cap X_2B_2$; точка B построена.

Через построенные точки A и B проводим прямую (рис.30).

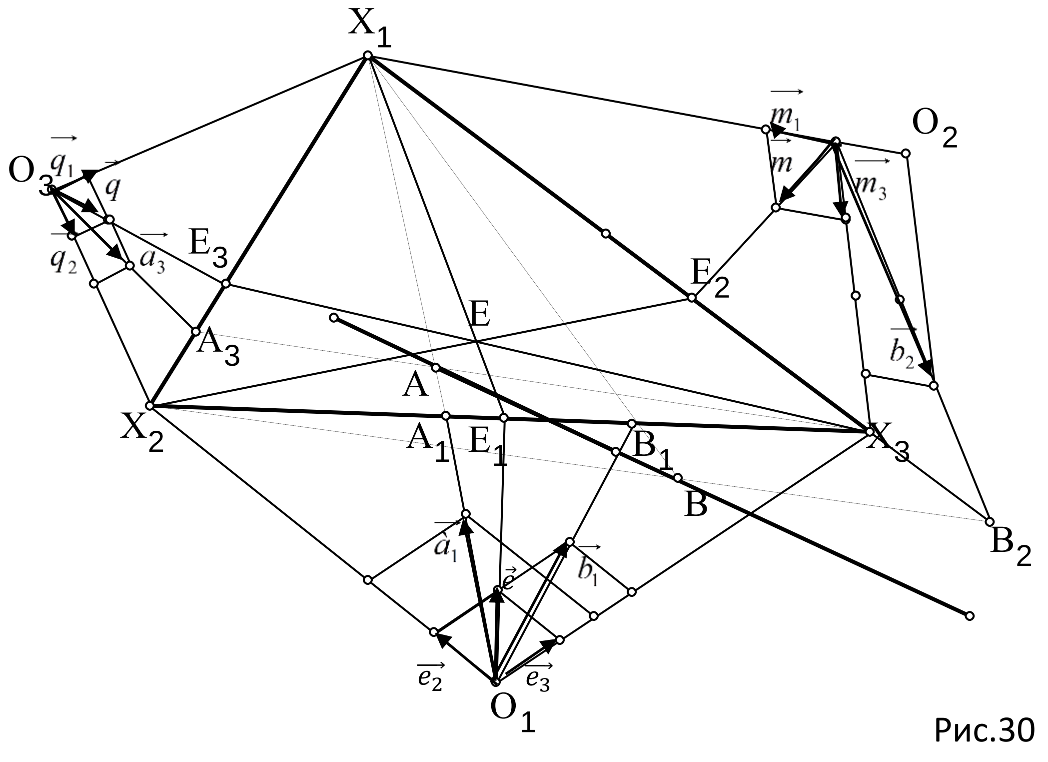

Рис.30

2) Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(a_1:a_2:a_3)$ и $B(b_1:b_2:b_3)$ имеет вид $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$

В задаче дано, что A(2:4:3), B(-2:3:6) $\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Раскроем определитель по элементам первой строки

$x_1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 15x_1 - 18x_2 + 14x_3 = 0$ – уравнение прямой AB в проективной системе координат.

3) Чтобы найти координаты каких-нибудь точек на данной прямой, достаточно в уравнении $15x_1-18x_2+14x_3=0$ двум переменным придать различные числовые значения, не равные нулю одновременно, затем вычислить значение третьей переменной.

Пусть $x_3=0$ и $x_2=1 \Rightarrow 15x_1-18\cdot1+14\cdot0=0 \Rightarrow x_1=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$. Получили, что $x_1:x_2:x_3=$ $\frac{6}{5}:1:0=6:5:0 \Rightarrow$ C(6:5:0).

Пусть $x_1=1$ и $x_2=1 \Rightarrow 15\cdot1-18\cdot1+14x_3=0 \Rightarrow x_3=\frac{3}{14} \Rightarrow x_1:x_2:x_3=1:1:\frac{3}{14}=14:14:3$ $\Rightarrow$ D(14:14:3).

4) Двойное отношение упорядоченной четверки точек A, B, C, D находится по формуле $(AB, CD)=(A_3B_3, C_3D_3)$, если $X_3 \notin AB$.

Проверим, лежит ли точка $X_3(0:0:1)$ на прямой AB: $15x_1-18x_2+14x_3=0$.

$15\cdot0-18\cdot0+14\cdot1\neq0 \Rightarrow X_3 \notin AB$.

$$(AB, CD)=(A_3B_3, C_3D_3)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}.$$

$A(2:4:3) \Rightarrow A_3(2:4:0)= A_3(1:2:0)$, $B(-2:3:6) \Rightarrow B_3(-2:3:0)$

$C(6:5:0) \Rightarrow C_3(6:5:0)$, $D(14:14:3) \Rightarrow D_3(14:14:0)= D_3(1:1:0)$.

$$(AB, CD)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{(5-12)\cdot(-2-3)}{(1-2)\cdot(-10-18)}=\frac{(-7)\cdot(-5)}{(-1)\cdot(-28)}=\frac{5}{4}.$$

Ответ: 2) $15x_1-18x_2+14x_3=0$;

3) C(6:5:0), D(14:14:3);

4) (AB, CD)=$\frac{5}{4}$.

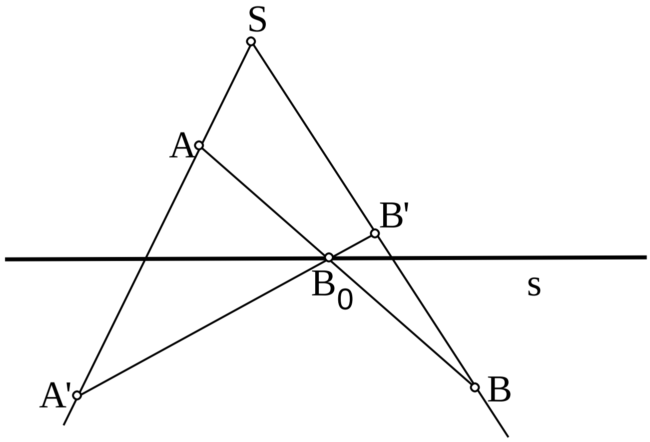

Рис. 31

2. Дана гомология центром S(3; 3), осью s: x-4y-4=0 и парой соответственных точек A(1;1) и A′(0; 0). Построить образ и прообраз точки B(4; -1). Система координат - прямоугольная декартовая.

Решение:

По определению гомологии:

1) S, A, A′ - коллинеарны;
2) S, B, B′ - коллинеарны;
3) $AB \cap A'B' = B_0$, $B_0 \in s$;
4) S – прямая неподвижных точек (рис. 31).

Строим в прямоугольной декартовой системе координат XOY данные точки A, A′, S, B и прямую s. Непосредственно по определению гомологии строим образ точки B, т.е. B′.

1) SB- прямая;
2) $AB \cap s = B_0$;
3) $A'B_0 \cap SB = B'$;
4) B′ - искомая точка.

Чтобы построить прообраз точки B, т.е. точку $\overline{B}$, достаточно применить обратное преобразование.

5) $A'B \cap s = \overline{B}_0$;
6) $A\overline{B_0} \cap SB = \overline{B}$;
7) $\overline{B}$ - прообраз точки B. (рис.32)

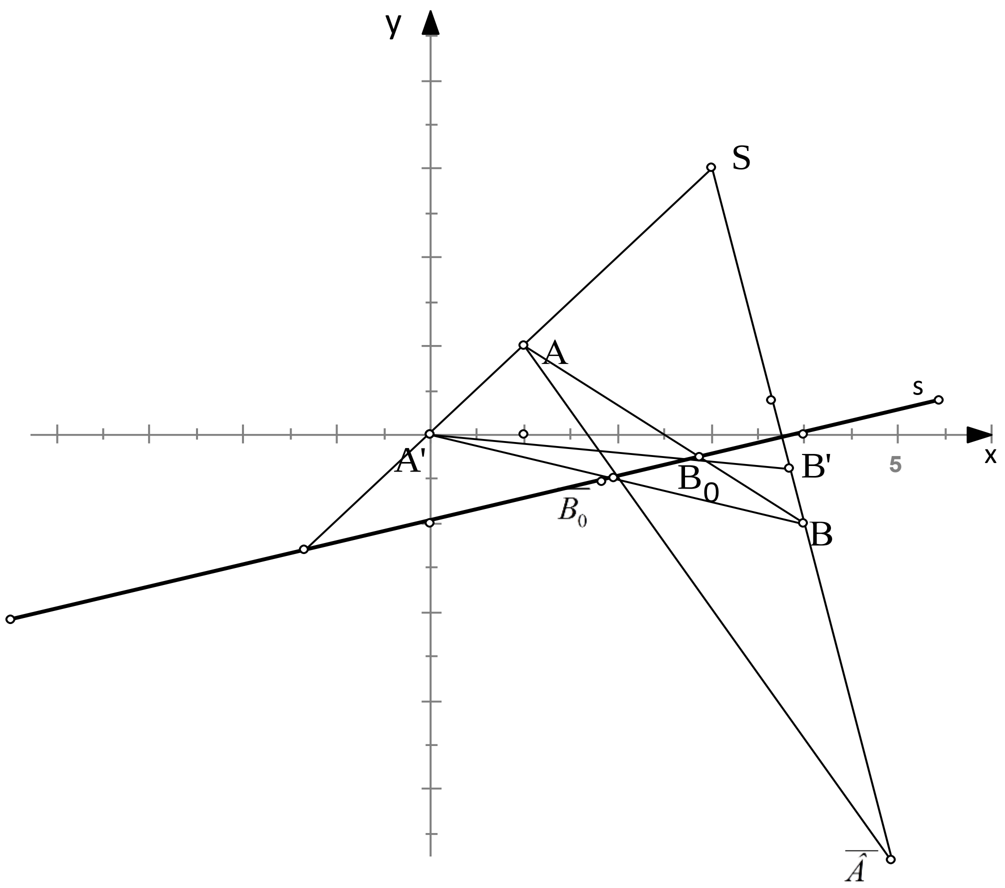

Рис. 32

3. Даны три прямые пучка a, b, c с центром L, где a: y=2; b: y=2x+4; c: y=3x+5 (уравнения даны в прямоугольной системе координат). Построить прямую d, четвертую гармоническую к данным прямым.

Решение:

Если двойное отношение четырех прямых пучка равно (-1), то эти прямые в указанном порядке образуют гармоническую четверку прямых.

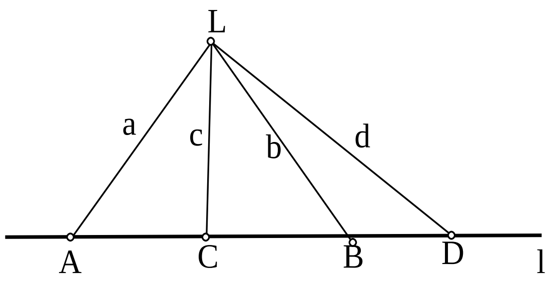

Рис.

Если четыре прямые пучка пересечь произвольной прямой *l*, то получим, что (ab,cd)=(AB,CD). Поэтому решение задачи сводится к построению точки D, четвертой гармонической к трем точкам A, B и C.

Из свойств двойного отношения четырех точек (прямых) данной прямой (данного пучка) следует, что если (AB,CD)<0, то пара AB разделяет пару CD. Это обстоятельство позволяет хотя бы визуально проверить правильность чертежа (рис.33).

Итак, выполним построение:

1) В прямоугольной системе координат строим прямые a, b, c по их уравнениям; $a\cap b\cap c=L$ – центр пучка.
2) Пересечем прямые пучка произвольной прямой l, например, l – это ось OY.
3) $l\cap a=A$, $l\cap b=B$, $l\cap c=C$. Чтобы построить точку D, четвертую гармоническую к точкам A, B и C, построим полный четырехвершинник PQRF.
4) Через точку A (первую точку) проводим две произвольный прямые l_1 и l_2.
5) Через точку C (третью точку) проводим любую прямую l_3, но не совпадающую с l.
6) $l_1\cap l_3=F$.
7) $l_2\cap l_3=Q$.
8) Точку B (вторую точку) соединяем с точками F и Q.
9) $BF\cap l_2=P$.
10) $BQ\cap l_1=R$.
11) PQRF – полный четырехвершинник.
12) PR.
13) $PR\cap l=D$.
14) Соединяем точку D с центром L пучка.
15) LD – искомая прямая d (рис. 34).

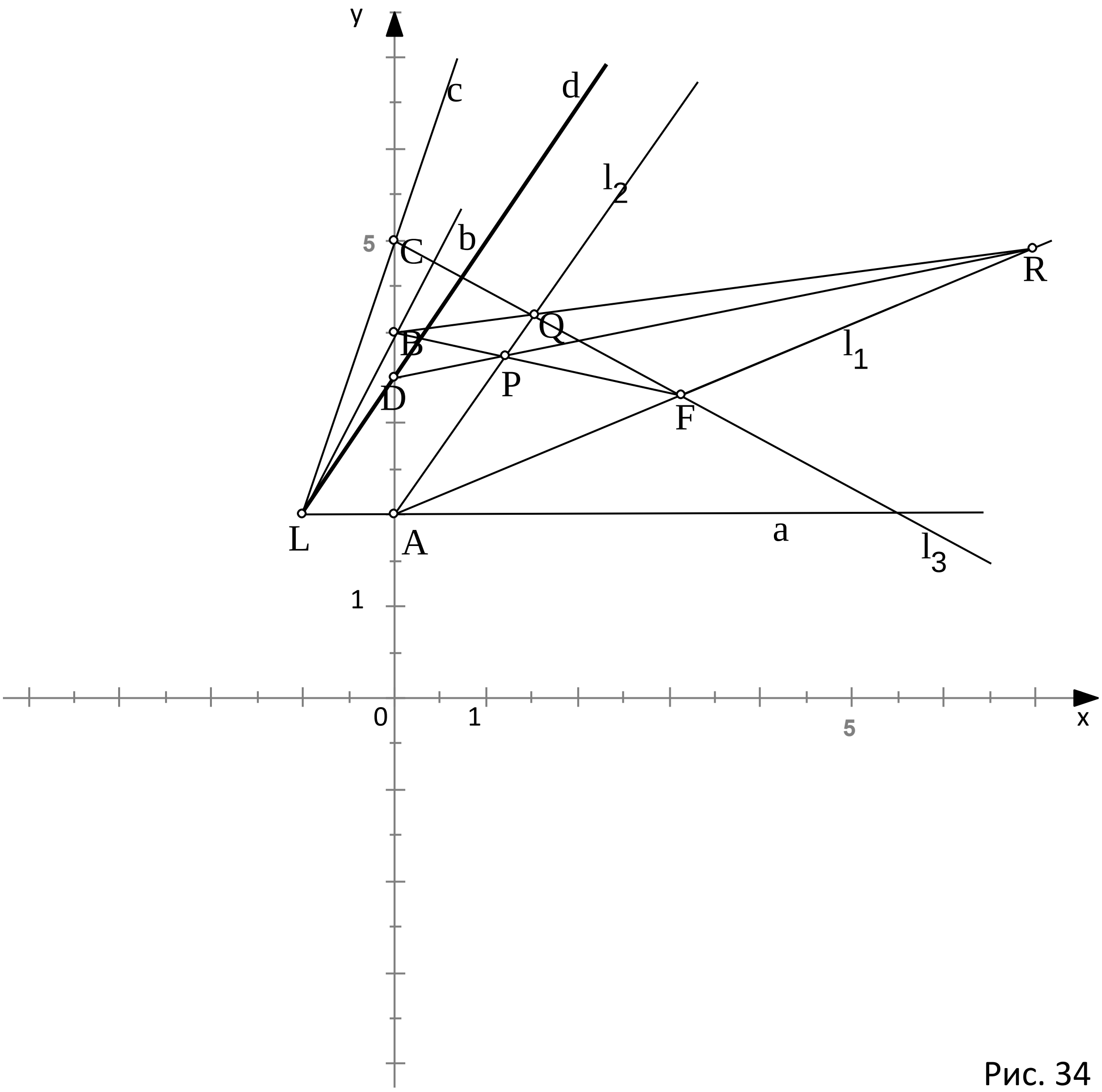

Рис. 34

4.1. Дано проективное отображение прямой а на прямую а′ тремя парами соответственных точек: A(0;-4)→A′(0;3), B(-1;-2)→B′(-1;0), C(-3;2)→C′(-2;-3). Построить образ точки M(-2;0) при этом преобразовании. Система координат – прямоугольная декартовая.

Решение:

Для решения задачи воспользуемся тем, что проективное отображение прямой на прямую можно рассмотреть как композицию двух перспективных отображений: а→q, q→а′ из центров Q и Q′ соответственно.

1) В системе координат XOY строим данные точки и прямые а и а′ (а≡AB; а′ ≡A′B′);

2) Соединяем точки A и A′ прямой $a_0 \equiv AA'$ и выбираем на ней произвольные точки Q и Q′.

3) Соединяем точку Q с точками B, C и M.

4) Соединяем точку Q′ с точками B′ и C′.

5) $QB \cap Q'B' = B_0$, $QC \cap Q'C' = C_0$.

6) Проводим прямую B_0C_0, т.е. прямую q (ось родства).

7) $QM \cap q = M_0$.

8) $Q'M_0 \cap a' = M'$ - искомая (рис.35)

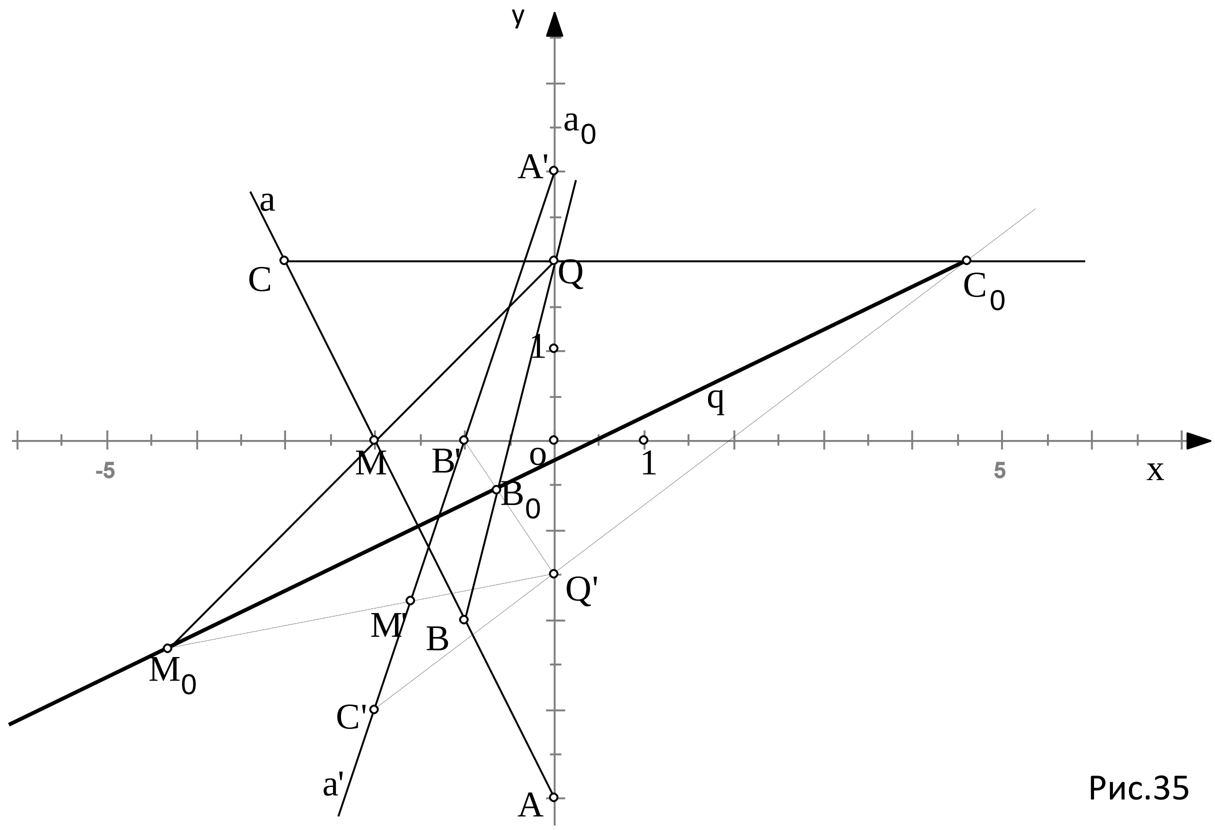

Рис.35

Замечание: Пара точек C и B разделяет пару точек M и A, значит, пара точек C′ и B′ должна разделять пару точек M′ и A′, что видно из чертежа.

4.2. Дано проективное отображение пучка прямых a, b, c с центром в точке L, на пучок прямых a′, b′, c′ с центром в точке L′, где a: y=-3, b: y=2, c: y=4, a′: y=-2x+3, b′: y=x, c′: y=3x-2.

Построить образ прямой m: y=-2 при этом преобразовании. Система координат – прямоугольная декартовая.

Решение:

Эта задача является двойственной по отношению к предыдущей, ее решение также сводится к композиции двух перспективных отображений пучка π [L] на пучок π [Q] с осью перспективы q и затем пучка π [Q] на пучок π [L′] с осью перспективы q′.

Сначала строим данные прямые в системе координат XOY.

1) $a \cap a' = A_0$.
2) $\forall$ q, $A_0 \in q$; $\forall$ q′, $A_0 \in q'$.
3) $q \cap b = B$, $q \cap c = C$, $q \cap m = M$.
4) $q' \cap b' = B'$, $q' \cap c' = C'$.
5) $BB' \cap CC' = Q$ (центр родства).
6) $QM \cap q' = M'$.
7) $L'M' = m'$ - искомая (рис.36).

5. Привести уравнение квадрики $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 10x_2x_3 = 0$ к каноническому виду и определить ее проективный класс.

Решение:

Чтобы привести уравнение квадрики к каноническому виду, используем метод выделения полных квадратов $\{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2\}$.

$2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 10x_2x_3 = 0$ (1)

Выпишем из уравнения (1) все слагаемые, содержащие x_1:

$\varphi = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 = 2(x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3)$ ={выносим общим множителем коэффициент при x_1^2}$=2(x_1^2 + 2x_1(-x_2 + 2x_3))$={из алгебраической суммы $(-2x_1x_2 + 4x_1x_3)$ выносим $2x_1$}

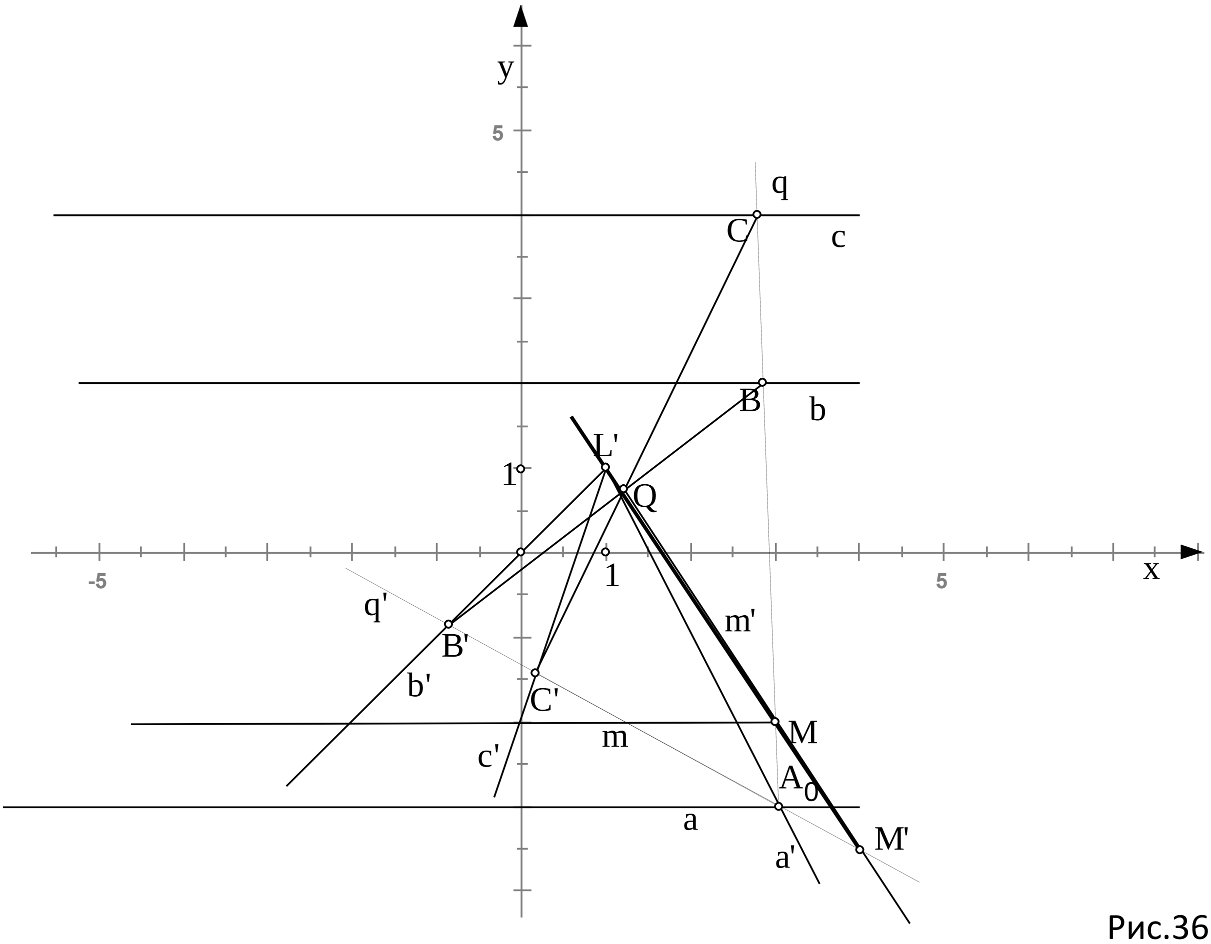

Рис.36

$=2(x_1^2 + 2x_1(-x_2 + 2x_3) + (-x_2 + 2x_3)^2 - (-x_2 + 2x_3)^2)=$

{чтобы получить квадрат суммы двух выражений, прибавим и отнимем $(-x_2+2x_3)^2$}

$=2((x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - (-x_2 + 2x_3)^2)=$

{первые три слагаемых (подчеркнутые) образуют квадрат суммы $(a+b)^2$}

$=2(x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - 2(-x_2 + 2x_3)^2 = 2y_1^2 - 2(-x_2 + 2x_3)^2$

{обозначим $y_1=(x_1-x_2+2x_3)$ и подставим полученное выражение для φ в уравнение (1)}

$2y_1^2 - 2(x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) + x_2^2 + x_3^2 - 10x_2x_3 = 0$

$2y_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 8x_3^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10x_2x_3 = 0$

$2y_1^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - 7x_3^2 = 0$ (2)

Выпишем из уравнения (2) все слагаемые, содержащие x_2 и снова выделим полный квадрат:

$$f = -x_2^2 - 2x_2x_3 = -(x_2^2 + 2x_2x_3) = -(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2)$$
$$= -((x_2 + x_3)^2 - x_3^2) = -(x_2 + x_3)^2 + x_3^2 = -y_2^2 + y_3^2$$

Подставим полученное выражение для f в уравнение (2)}

$2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - 7x_3^2 = 0$

{Обозначим $x_3=y_3$}

$2y_1^2 - y_2^2 - 6y_3^2 = 0$

{Умножим на (-1)}

Итак, получили каноническое уравнение квадрики $-2y_1^2 + y_2^2 + 6y_3^2 = 0$

Это уравнение определяет овальную квадрику.

Запишем формулы преобразования системы координат:

$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 3y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ - формулы перехода от системы координат $\{X_1, X_2, X_3, E\}$ к системе координат $\{Y_1, Y_2, Y_3, E'\}$.

6. Дана овальная квадрика x^2-y^2=-4 и точка $M_0(x_0; y_0)$ на ней, где $x_0=2$, $y_0<0$. При помощи только одной линейки провести касательную к квадрике в точке M_0, используя: 1) теорему Штейнера;

2) теорему Паскаля. Написать уравнение касательной.

Решение:

1) Теорема Штейнера формулируется так: Пусть дано проективное, но неперспективное отображение пучка $\pi[L]$ на пучок $\pi[L']$. Тогда точки пересечения соответственных прямых этих пучков лежат на овальной квадрике, проходящей через центр этих пучков.

Следствие: Образ прямой, проходящей через центры пучков, есть касательная к квадрике, проведенной в точке L′.

Таким образом, решение задачи свелось к построению образа прямой LL′ при указанном отображении.

Схема решения задачи:

1). На овальной квадрике выбираем еще четыре точки, одну из которых обозначим как L. Данную точку M_0 обозначим как L'. Итак, имеем точки L', L, M_1, M_2, M_3.

2). Вводим прямые $LM_1=a$, $LM_2=b$, $LM_3=c$, $LL'=m$.

3). Вводим прямые $L'M_1=a'$, $L'M_2=b'$, $L'M_3=c'$.

4). Рассматриваем проективное отображение пучка $\pi[L]$ на пучок $\pi[L']$: $a\to a'$, $b\to b'$, $c\to c'$.

5). Строим образ прямой m при этом отображении (см. задачу 4.2.), получим прямую m'.

6). Прямая m' - искомая касательная (рис.37).

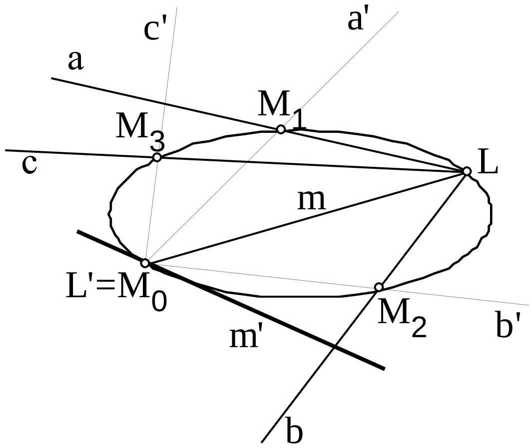

Рис.37

В данной задаче овальной квадрикой является гипербола

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=-1.$

В прямоугольной системе координат строим сначала прямоугольник со сторонами $x=\pm2$ и $y=\pm2$. Прямые, содержащие его диагонали – это асимптоты гиперболы. Строим эти асимптоты, а затем и гиперболу. На гиперболе берем точку M_0 с абсциссой $x_0=2$, но ординатой $y_0<0$. Построение касательной выполним по такому алгоритму:

1). Выбираем на гиперболе произвольные точки M_1, M_2, M_3, M_4. Пусть $M_4\equiv L$.

2). Строим прямые $LM_1=a$, $LM_2=b$, $LM_3=c$, $LL'=m$.

3). Строим прямые $L'M_1=a'$, $L'M_2=b'$, $L'M_3=c'$.

4). $a'\cap a=M_1$

5). $\forall$ q, q'; $M_1\in q$, $M_1\in q'$.

6). $q\cap b=B$, $q\cap c=C$, $q\cap m=M$.

7). $q'\cap b'=B'$, $q'\cap c'=C'$.

8). $BB'\cap CC'=Q$.

9). QM∩q′=M′.

10). M′L′=m′ - искомая прямая (рис.38)

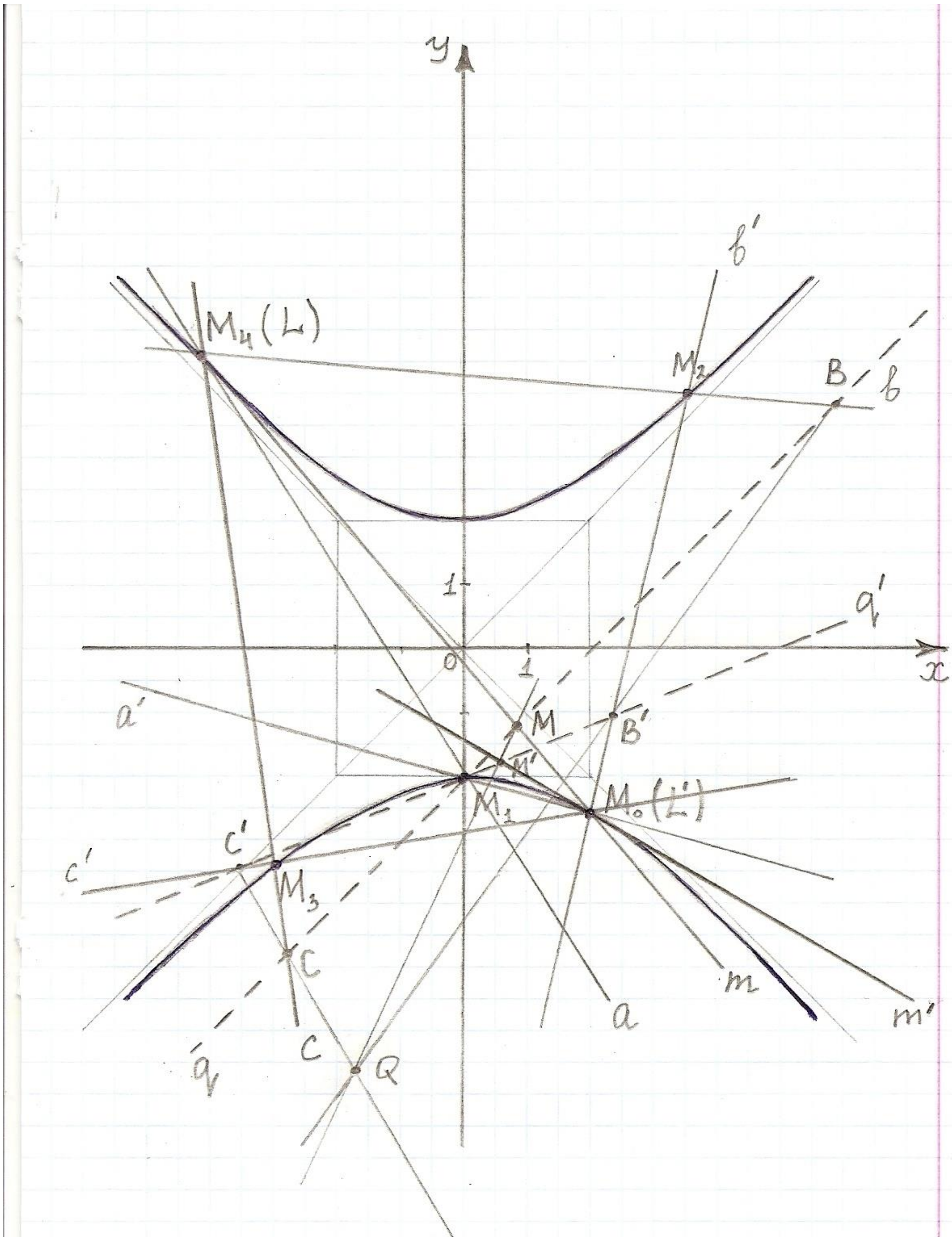

Рис.38

2) Применим для решения задачи теорему Паскаля.

Строим гиперболу по заданному уравнению и выбираем на ней точку $M_0(2, y_0)$, $y_0<0$. Для удобства обозначим точку M_0 как M_1 (или M_6).

1). На гиперболе выбираем дополнительно произвольные четыре точки M_2, M_3, M_4, M_5.

2). Строим прямые $M_1M_2=d_1$, $M_2M_3=d_2$, $M_3M_4=d_3$, $M_4M_5=g_1$, $M_5M_6=g_2$.

3). $d_1\cap g_1=P_1$, $d_2\cap g_2=P_2$.

4). $p=P_1P_2$ – прямая Паскаля.

5). $d_3\cap p=P_3$.

6). $P_3M_1=g_3$ – искомая прямая m (рис. 39).

Чтобы написать уравнение касательной к гиперболе в точке $M_0(2;y_0)$, найдем y_0: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=-1 \Rightarrow y^2=8 \Rightarrow y=\pm 2\sqrt{2}$. Так как $y_0<0$, то $y_0=-2\sqrt{2}$. Перейдем к однородной системе координат. Тогда $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$;

$x:y:1=x_1:x_2:x_3 \Rightarrow \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2-\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2=-4 \Rightarrow x_1^2-x_2^2+4x_3^2=0$ - уравнение гиперболы в однородных координатах.

Координаты точки М – это $(x_1:x_2:x_3)$ или $(2:-2\sqrt{2}:1)$.

Если уравнение квадрики имеет вид $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0$ и дана точка $M_0(m_1:m_2:m_3)$ на квадрике, то координаты касательной *l(u₁:u₂:u₃)* находятся по формуле:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix},$$ где $a_{ij}=a_{ji}$.

В нашем примере $a_{11}=1$, $a_{22}=-1$, $a_{33}=4$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$; $m_1=2$, $m_2=-2\sqrt{2}$, $m_3=1 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot(-2\sqrt{2})+0\cdot 1 \\ 0\cdot 2-1\cdot(-2\sqrt{2})+0\cdot 1 \\ 0\cdot 2+0\cdot(-2\sqrt{2})+4\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$u_1=2$, $u_2=2\sqrt{2}$, $u_3=4 \Rightarrow l$: $2x_1+2\sqrt{2}\,x_2+4x_3=0$ или $x_1+\sqrt{2}\,x_2+2x_3=0$ (*)

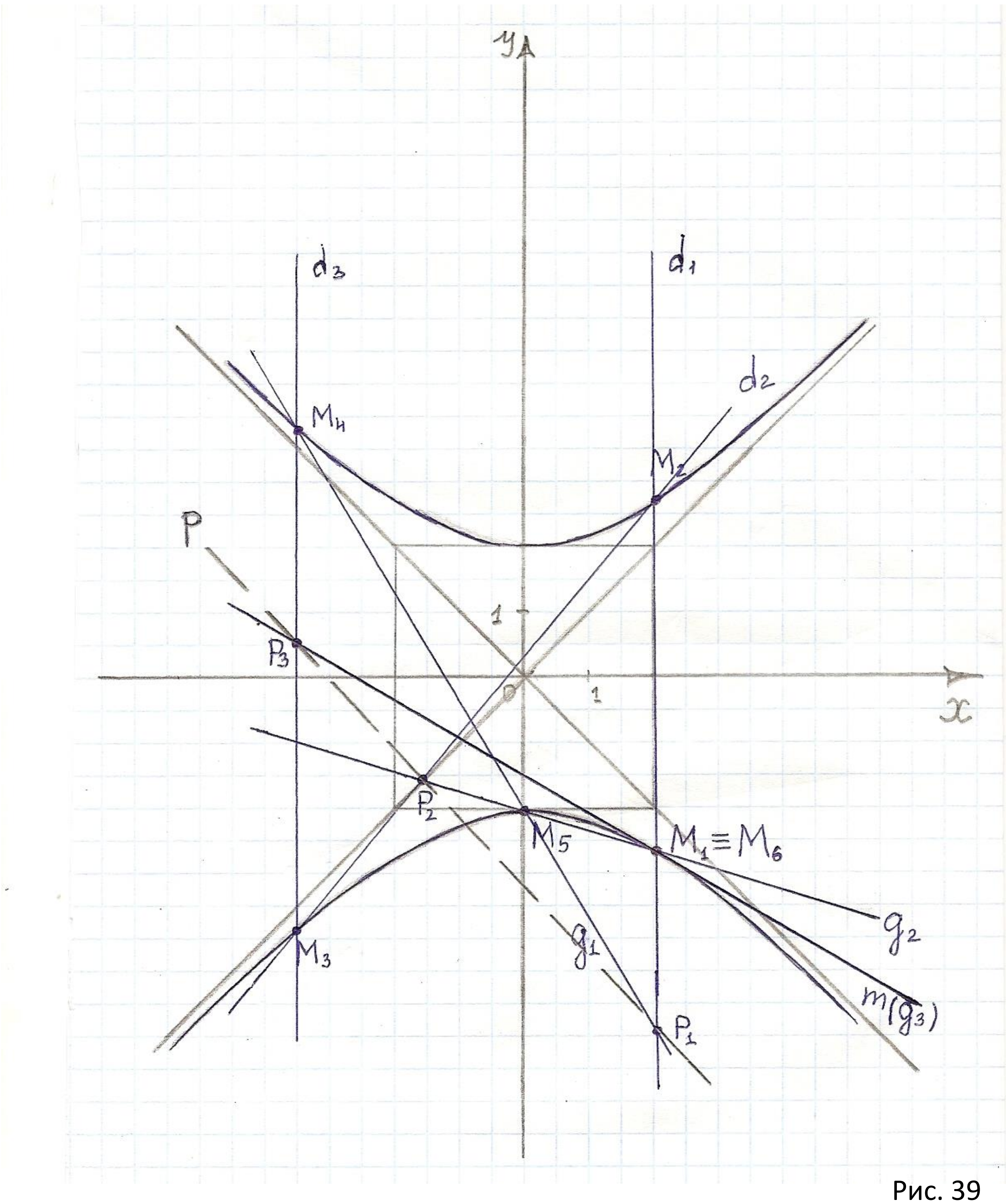

Рис. 39

Вернемся к прямоугольным координатам, для этого уравнение (*) разделим на x_3:

$$\frac{x_1}{x_3} + \sqrt{2}\frac{x_2}{x_3} + 2\frac{x_3}{x_3} = 0 \quad \Rightarrow$$

Итак, $x+\sqrt{2}\,y+2=0$ – уравнение касательной.

7. Дана овальная квадрика x^2=-4y и точка M(4;-1). Пользуясь только одной линейкой, построить поляру точки M. Написать уравнение поляры.

Решение:

Если точка M – внешняя по отношению к квадрике, то для построения поляры достаточно провести три секущие E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 через точку M.

Затем построить точки A= $E_2F_1 \cap E_1F_2$ и B= $E_2F_3 \cap E_3F_2$. Прямая AB – искомая поляра. Пусть AB пересекает квадрику в двух точках – C и D, тогда по свойству полюсов и поляр, получим, что MC и MD – касательные к квадрике. Это обстоятельство позволяет проверить правильность построения поляры (рис. 40).

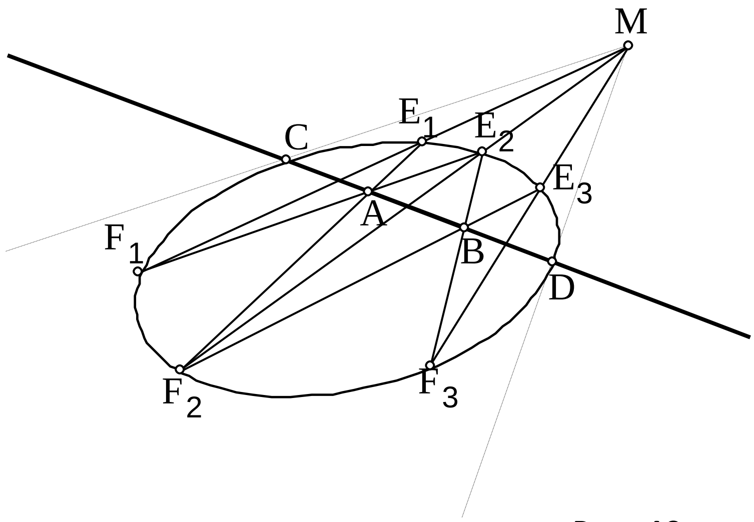

Рис. 40

В данной задаче овальной квадрикой является парабола $y = -\frac{1}{4}x^2$. Строим по точкам эту параболу и точку M(4; -1) в прямоугольной системе координат

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	-4	$-\frac{25}{4}$

Построение поляры выполним по следующему алгоритму:

1). $\forall\ l_1, l_2, l_3;$ M принадлежит этим прямым.

2). $l_1 \cap \gamma = \{E_1;F_1\}$

3). $l_2 \cap \gamma = \{E_2;F_2\}$

4). $L_3 \cap \gamma = \{E_3;F_3\}$

5). $E_1F_2 \cap E_2F_1$=A.

6). $E_2F_3 \cap E_3F_2$=B.

7). AB – искомая прямая.

Для проверки

8). P=AB, p$\cap\gamma$=C.

9). MC – касательная к кривой (рис. 41).

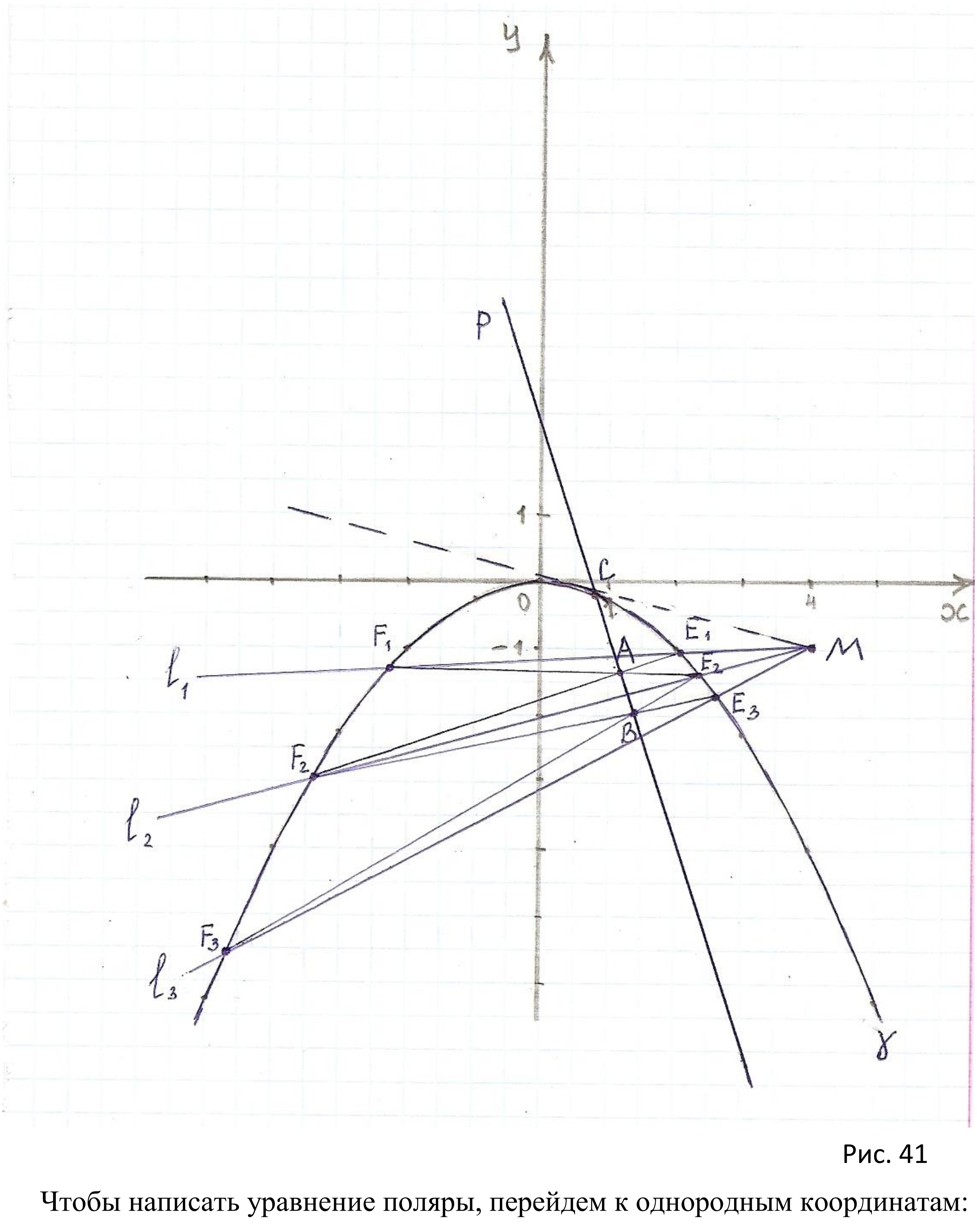

Рис. 41

Чтобы написать уравнение поляры, перейдем к однородным координатам:

$x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$

Имеем $x^2+4y=0 \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_3^2} + 4\frac{x_2}{x_3} = 0 \Rightarrow x_1^2 + 4x_2x_3 = 0$

$M(4; -1) \Rightarrow M(4: -1: 1)$.

Координаты $(u_1: u_2: u_3)$ поляры можно найти по формуле U=AM, т.е.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \\ \grave{a}_{31} & \grave{a}_{32} & \grave{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}.$$

γ: $x_1^2 + 4x_2x_3 = 0 \Rightarrow a_{11}=1,\ a_{22}=a_{33}=0,\ a_{12}=a_{13}=0,\ a_{23}=4:2=2$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 0\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 4 + 0\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 4 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_1 = 4 \\ u_2 = -2 \\ u_3 = 2 \end{matrix}$$

Запишем уравнение поляры $4x_1-2x_2+2x_3=0$

Разделим уравнение на x_3: $4\frac{x_1}{x_3} - 2\frac{x_2}{x_3} + 2 = 0$. Так как $x = \frac{x_1}{x_3}$ $\quad y = \frac{x_2}{x_3}$, то 4x-2y+2=0 или 2x-y+1=0 – уравнение поляры в прямоугольной декартовой системе координат.

8. Пусть $A_1B_1B_2A_2$ трапеция с основаниями A_1A_2 и B_1B_2. Через точки A_1 и B_1 проведены прямые $a_1 || b_1$ и через A_2 и B_2 прямые $a_2 || b_2$ (a_1 не параллельна a_2). Доказать, что точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, a_1 и a_2, b_1 и b_2 лежат на одной прямой.

Доказательство:

Рассмотрим треугольники A_1NA_2 и B_1MB_2, где N= $a_1 \cap a_2$,

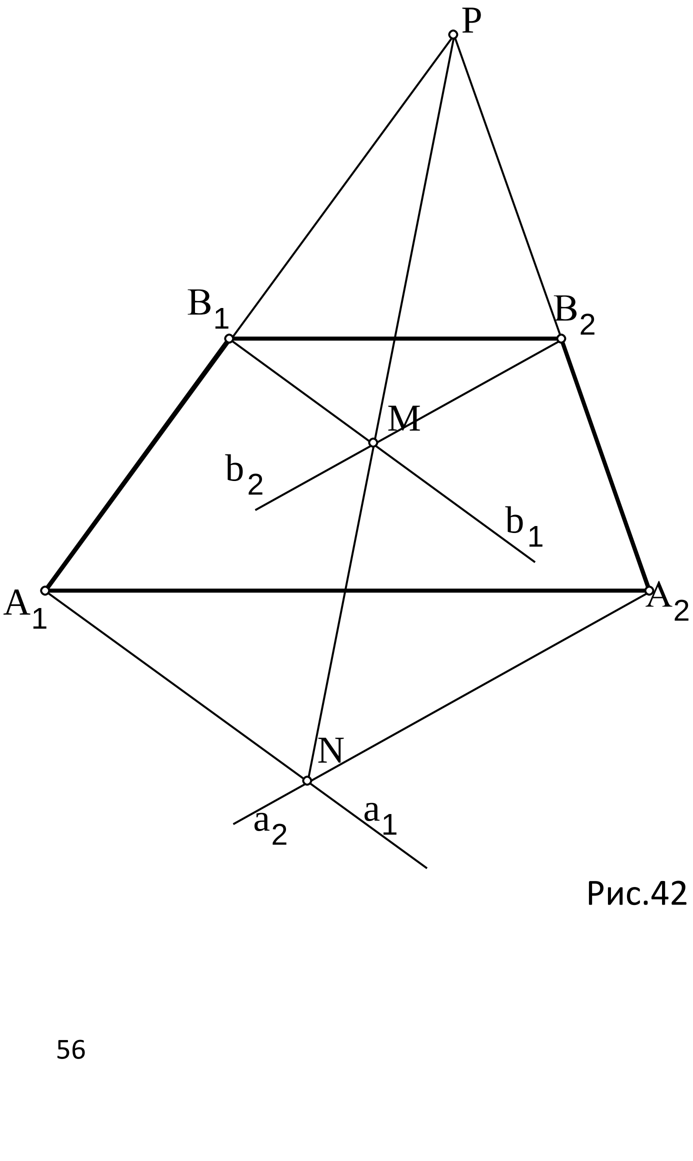

Рис.42

$M = b_1 \cap b_2$ (рис.42). По условию $A_1A_2 || B_1B_2$, $B_1M || A_1N$, $B_2M || A_2N$, следовательно, это дезарговые треугольники. По обратной теореме Дезарга прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, пересекаются водной точке, значит, точка $P = A_1B_1 \cap A_2B_2$ принадлежит прямым MN и A_2B_2, т.е. точки P, M и N – коллинеарны.

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

1. Контрольная работы выполняется в отдельной тетради синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя).
2. На обложке тетради должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название раздела дисциплины, номер контрольной работы.

Например:

Контрольная работа № 1 по проективной геометрии
студентки факультета информатики, математики и экономики
I курса группы МППОз - 21 Ивановой Татьяны Александровны

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы.
4. В контрольной работе предлагается 8 заданий. Первые семь являются обязательными для выполнения. Восьмая задача – повышенной сложности, студент решает ее по желанию. Контрольная работа, которая содержит задачи не своего варианта, не будет зачтена.
5. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы.

6. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями.

7. Чертежи следует выполнять аккуратно карандашом, используя чертежные инструменты. Чертеж рекомендуется делать крупно, применяя при необходимости цветные карандаши. Допускается построение чертежей с помощью специальных компьютерных программ (например, “Живая математика” или GeoGebra)

8. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком. Преподаватель имеет право не принимать работу на проверку во время сессии.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Атанасян, С.Л. Геометрия 1: учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский. — Москва : Лаборатория знаний, 2017. — 334 с. – ISBN 978-5-00101-452-2. — URL: https://e.lanbook.com/book/94095. — Текст: электронный.

2. Атанасян, С.Л. Геометрия 2 : учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский, В.Г. Ушаков. — Москва : Лаборатория знаний, 2015. — 547 с. — ISBN 978-5-9963-2876-5. - URL: https://e.lanbook.com/book/66314 . — Текст: электронный.

3. Денисова, Н. С. Дополнительные главы проективной геометрии : учебное пособие / Н. С. Денисова, А. В. Никифорова. — Москва : Прометей, 2016. — 82 с. — ISBN 978-5-9907986-3-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/78160 (дата обращения: 23.07.2021)

Дополнительная литература

1. Горшкова Л.С., Паньженский В.И., Марина Е.В. Проективная геометрия: Учебное пособие для студентов и преподавателей педагогических вузов / Пензенский гос. пед. ун-т им. В.Г.Белинского. - Пенза, 2003.–164 с.

Электронные ресурсы

1. Дистанционное образование в МГУ : интернет-портал Московского государственного университета. - Москва, 1997 - 2019. – URL: http://www.msu.ru/study/dist-learn.html (дата обращения: 23.07.2021). – Текст : электронный.

2. Российский образовательный портал. Коллекция ЦОР – [Б. м.], 2015-2019. - URL: http://www.school.edu.ru, (дата обращения: 23.07.2021). – Текст : электронный.

3. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов / ФЦИОР. – Москва, 2015-2021. – URL: http://fcior.edu.ru/ (дата обращения: 23.07.2021). – Текст : электронный.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Общероссийский математический портал (информационная система) - http://www.mathnet.ru/
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» - http://www.window.edu.ru.
3. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов - http://fcior.edu.ru. Доступ свободный.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Атанасян, С.Л. Геометрия 1: учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский. — Москва : Лаборатория знаний, 2017. — 334 с. – ISBN 978-5-

00101-452-2. — URL: https://e.lanbook.com/book/94095. — Текст: электронный.
2. Атанасян, С.Л. Геометрия 2 : учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский, В.Г. Ушаков. — Москва : Лаборатория знаний, 2015. — 547 с. — ISBN 978-5-9963-2876-5. - URL: https://e.lanbook.com/book/66314 . — Текст: электронный.
3. Горшкова Л.С., Паньженский В.И., Марина Е.В. Проективная геометрия: Учебное пособие для студентов и преподавателей педагогических вузов / Пензенский гос. пед. ун-т им. В.Г.Белинского. - Пенза, 2003.–164 с.
4. Денисова, Н. С. Дополнительные главы проективной геометрии : учебное пособие / Н. С. Денисова, А. В. Никифорова. — Москва : Прометей, 2016. — 82 с. — ISBN 978-5-9907986-3-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/78160 (дата обращения: 23.07.2021)
5. Певзнер С.Л., Цаленко М.М. Задачник-практикум по проективной геометрии: учеб. пособие для студ.-заоч. II-III курсов физико-мат. фак. пед. ин-тов. - Москва : Просвещение, 1982. – 80 с.
6. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. - Москва : Платон, 1997. - 160 с.