Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Решетникова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

*Методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе
для обучающихся по направлениям подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии»
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий»
09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль «Автоматизированные системы обработки информации и управления»
09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике»*

Новокузнецк

2019

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73
Р 47

Решетникова Е.В.

Р 47 Дискретная математика: методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий», 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль «Автоматизированные системы обработки информации и управления», 09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике» / Е.В. Решетникова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2019 – 94 с.

Методические указания содержат индивидуальные задания и указания к их выполнению; список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для наиболее рациональной организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов.

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 3 от 04.10.2019

Заведующий каф. МФММ
_______________/ Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 4 от 12.12.2019

Председатель методической комиссии ФИМЭ
_______________/ Г.Н. Бойченко

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73
Р 47

Текст представлен в авторской редакции

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий», 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль «Автоматизированные системы обработки информации и управления», 09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике» и направлены на оказание помощи студентам в выполнении внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий) по дисциплине «Дискретная математика».

Дискретная математика представляет собой область математики, в которой изучаются свойства структур конечного характера, а также бесконечных структур, предполагающих скачкообразность происходящих в них процессов или отделимость составляющих их элементов.

Традиционно к дискретной математике относят такие области математического знания как теория множеств, математическая логика, теория графов и т. п.

Наиболее значимой областью применения методов дискретной математики является область компьютерных технологий. Это объясняется необходимостью создания и эксплуатации электронных вычислительных машин, средств передачи и обработки информации, автоматизированных систем управления и проектирования.

Целью изучения данной дисциплины является построение прочного фундамента математического образования для изучения специализированных курсов, читаемых на направлениях, связанных с информационными технологиями и вычислительной техникой. Материал курса «Дискретная математика» составляет базу для таких важнейших на сегодняшний день специализированных дисциплин как «Электротехника, электроника и схемотехника», «Вычислительные системы, сети и телекоммуникации», «Параллельные и распределенные вычислительные системы», «Базы данных», «Моделирование систем», «Системы искусственного интеллекта», «Экспертные системы», «Разработка и сопровождение корпоративных информационных систем», «Программная инженерия».

В методические рекомендации включено: варианты индивидуальных заданий, методические указания к выполнению индивидуальных заданий, список основной и дополнительной литературы.

Приведенные примеры решения типовых заданий представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям и выполнения индивидуальных заданий.

Таким образом, данные методические материалы позволяют студенту подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам, успешно выполнить индивидуальные задания. Методические указания могут оказаться полезными при написании курсовых и выпускных квалификационных работ.

1 МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ

1.1. Индивидуальное задание № 1 по теме «Множества и отношения»

Задание 1.1. Докажите справедливость отношения тремя способами:

1) используя диаграммы Эйлера-Венна;

2) используя метод, основанный на определениях операций теории множеств;

3) эквивалентными преобразованиями.

($A, B, C \in U$, U – универсальное множество задачи).

Вариант 1.

1.1. $(A \setminus B) \oplus (C \setminus D) = A \oplus C$, если $A \cap B = C \cap D$.

1.2. $A \cup B \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = U$.

Вариант 2.

1.1. $(A \cup B) \oplus (C \cup B) = B \oplus C$, если $A \cap B = D$, $C \cap D = A$.

1.2. $((A \cup \overline{B}) \cap (\overline{B} \cup C)) \cup ((\overline{A} \cup B) \cap (B \cup \overline{C})) = U$.

Вариант 3.

1.1. $(A \setminus B) \oplus (B \setminus C) \oplus (C \setminus A) = (B \setminus A) \oplus (C \setminus B) \oplus (A \setminus C)$.

1.2. $((A \cup B) \setminus C) \subset (A \cup (B \setminus C))$.

Вариант 4.

1.1. $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = A$.

1.2. $A \cap B = A$, если $\overline{A} \cup B = 1$.

Вариант 5.

1.1. $(A \cup B) \oplus (A \cup C) \oplus (B \cup C) = (B \cap A) \oplus (C \cap A) \oplus (B \cap C)$.

1.2. $((A \cup B) \setminus C) \subset ((A \setminus C) \cup (B \setminus A))$.

Вариант 6.

1.1. $((A \cup B) \cap C) \cup (\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) = \overline{A} \cup C$.

1.2. $(A \setminus (B \setminus C)) \subset ((A \setminus B) \cup (B \cap C))$.

Вариант 7.

1.1. $(A \cap B) \setminus (C \cup D) = (A \setminus C) \cap (B \setminus D)$.

1.2. $(A \cap (B \cup C)) \subset ((A \cap B) \cup C)$.

Вариант 8.

1.1. $(A \setminus B) \oplus (B \setminus A) = A \oplus B$.

1.2. $P \setminus Q = A \cap C$, если $P = A \setminus (B \setminus C)$, $Q = (A \setminus B) \setminus C$.

Вариант 9.

1.1. $\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{B}\cap C\right)\right)\cap\left(\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(B\cap\overline{C}\right)\right)=\emptyset$.

1.2. $\left(A\setminus\left(B\setminus C\right)\right)\subset\left(A\cup\left(B\cap C\right)\right)$.

Вариант 10.

1.1. $(A\cup B)\oplus(C\cup D)=A\oplus B\oplus C\oplus D$, если $A\cap B=C\cap D$.

1.2. $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$.

Вариант 11.

1.1. $((A\cap C)\oplus(B\cap D))\subset((A\oplus B)\cup(C\oplus D))$.

1.2. $(A\oplus B)\setminus C=\left(A\setminus(B\cup C)\right)\cup\left(B\setminus(A\cup C)\right)$.

Вариант 12.

1.1. $\left(\left(\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup\left(A\cap\overline{C}\right)\right)\cap\left(\left(\overline{A}\cap B\right)\cup(B\cap C)\right)=\emptyset$.

1.2. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(B\setminus A)\oplus(A\setminus B)$.

Вариант 13.

1.1. $(A\setminus B)\setminus C\subset A\setminus(B\setminus C)$.

1.2. $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)=(A\cup B\cup C)\oplus(A\cap B\cap C)$.

Вариант 14.

1.1. $((A\cup C)\oplus(B\cup D))\subset((A\oplus B)\cup(C\oplus D))$.

1.2. $\left(\left(\overline{B}\cap A\right)\cup C\right)\cap\left(\left(\overline{A\cup C}\right)\cup B\right)=B\cap C$.

Вариант 15.

1.1. $(C\cap B)\cup\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)\cup\left(\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{C}\right)=U$.

1.2. $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$, если $C\subset A$.

Вариант 16.

1.1. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

1.2. $\left((A\cup B)\setminus C\right)\subset\left((A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)\right)$.

Вариант 17

1.1. $\left(A\setminus(B\cup C)\right)\cup\left(B\setminus(A\cup C)\right)\cup\left(C\setminus(A\cup B)\right)=A\oplus B\oplus C\oplus(A\cap B\cap C)$.

1.2. $\left((A\setminus C)\cup(B\setminus A)\right)\subset(A\cup B)$.

Вариант 18.

1.1. $A\oplus B=\left(\overline{A}\cup B\right)\oplus\left(A\cup\overline{B}\right)$.

1.2. $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(A\cup C)$.

Вариант 19.

1.1. $\left(\overline{A}\cup B\right)\oplus\left(\overline{B}\cup A\right)=(A\cap B)\oplus(A\cup B)$.

1.2. $\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(\overline{B}\cup C\right)\subset\left(\overline{A}\cup C\right)$

Вариант 20.

1.1. $(A\setminus B)\oplus\left((A\oplus C)\cap B\right)=(A\setminus C)\oplus\left((A\oplus B)\cap C\right)$.

1.2. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$, если $A\subset C$

Задание 1.2. Даны соответствия $P_1\subseteq A\times B$, $P_2,P_3\subseteq B^2$, где $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$. Определите область определения и область значений всех данных соответствий. Изобразите данные соответствия диаграммами и матрицами. Вычислите P_1^{-1}, $P_2\cup P_3$, $P_2\cap P_3$, $P_1\circ P_2$, $P_2\circ P_3$, P_2^2, $(P_1\circ P_2)^{-1}$, используя определения операций и матрицы исходных соответствий, сравните полученные результаты.

Проверьте с помощью матрицы, являются ли отношения P_2 и P_3 рефлексивными, антирефлексивными симметричными, антисимметричными, транзитивными, полными?

Вариант 1.

$P_1=\{(a,2),(a,3),(b,2),(c,1),(c,2),(c,4)\}$;

$P_2=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(4,4)\}$;

$P_3=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4)\}$.

Вариант 2.

$P_1=\{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2)\}$;

$P_2=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,2),(4,4)\}$;

$P_3=\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(3,1),(4,4)\}$.

Вариант 3.

$P_1=\{(a,1),(a,2),(c,3),(a,4),(c,2),(c,4)\}$;

$P_2=\{(2,1),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$;

$P_3=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(2,4),(3,2),(4,2)\}$.

Вариант 4.

$P_1=\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,4),(c,3),(c,2)\}$;

$P_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(4,4)\}$;

$P_3=\{(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(4,2)\}$.

Вариант 5.

$P_1=\{(a,1),(a,4),(b,2),(b,3),(c,1),(c,4)\}$;

$P_2=\{(1,1),(1,4),(2,1),(3,4),(4,3),(4,1)\}$;

$P_3 = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,3)\}.$

Вариант 6.

$P_1 = \{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,3)\};$

$P_2 = \{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,2),(4,1)\};$

$P_3 = \{(1,4),(2,4),(2,1),(3,4),(4,2),(4,3)\}.$

Вариант 7.

$P_1 = \{(a,1),(b,3),(b,1),(b,4),(c,3),(c,2)\};$

$P_2 = \{(1,3),(1,4),(2,2),(3,3),(4,3),(4,4)\};$

$P_3 = \{(1,1),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4)\}.$

Вариант 8.

$P_1 = \{(a,1),(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,4)\};$

$P_2 = \{(1,3),(1,2),(2,3),(3,2),(3,4),(4,1)\};$

$P_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(4,1)\}.$

Вариант 9.

$P_1 = \{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3),(c,1),(c,4)\};$

$P_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\};$

$P_3 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}.$

Вариант 10.

$P_1 = \{(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,2)\};$

$P_2 = \{(1,1),(1,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(4,2)\};$

$P_3 = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,2),(3,4),(4,2),(4,3)\}.$

Вариант 11.

$P_1 = \{(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,2)\};$

$P_2 = \{(1,1),(1,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\};$

$P_3 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}.$

Вариант 12.

$P_1 = \{(b,1),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3),(c,4)\};$

$P_2 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\};$

$P_3 = \{(1,2),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\}.$

Вариант 13.

$P_1 = \{(a,1),(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,3)\};$

$P_2 = \{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\};$

$P_3 = \{(1,2),(2,1),(2,4),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.

Вариант 14.

$P_1 = \{(a,2),(a,3),(a,4),(c,1),(c,3),(c,4)\}$;

$P_2 = \{(1,4),(2,3),(2,1),(3,4),(4,2)\}$;

$P_3 = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3),(4,4)\}$.

Вариант 15.

$P_1 = \{(a,1),(a,2),(b,3),(b,4),(c,3),(c,4)\}$;

$P_2 = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3)\}$;

$P_3 = \{(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1)\}$.

Вариант 16.

$P_1 = \{(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,4)\}$;

$P_2 = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4)\}$;

$P_3 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)\}$.

Вариант 17.

$P_1 = \{(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,2)\}$;

$P_2 = \{(1,1),(1,3),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2)\}$;

$P_3 = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(4,4)\}$.

Вариант 18.

$P_1 = \{(a,3),(b,4),(b,3),(c,1),(c,2),(c,4)\}$;

$P_2 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(4,2),(4,3)\}$;

$P_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(4,1),(4,3)\}$.

Вариант 19.

$P_1 = \{(a,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,3),(c,4)\}$;

$P_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$;

$P_3 = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,4),(4,3)\}$.

Вариант 20.

$P_1 = \{(a,2),(a,3),(a,4),(c,1),(c,2),(c,3)\}$;

$P_2 = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4)\}$;

$P_3 = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,4),(4,1),(4,3)\}$.

Задание 1.3. Найдите область определения, область значений отношения P. Является ли отношение P рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, не симметричным, транзитивным, полными? Обоснуйте ответ, используя определение свойств.

Вариант 1. $P \subseteq R^2, \quad (x,y) \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Вариант 2. $P \subseteq R^2, \quad (x,y) \in P \Leftrightarrow x \cdot y > 1$.

Вариант 3. $P \subseteq R^2, \quad (x,y) \in P \Leftrightarrow y = |x|$.

Вариант 4. $P \subseteq R^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$.

Вариант 5. $P \subseteq R^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x - y \in Z$.

Вариант 6. $P \subseteq R^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x + y = -2$.

Вариант 7. $P \subseteq R^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$.

Вариант 8. $P \subseteq R^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow y < x - 1$.

Вариант 9. $P \subseteq R^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x^2 = y$.

Вариант 10. $P \subseteq R^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x^2 \geq y$.

Вариант 11. $P \subseteq Z^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Вариант 12. $P \subseteq Z^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x + y$ кратно 3.

Вариант 13. $P \subseteq Z^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x - y$ кратно 2.

Вариант 14. $P \subseteq Z^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow 2x = 3y$.

Вариант 15. $P \subseteq Z^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x + y$ нечетно.

Вариант 16. $P \subseteq Z^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x - y$ четно.

Вариант 17. $P \subseteq Z^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow 5x = 2y$.

Вариант 18. $P \subseteq Z^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x = -y$.

Вариант 19. $P \subseteq Z^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x + 1 = y$.

Вариант 20. $P \subseteq Z^2, \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow y = x - 2$.

1.2 Методические указания к выполнению индивидуального задания № 1

Задание 1.1.

Докажите справедливость отношения $(A \oplus B) \setminus A = \overline{A} \cap B$

1) используя диаграммы Эйлера-Венна;

2) используя метод, основанный на определениях операций теории множеств;

3) эквивалентными преобразованиями.

Решение.

1) Докажем справедливость отношения $(A \oplus B) \setminus A = \overline{A} \cap B$, используя диаграммы Эйлера-Венна. Для чего изобразим на отдельных диаграммах левую и правую части равенства. Построение будем выполнять последовательно (в порядке приоритета операций в формуле).

Для построения диаграммы множества $\left(A\oplus B\right)\setminus A$ выполним два шага:

шаг 1 – построим диаграмму множества $A\oplus B$ (рис. 1.1,а);

шаг 2 – диаграмму множества $\left(A\oplus B\right)\setminus A$ получаем, заштриховывая еще раз область, выделенную на шаге 1, кроме ее части, попавшей в область множества A (рис. 1.1, б);

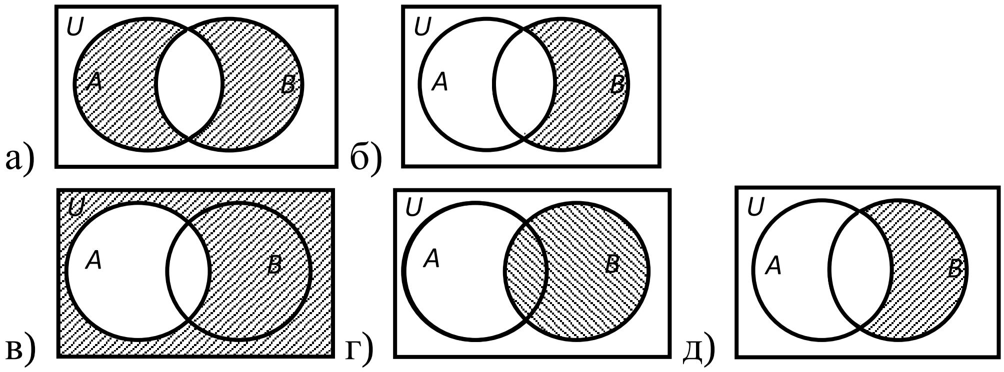
Для построения диаграммы множества $\overline{A}\cap B$ выполним три шага:

шаг 1 – построим диаграмму множества $\overline{A}$ (рис. 1.1, в);

шаг 2 – построим диаграмму множества B (рис. 1.1, г);

шаг 3 – для получения диаграммы множества $\overline{A}\cap B$ выделяем общую часть областей, соответствующих множествам $\overline{A}$ и B (рис. 1.1, д).

Сравнение диаграмм на рис.1.1, б и 1.1, д доказывает равенство $\left(A\oplus B\right)\setminus A=\overline{A}\cap B$.



а) $A\oplus B$, б) $\left(A\oplus B\right)\setminus A$, в) $\overline{A}$, г) B, д) $\overline{A}\cap B$

Рис. 1.1. Доказательство равенства $\left(A\oplus B\right)\setminus A=\overline{A}\cap B$ на диаграммах

Примечание. Если доказывается включение одного множества в другое, то на диаграммах левой и правой части такого отношения будут заштрихованы разные области. В этом случаем область, соответствующая подмножеству должна быть частью области, соответствующей надмножеству.

2) Докажем равенство $\left(A\oplus B\right)\setminus A=\overline{A}\cap B$, используя метод, основанный на определениях операций теории множеств.

Для начала используем определение равенства двух множеств: множества A и B равны если выполняются два включения $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$.

Шаг 1 – доказываем включение $\left(A\oplus B\right)\setminus A\subseteq\overline{A}\cap B$. По определению включения необходимо доказать, что любой элемент множества $\left(A\oplus B\right)\setminus A$ принадлежит множеству $\overline{A}\cap B$. Итак, если $\forall x\in\left(A\oplus B\right)\setminus A$, то по определению разности ($x\in\left(A\oplus B\right)$ и $x\notin A$). Далее, по определению кольцевой суммы, ($\left(x\in A\setminus B\right.$ или $\left.x\in B\setminus A\right)$ и $x\notin A$), то есть возможно два варианта: $\left(x \in A \setminus B \text{ и } x \notin A\right)$ или $\left(x \in B \setminus A \text{ и } x \notin A\right)$. Для удобства дальнейшего вывода запишем с использованием квадратной скобки:

$$\left[\begin{array}{l} x \in A \setminus B, \quad x \notin A \\ x \in B \setminus A, \quad x \notin A \end{array}\right.$$

Используя определение разности, получаем

$$\left[\begin{array}{l} x \in A, x \notin B, x \notin A \\ x \in B, x \notin A, x \notin A \end{array}\right.$$

Так ка элемент не может одновременно принадлежать и не принадлежать множеству, то первый вариант не реализуется. Второй вариант соответствует определению пересечения: $x \in \overline{A} \cap B$.

Шаг 2 – доказываем включение $\overline{A} \cap B \subseteq \left(A \oplus B\right) \setminus A$. Опустив пояснения, получим цепочку вывода:

$\forall x \in \overline{A} \cap B \Rightarrow x \in \overline{A}, x \in B \Rightarrow x \notin A, x \in B \Rightarrow x \in B \setminus A \Rightarrow x \in \left(B \setminus A\right) \cup \left(A \setminus B\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A \oplus B$.

Переход в цепочке вывода от четвертого выражения к пятому позволило сделать определение объединения, согласно которому: если элемент принадлежит некоторому множеству, то он принадлежит объединению этого множества с любым другим множеством.

Примечание. Если доказывается включение одного множества в другое, то достаточно проделать только шаг 1.

3) докажем равенство $\left(A \oplus B\right) \setminus A = \overline{A} \cap B$ эквивалентными преобразованиями. Преобразуем выражение из левой части равенства к выражению из правой части:

$$\left(A \oplus B\right) \setminus A = \left(B \setminus A\right) \cup \left(A \setminus B\right) \setminus A = \left(\left(B \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) \cap \overline{A} =$$

$$= \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{A}\right) = \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) =$$

$$= \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\varnothing \cap \overline{B}\right) = \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \varnothing = \overline{A} \cap B$$

Поясним подробнее проведенные преобразования.

Сначала использовано выражение для кольцевой суммы ($X \oplus Y = \left(X \setminus Y\right) \cup \left(Y \setminus X\right)$):

$$\left(A \oplus B\right) \setminus A = \left(B \setminus A\right) \cup \left(A \setminus B\right) \setminus A.$$

Затем, выражение для разности ($X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$):

$$\left(\left(B \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) \cap \overline{A}.$$

Закон дистрибутивности пересечения относительно объединения ($\left(X \cup Y\right) \cap Z = \left(X \cap Z\right) \cup \left(Y \cap Z\right)$) позволил получить:

$$\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{A}\right).$$

После использования закона идемпотентности ($X\cap X=X$) и коммутативности ($X\cap Y=Y\cap X$) пересечения, выражение преобразовалось к виду:

$$\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{A}\cap\overline{B}\right).$$

И наконец, после использования свойств дополнения ($X\cap\overline{X}=\varnothing$) и пустого множества ($X\cap\varnothing=\varnothing$, $X\cup\varnothing=X$), получено:

$$\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(\varnothing\cap\overline{B}\right)=\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\varnothing=\overline{A}\cap B.$$

Примечание. Для доказательства также можно преобразовывать обе части равенства к одному и тому же выражению.

Если доказывается включение одного множества в другое, из выбранной для преобразования части отношения нужно постараться выделить вторую его часть и затем изучить чем отличаются полученные выражения.

Задание 1.2.

Даны соответствия $P_1\subseteq A\times B$, $P_2,P_3\subseteq B^2$, где $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$.

$P_1=\{(a,1),(a,2),(b,3),(c,2),(c,3),(c,4)\}$,

$P_2=\{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$,

$P_3=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)\}$.

Определите область определения и область значений всех данных соответствий. Изобразите данные соответствия диаграммами и матрицами. Вычислите P_1^{-1}, $P_2\cup P_3$, $P_2\cap P_3$, $P_1\circ P_2$, $P_2\circ P_3$, P_2^2, $\left(P_1\circ P_2\right)^{-1}$, используя определения операций и матрицы исходных соответствий, сравните полученные результаты.

Проверьте с помощью матрицы, являются ли отношения P_2 и P_3 рефлексивными, антирефлексивными симметричными, антисимметричными, транзитивными, полными?

Решение.

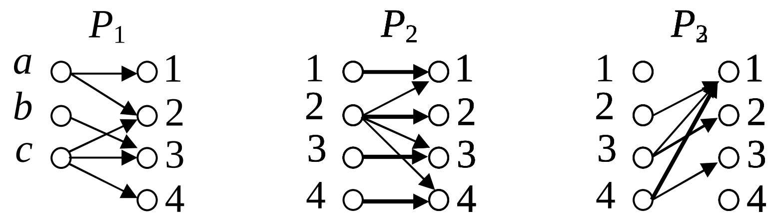
Область определения соответствия Г это множество $\pi_1^{\Gamma}=\{a\mid(a,b)\in\Gamma\}$, то есть множество всех элементов, встречающихся в парах первыми. Тогда

$\pi_1^{P_1}=\{a,b,c\}$, $\pi_1^{P_2}=\{1,2,3,4\}$, $\pi_1^{P_3}=\{2,3,4\}$.

Область значений соответствия Г это множество $\pi_2^{\Gamma}=\{b\mid(a,b)\in\Gamma\}$, то есть множество всех элементов, встречающихся в парах вторыми. Тогда

$\pi_2^{P_1}=\{1,2,3,4\}$, $\pi_2^{P_2}=\{1,2,3,4\}$, $\pi_2^{P_3}=\{1,2,3\}$.

Построим диаграммы соответствий, соединив стрелками элементы каждой пары (см. рис. 1.2.).



а) б) в)

а) $P_1 = \{(a,1),(a,2),(b,3),(c,2),(c,3),(c,4)\}$,

б) $P_2 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$,

в) $P_3 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)\}$.

Рис. 1.2. Диаграммы соответствий.

Построим матрицы соответствий, поставив единицы в клетки, соответствующие парам (см. рис. 1.3).

$$[P_1] = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad [P_2] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad [P_3] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

а) б) в)

а) $P_1 = \{(a,1),(a,2),(b,3),(c,2),(c,3),(c,4)\}$,

б) $P_2 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$,

в) $P_3 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)\}$.

Рис. 1.3. Матрицы соответствий.

Выполняем операции над соответствиями:

По определению обратное соответствие $\Gamma^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in \Gamma\}$, то есть это множество пар исходного соответствия, в которых изменился порядок, тогда $P_1^{-1} = \{(1,a),(2,a),(3,b),(2,c),(3,c),(4,c)\}$. Матрица обратного соответствия получается транспонированием матрицы исходного. Построим матрицу:

$$\left[P_1^{-1}\right] = [P_1]^T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Сравнивая пары соответствия P_1^{-1} и единицы в матрице $\left[P_1^{-1}\right]$, убеждаемся в правильности выполненных действий.

Используя определение объединения соответствий: $\Gamma = P \bigcup Q = \{(a,b) \mid (a,b) \in P$ или(и) $(a,b) \in Q\}$, получаем соответствие:

$P_2 \bigcup P_3 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4)\}$.

Матрица объединения получается сложением матриц исходных соответствий, тогда

$$[P_2 \bigcup P_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Сравнивая пары соответствия $P_2 \bigcup P_3$ и единицы в матрице $[P_2 \bigcup P_3]$, убеждаемся в правильности выполненных действий.

Используя определение пересечения соответствий: $\Gamma = P \bigcap Q = \{(a,b) \mid (a,b) \in P$ и $(a,b) \in Q\}$, получаем соответствие:

$P_2 \bigcap P_3 = \{(2,1)\}$.

Матрица пересечения получается поэлементным перемножением матриц исходных соответствий, тогда

$$[P_2 \bigcap P_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Сравнивая пары соответствия $P_2 \bigcap P_3$ и единицы в матрице $[P_2 \bigcap P_3]$, убеждаемся в правильности выполненных действий.

Определение композиции соответствий $\Gamma = P \circ Q = \{(a,c) \mid (a,b) \in P$ и $(b,c) \in Q\}$, удобнее всего применять используя диаграммы. Изобразим необходимые диаграммы рядом, совмещая область прибытия первого соответствия с областью отправления второго (см. рис. 1.4).

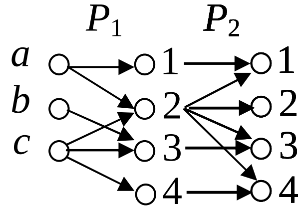


Рис. 1.4. Совмещенные диаграммы соответствий
$P_1 = \{(a,1),(a,2),(b,3),(c,2),(c,3),(c,4)\}$ и
$P_2 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
для выполнения операции композиции.

Двигаясь по стрелкам из области отправления первого соответствия в область прибытия второго выписываем получающиеся пары:

$P_1 \circ P_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3),(c,4)\}$.

Матрица композиции получается перемножением матриц исходных соответствий по правилу «строка на столбец», тогда

$$[P_1 \circ P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Сравнивая пары соответствия $P_1 \circ P_2$ и единицы в матрице $[P_1 \circ P_2]$, убеждаемся в правильности выполненных действий.

Выполнение операций $P_2 \circ P_3$, P_2^2, $(P_1 \circ P_2)^{-1}$ производится аналогично разобранным, предоставляется сделать это самостоятельно.

Проверим свойства отношений P_2 и P_3 с помощью матриц.

Известно, что в матрице рефлексивного отношения все диагональные элементы равны единице, поэтому P_2 является рефлексивным, а P_3 свойством рефлексивности не обладает.

Проверим отношение P_3 на антирефлексивность. В матрице антирефлексивного отношения все диагональные элементы равны нулю, как и в матрице отношения P_3. Следовательно, P_3 антирефлексивно.

Для проверки отношений на симметричность построим матрицы обратных отношений:

$$\left[P_2^{-1}\right] = [P_2]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \left[P_3^{-1}\right] = [P_3]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Известно, что симметричное отношение совпадает со своим обратным отношением, т.е. их матрицы равны. Сравнивая матрицы отношений P_2 и P_3 и P_2^{-1} и P_3^{-1}, приходим к выводу об отсутствии свойства симметричности у обоих отношений.

Проверим отношения на антисимметричность. Для этого построим матрицу пересечения исходного отношения и обратного:

$$\left[P_2 \cap P_2^{-1}\right] = [P_2] * [P_2]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[P_3 \cap P_3^{-1}\right] = [P_3] * [P_3]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В обоих случаях не осталось единиц вне главной диагонали. Это говорит об антисимметричности обоих рассматриваемых отношений.

Для проверки транзитивности построим матрицы композиции отношений:

$$[P_2 \circ P_2] = [P_2] \cdot [P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[P_3 \circ P_3] = [P_3] \cdot [P_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица композиции $P_2 \circ P_2$ содержит единицы только в тех клетках, в которых были единицы в исходной матрице. Это обозначает принадлежность отношению всех транзитивно замыкающих пар. Вывод – отношение P_2 является транзитивным.

В матрице композиции $P_3 \circ P_3$ появилась единица в четвертой строке, втором столбце, такого элемента в исходном отношении нет. Следовательно, отношение P_3 не транзитивно.

Для проверки отношений на полноту сложим матрицы исходного отношения, обратного и единичную матрицу:

$$\left[P_2 \cup id_B \cup P_2^{-1}\right] = [P_2] + E + [P_2]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[P_3 \cup id_B \cup P_3^{-1}\right] = [P_3] + E + [P_3]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В обоих случаях в полученных матрицах присутствуют нули, это говорит о неполноте обоих отношений.

Задание 1.4. Найдите область определения, область значений отношения $P \subseteq Z^2: \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow x$ кратно y. Является ли отношение P рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, не симметричным, транзитивным, полными? Обоснуйте ответ, используя определение свойств.

Решение.

Так как $\forall x \in Z$ найдется делитель, то область определения отношения P это множество целых чисел: $\pi_1^P = Z$. Аналогично любое целое число кроме нуля является делителем некоторого целого числа, поэтому область значений отношения P это все целые числа кроме нуля: $\pi_2^P = Z \setminus \{0\}$.

Рефлексивность отношения P означала бы, что каждое целое число кратно самому себе: $\forall x \in Z: \quad x$ кратно x. Это действительно справедливо для всех целых чисел, кроме нуля, так как на нуль делить нельзя. Следовательно, отношение P не является рефлексивным. Антирефлексивным оно также не является так как все целые числа (кроме нуля) кратны сами себе.

Симметричность отношения P означала бы, что если целое число x кратно некоторому целому числу y, то и число y также кратно числу x, то есть: $\forall x, y \in Z: \quad (x, y) \in P \Rightarrow (y, x) \in P$. Однако, например, 6 кратно 3 ($(6,3) \in P$), но 3 не делится на 6 без остатка ($(3,6) \notin P$). Следовательно, отношение P не является симметричным. Отношение антисимметрично, потому что $\forall x, y \in Z: \quad (x, y) \in P \quad \Rightarrow \quad (y, x) \notin P$ или $x = y$ (то есть если число x кратно числу y, то либо y уже не делится на x без остатка, либо x=y).

Отношение P транзитивно, так как выполняется определение транзитивности: $\forall x, y, z \in Z: \quad (x, y) \in P, (y, z) \in P \Rightarrow (x, z) \in P$, то есть для любых целых чисел справедливо - если число x кратно некоторому числу y, а число y кратно некоторому числу z, то и число x также кратно числу z.

Отношение P полным не является, так как существуют пары целых чисел, в которых невозможно установить кратность, то есть не принадлежащие ни отношению P ни обратному отношению, например это пара (12, 15).

2. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

2.1. Индивидуальное задание № 2 по теме «Булевы функции»

Задание 2.1. Максимально упростите выражение своего варианта, воспользовавшись законами логики Буля. Затем с помощью таблиц истинности сравните упрощенное выражение с исходным.

Вариант 1. $(a \wedge c) \vee ((b \vee \bar{d}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{d}) \wedge (d \vee b) \wedge (\bar{a} \vee d)) \vee (a \wedge \bar{c})$

Вариант 2. $((\bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (a \vee b)) \vee (d \wedge \bar{c}) \vee (((\bar{b} \wedge \bar{a}) \vee c) \wedge (a \vee b))$

Вариант 3. $(a \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (c \wedge \bar{b})$

Вариант 4. $((a \vee (c \vee (b \wedge c))) \wedge (\overline{c \wedge d}) \wedge (c \wedge \bar{d})) \wedge (c \vee (\bar{d} \wedge \bar{c}) \vee d)$

Вариант 5. $((a \vee \bar{a}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{d}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (\bar{c} \vee d)) \vee ((\bar{b} \vee c) \wedge (c \vee d))$

Вариант 6. $(a \vee \bar{c}) \wedge ((\bar{a} \wedge d) \vee (b \wedge d) \vee (\bar{a} \wedge \bar{d}) \vee (b \wedge \bar{d})) \wedge (a \vee c)$

Вариант 7. $((d \wedge \bar{c}) \vee (\bar{d} \wedge \bar{b}) \vee (c \wedge \bar{b})) \wedge ((\bar{d} \wedge b) \vee (c \wedge b)) \wedge (\bar{a} \vee a)$

Вариант 8. $((\bar{c} \wedge \bar{d}) \vee (b \wedge c)) \wedge (\bar{a} \vee \bar{d}) \wedge (((\bar{c} \vee \bar{b}) \wedge d) \vee (c \wedge b))$

Вариант 9. $(a \vee b) \wedge (\bar{b} \wedge c \wedge d) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \wedge d) \vee \bar{b} \vee \bar{c} \vee d$

Вариант 10. $((a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b})) \vee ((\bar{a} \vee b) \wedge (c \vee \bar{d}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (d \vee c))$

Вариант 11. $((\bar{b} \wedge c) \vee (\bar{c} \vee d) \vee \bar{a}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee \bar{c} \vee d) \wedge (\overline{c \vee d}) \wedge a$

Вариант 12. $((b \vee c) \wedge (d \vee (\bar{b} \wedge \bar{c}))) \vee (\bar{d} \wedge \bar{a}) \vee ((c \vee b) \wedge (\bar{d} \vee \bar{c}))$

Вариант 13. $(b \wedge d) \vee ((c \vee \bar{d}) \wedge (a \vee c) \wedge (\bar{d} \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{c})) \vee (\bar{b} \wedge d)$

Вариант 14. $((\bar{c} \vee d) \wedge (d \vee a)) \vee ((b \vee \bar{b}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{a}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d}) \wedge (\bar{d} \vee a))$

Вариант 15. $(a \wedge \bar{d}) \vee (((\bar{c} \wedge \bar{b}) \vee d) \wedge (c \vee b)) \vee ((\bar{d} \vee \bar{c}) \wedge (c \vee b))$

Вариант 16. $(((d \vee (d \wedge c)) \wedge \bar{d}) \vee \bar{b}) \wedge ((b \vee d) \wedge (b \vee a))$

Вариант 17. $((\bar{b} \wedge (\bar{c} \vee a)) \vee d) \vee \bar{d} \vee (b \vee (c \wedge \bar{a})) \wedge (b \vee (\bar{a} \wedge c))$

Вариант 18. $((c \vee \bar{a}) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (a \vee c) \wedge (\bar{b} \vee a)) \vee (b \wedge \bar{d}) \vee (b \wedge d)$

Вариант 19. $(d \vee (\bar{a} \wedge \bar{d}) \vee a) \wedge ((b \vee (d \vee (d \wedge c))) \wedge (\overline{c \wedge a}) \wedge (d \wedge \bar{a}))$

Вариант 20. $(\bar{c} \wedge \bar{b}) \vee (d \wedge c) \vee (\bar{b} \wedge c) \vee (d \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge \bar{d})$

Задание 2.2. Для булевой функции, заданной вектором своих значений

1) Запишите СДНФ и произведите ее минимизацию методом Квайна и методом Карно.

2) Запишите СКНФ. Произведите минимизацию функции, записанной в СКНФ методом Квайна и методом Карно.

3). Представьте в СПНФ и проведите ее минимизацию (Постройте полином

Жегалкина).

Вариант 1. $f = (0000101011110001)$

Вариант 2. $f = (0011001110000011)$

Вариант 3. $f = (1010111101010000)$

Вариант 4. $f = (0101010110001010)$

Вариант 5. $f = (0110011000101110)$

Вариант 6. $f = (1001000101101110)$

Вариант 7. $f = (1010010010110011)$

Вариант 8. $f = (1110100100111000)$

Вариант 9. $f = (1000010111001101)$

Вариант 10. $f = (1111000001001011)$

Вариант 11. $f = (0110001001110011)$

Вариант 12. $f = (1001100000011101)$

Вариант 13. $f = (0010111000101110)$

Вариант 14. $f = (1110001011010100)$

Вариант 15. $f = (0101110000001111)$

Вариант 16. $f = (1011100001010011)$

Вариант 17. $f = (0111001011011000)$

Вариант 18. $f = (0100001110010111)$

Вариант 19. $f = (1111000001110100)$

Вариант 20. $f = (0000101010110110)$

Задание 2.3 В каждом варианте даны два выражения $f_1(a,b,c,d)$ и $f_2(a,b,c,d)$.

1). Проверьте эквивалентность данных выражений аналитическим способом (на основе законов алгебры логики).

2). С помощью таблиц истинности подтвердите справедливость вывода, сделанного в п 1).

Вариант 1. $f_1(a,b,c,d) = \left((a \mid b) \mid (a \Leftrightarrow b)\right) \mid \left((c \oplus d) \to \left(d \wedge \overline{c}\right)\right)$,

$f_2(a,b,c,d) = \left((b \to c) \to \left(a \wedge \overline{c}\right)\right) \downarrow \left((a \mid d) \mid \left(d \to \overline{b}\right)\right)$.

Вариант 2. $f_1(a,b,c,d) = \left(\left(a \wedge \overline{c}\right) \downarrow \left(b \wedge \overline{c}\right)\right) \wedge \left((a \mid d) \wedge \overline{(b \wedge d)}\right)$,

$f_2(a,b,c,d) = \left((a \mid b) \mid \left(a \oplus \overline{b}\right)\right) \to \left((c \oplus d) \wedge (d \to c)\right)$.

Вариант 3. $f_1(a,b,c,d) = \left((a \downarrow b) \vee (a \oplus b)\right) \wedge \overline{\left(\left(c \wedge \overline{d}\right) \downarrow (c \Leftrightarrow d)\right)}$,

$f_2(a,b,c,d) = \left((c \to a) \wedge (c \to b)\right) \to \left((a \downarrow d) \vee (b \downarrow d)\right)$.

Вариант 4. $f_1(a,b,c,d)=\left((a\Leftrightarrow b)\wedge\overline{(a\downarrow b)}\right)\downarrow\left((c\Leftrightarrow d)\downarrow\left(c\wedge\overline{d}\right)\right)$,

$$f_2(a,b,c,d)=\left(\left(c\wedge\overline{a}\right)\downarrow\left(c\wedge\overline{b}\right)\right)|\left((a\downarrow d)\downarrow(b\downarrow d)\right).$$

Вариант 5. $f_1(a,b,c,d)=\left((a\wedge b)\vee(a\oplus b)\right)\wedge\overline{\left(\left(d\wedge\overline{c}\right)\downarrow(d\Leftrightarrow c)\right)}$,

$$f_2(a,b,c,d)=\left((a\to c)\wedge(b\to c)\right)\to\left((a\,|\,d)\,|\,(b\,|\,d)\right).$$

Вариант 6. $f_1(a,b,c,d)=\left((a\vee b)\wedge\overline{(a\oplus b)}\right)\vee\left(\left(c\wedge\overline{d}\right)\downarrow(c\Leftrightarrow d)\right)$,

$$f_2(a,b,c,d)=\left(\left(c\wedge\overline{a}\right)\downarrow\left(c\wedge\overline{b}\right)\right)\wedge\left((a\vee d)\wedge\left(\overline{b\downarrow d}\right)\right).$$

Вариант 7. $f_1(a,b,c,d)=\left((d\to b)\to\left(\overline{c}\wedge\overline{b}\right)\right)\downarrow\left((c\vee a)\,|\,(d\to a)\right)$,

$$f_2(a,b,c,d)=\left(\left(\overline{c}\,|\,d\right)|\,(c\oplus d)\right)|\left((a\Leftrightarrow b)\to\left(\overline{a}\wedge\overline{b}\right)\right).$$

Вариант 8. $f_1(a,b,c,d)=\left((a\,|\,b)\wedge\overline{\left(\overline{a}\oplus\overline{b}\right)}\right)\vee\left(\left(d\wedge\overline{c}\right)\downarrow(c\Leftrightarrow d)\right)$,

$$f_2(a,b,c,d)=\left(\left(\overline{a}\downarrow\overline{d}\right)\downarrow\left(b\wedge\overline{d}\right)\right)\wedge\left((a\to c)\wedge\overline{\left(b\wedge\overline{c}\right)}\right).$$

Вариант 9. $f_1(a,b,c,d)=\left(\left(c\wedge\overline{a}\right)\vee(c\Leftrightarrow a)\right)\wedge\overline{\left(\left(d\wedge\overline{b}\right)\downarrow(d\Leftrightarrow b)\right)}$,

$$f_2(a,b,c,d)=\left((a\vee b)\wedge(c\to b)\right)\to\left(\left(d\wedge\overline{a}\right)\vee(c\wedge d)\right).$$

Вариант 10. $f_1(a,b,c,d)=\left((c\Leftrightarrow b)\wedge\overline{(b\downarrow c)}\right)\downarrow\left(\left(\overline{a}\Leftrightarrow\overline{d}\right)\downarrow\left(a\wedge\overline{d}\right)\right)$,

$$f_2(a,b,c,d)=\left((b\downarrow d)\downarrow(c\downarrow d)\right)|\left(\left(a\wedge\overline{b}\right)\downarrow\left(a\wedge\overline{c}\right)\right).$$

Вариант 11. $f_1(a,b,c,d)=\left(\left(a\wedge\overline{d}\right)\vee(a\Leftrightarrow d)\right)\wedge\overline{\left(\left(b\wedge\overline{c}\right)\downarrow(b\Leftrightarrow c)\right)}$,

$$f_2(a,b,c,d)=\left((b\to d)\wedge(a\,|\,b)\right)\to\left((c\vee d)\,|\,(a\to c)\right).$$

Вариант 12. $f_1(a,b,c,d)=\left((b\downarrow d)\downarrow(c\downarrow d)\right)\wedge\left((a\to b)\wedge\overline{\left(a\wedge\overline{c}\right)}\right)$,

$$f_2(a,b,c,d)=\left((b\vee c)\wedge\overline{(b\oplus c)}\right)\vee\left(\left(a\wedge\overline{d}\right)\downarrow(a\Leftrightarrow d)\right).$$

Вариант 13. $f_1(a,b,c,d)=\left((c\to d)\,|\,(c\oplus d)\right)|\left((a\Leftrightarrow b)\to(a\wedge b)\right)$,

$$f_2(a,b,c,d)=\left(\left(a\to\overline{c}\right)\to\left(a\wedge\overline{d}\right)\right)\downarrow\left((b\to d)\,|\left(b\to\overline{c}\right)\right).$$

Вариант 14. $f_1(a,b,c,d)=\left((b\wedge d)\downarrow(b\wedge c)\right)\wedge\left((d\to a)\wedge\overline{\left(c\wedge\overline{a}\right)}\right)$,

$$f_2(a,b,c,d)=\left((c\,|\,d)\,|\left(\overline{c}\Leftrightarrow\overline{d}\right)\right)\to\left((a\oplus b)\wedge(b\to a)\right).$$

Вариант 15. $f_1(a,b,c,d)=\left(\left(d\wedge\bar{a}\right)\vee\left(d\Leftrightarrow a\right)\right)\wedge\overline{\left(\left(c\wedge\bar{b}\right)\downarrow\left(\bar{c}\oplus b\right)\right)}$,

$f_2(a,b,c,d)=\left(\left(a\vee b\right)\wedge\left(d\to b\right)\right)\to\left(\left(c\wedge d\right)\vee\left(c\wedge\bar{a}\right)\right)$.

Вариант 16. $f_1(a,b,c,d)=\left(\left(c\to d\right)\wedge\overline{\left(c\Leftrightarrow d\right)}\right)\vee\left(\left(a\wedge b\right)\downarrow\left(a\oplus b\right)\right)$,

$f_2(a,b,c,d)=\left(\left(b\wedge c\right)\downarrow\left(b\wedge\bar{d}\right)\right)\wedge\left(\left(a\,|\,c\right)\wedge\overline{\left(a\wedge\bar{d}\right)}\right)$.

Вариант 17. $f_1(a,b,c,d)=\left(\left(\bar{c}\to b\right)\to\left(d\downarrow b\right)\right)\downarrow\left(\left(a\to d\right)|\left(a\to c\right)\right)$,

$f_2(a,b,c,d)=\left(\left(c\vee d\right)|\left(c\Leftrightarrow d\right)\right)|\left(\left(\bar{a}\oplus\bar{b}\right)\to\left(a\wedge\bar{b}\right)\right)$.

Вариант 18. $f_1(a,b,c,d)=\left(\left(a\wedge c\right)\downarrow\left(b\wedge a\right)\right)\wedge\left(\left(c\to d\right)\wedge\overline{\left(b\wedge\bar{d}\right)}\right)$,

$f_2(a,b,c,d)=\left(\left(b\,|\,c\right)|\left(b\Leftrightarrow c\right)\right)\to\left(\left(a\oplus d\right)\wedge\left(a\to d\right)\right)$.

Вариант 19. $f_1(a,b,c,d)=\left(\left(b\downarrow\bar{d}\right)\vee\left(\bar{b}\oplus d\right)\right)\wedge\overline{\left(\left(a\wedge\bar{c}\right)\downarrow\left(a\Leftrightarrow c\right)\right)}$,

$f_2(a,b,c,d)=\left(\left(\bar{c}\to b\right)\wedge\left(d\to c\right)\right)\to\left(\left(a\wedge\bar{b}\right)\vee\left(a\wedge d\right)\right)$.

Вариант 20. $f_1(a,b,c,d)=\left(\left(d\wedge a\right)\downarrow\left(b\wedge d\right)\right)|\left(\left(a\wedge\bar{c}\right)\downarrow\left(b\wedge\bar{c}\right)\right)$,

$f_2(a,b,c,d)=\left(\left(a\oplus\bar{b}\right)\wedge\left(b\wedge a\right)\right)\downarrow\left(\left(\bar{c}\Leftrightarrow\bar{d}\right)\downarrow\left(d\wedge\bar{c}\right)\right)$.

Задание 2.4. Определите, к каким классам Поста относятся логические функции из заданий 1-3 Вашего варианта.

2.2 Методические указания к выполнению индивидуального задания № 2

Задание 2.1. Максимально упростите выражение $\left(\bar{b}\vee d\right)\wedge\left(\left(\bar{d}\wedge c\right)\vee\left(a\wedge c\right)\vee\left(\bar{d}\wedge\bar{c}\right)\vee\left(a\wedge\bar{c}\right)\right)\wedge\left(b\vee d\right)$, воспользовавшись законами логики Буля. Затем с помощью диаграмм Эйлера сравните упрощенное выражение с исходным.

Решение.

Произведем преобразование заданного выражения:

$$\left(\bar{b}\vee d\right)\wedge\left(\left(\bar{d}\wedge c\right)\vee\left(a\wedge c\right)\vee\left(\bar{d}\wedge\bar{c}\right)\vee\left(a\wedge\bar{c}\right)\right)\wedge\left(b\vee d\right)=$$

$$=\left(\bar{b}\vee d\right)\wedge\left(b\vee d\right)\wedge\left(\left(\bar{d}\wedge c\right)\vee\left(a\wedge c\right)\vee\left(\bar{d}\wedge\bar{c}\right)\vee\left(a\wedge\bar{c}\right)\right)=$$

$$=\left(\left(\bar{b}\wedge b\right)\vee d\right)\wedge\left(\left(\left(\bar{d}\vee a\right)\wedge c\right)\vee\left(\left(\bar{d}\vee a\right)\wedge\bar{c}\right)\right)=\left(0\vee d\right)\wedge\left(\left(\bar{d}\vee a\right)\wedge\left(c\vee\bar{c}\right)\right)=$$

$$=d\wedge\left(\left(\overline{d}\vee a\right)\wedge 1\right)=d\wedge\left(\overline{d}\vee a\right)=\left(d\wedge\overline{d}\right)\vee\left(d\wedge a\right)=0\vee\left(d\wedge a\right)=d\wedge a.$$

Поясним подробнее выполненные преобразования.

Первое преобразование заключается в перестановке местами второй и третьей скобок и выполнено на основе закона коммутативности конъюнкции.

На втором шаге были применены законы дистрибутивности: из первых двух скобок вынесена общая переменная *d*, внутри третьей скобки также вынесены общие переменные - из первых двух скобок переменная *c*, из третьей и четвертой - $\overline{c}$.

На третьем шаге в первой скобке применен закон отрицания, а во второй снова закон дистрибутивности, заключающийся в выносе за скобку общего выражения.

На четвертом шаге в первой скобке применен закон нуля, во второй закон отрицания.

На пятом шаге применен закон единицы.

На шестом шаге применен закон дистрибутивности для раскрытия скобок.

На седьмом шаге применен закон отрицания.

На восьмом шаге после применения закона нуля получено результирующее выражение.

Диаграмма Эйлера для изображения выражения с четырьмя переменными изображена на рисунке 2.1.

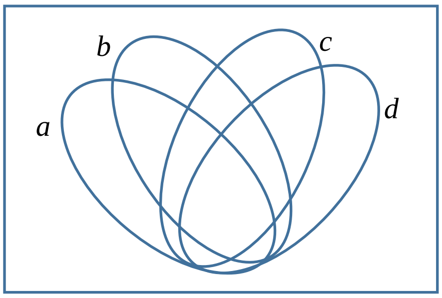


Рисунок 2.1. - Диаграмма Эйлера для изображения выражения с четырьмя переменными

Рекомендуется каждую операцию заданного выражения изображать на отдельной диаграмме, а затем строить диаграмму суперпозиции этих операций. Выражение, полученное в результате преобразований, строится также на диаграмме, изображенной на рисунке 2.1.

Задание 2.2. Для булевой функции, заданной вектором своих значений $f=(1010001000001111)$

1) Запишите СДНФ и произведите ее минимизацию методом Квайна и методом Карно.

2) Запишите СКНФ. Произведите минимизацию функции, записанной в СКНФ методом Квайна и методом Карно.

3). Представьте в СПНФ и произведите ее минимизацию (Постройте полином Жегалкина).

Решение.

Для удобства выполнения заданий восстановим таблицу истинности заданной функции:

a	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
b	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
c	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
d	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
Совершенные конъюнкты	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$		$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$				$\bar{a}bc\bar{d}$						$ab\bar{c}\bar{d}$	$ab\bar{c}d$	$abc\bar{d}$	$abcd$

1) Для построения СДНФ выбираем из таблицы истинности столбцы, в которых функция равна единице и составляем для каждого конъюнкт, ставя отрицание над переменной, которая равна нулю. Собирая составленные совершенные конъюнкты в формулу, получаем СДНФ: $f=\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\vee\bar{a}\bar{b}c\bar{d}\vee\bar{a}bc\bar{d}\vee ab\bar{c}\bar{d}\vee ab\bar{c}d\vee abc\bar{d}\vee abcd$.

Для минимизации методом Квайна произведем всевозможные склеивания конъюнктов в СДНФ, используя формулу $\varphi x\vee\varphi\bar{x}=\varphi\vee\varphi x\vee\varphi\bar{x}$. После чего поглотим все лишние конъюнкты по правилу: $\varphi x\vee\varphi=\varphi$.

После склеивания конъюнктов (первого со вторым, второго с третьим, третьего с шестым, четвертого с пятым, пятого с седьмым, шестого с седьмым) и применения закона поглощения, получим:

$$f=\bar{a}\bar{b}\bar{d}\vee\bar{a}c\bar{d}\vee bc\bar{d}\vee ab\bar{c}\vee abd\vee abc.$$

В полученной формуле возможно продолжить склеивание: четвертый с шестым. После склеивания и поглощения, участвовавших в склейке конъюнктов, получим сокращенную ДНФ (так как склейки в ней уже не возможны): $f=\bar{a}\bar{b}\bar{d}\vee\bar{a}c\bar{d}\vee bc\bar{d}\vee ab\vee abd$.

Следующим шагом строим матрицу Квайна для обнаружения лишних конъюнктов: строки матрицы соответствуют конъюнктам сокращенной ДНФ (простым импликантам), столбцы совершенным конъюнктам. В матрице звездочками помечаем клетки которые соответствуют совершенному конъюнкту, поглощаемому соответствующей простой импликантой:

	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$	$\bar{a}bc\bar{d}$	$ab\bar{c}\bar{d}$	$ab\bar{c}d$	$abc\bar{d}$	$abcd$
$\bar{a}\bar{b}\bar{d}$	*	*					
$\bar{a}c\bar{d}$		*	*				
$bc\bar{d}$			*			*	
ab				*	*	*	*
abd					*		*

Для удобства клетки со звездочками в тех столбцах, в которых такая клетка одна выделены. Они соответствуют базисным импликантам, которые нельзя удалять. Таким образом в минимальной ДНФ будут присутствовать обязательно первая и третья импликанты. Следовательно импликанта abd - лишняя (после ее удаления из таблицы каждый столбец все равно остается помеченным звездочкой). Также можно удалить еще одну из двух импликант $\bar{a}c\bar{d}$ и $bc\bar{d}$.

Таким образом имеем две тупиковые ДНФ:

$f = \bar{a}\bar{b}\bar{d} \vee \bar{a}c\bar{d} \vee ab$ и $f = \bar{a}\bar{b}\bar{d} \vee bc\bar{d} \vee ab$.

Так как сложность их одинакова, то любая из них может называться минимальной.

Для минимизации на карте Карно построим карту для заданной функции, заполнив единичками соответствующие клетки (см. рис. 2.2,а).

ab \ cd	00	01	11	10
00	1			1
01				1
11	1	1	1	1
10				

а)

ab \ cd	00	01	11	10
00	1			1
01				1
11	1	1	1	1
10				

$\bar{a}\bar{b}\bar{d}$

$\bar{a}c\bar{d}$

ab

б)

Рис. 2.2. Карты Карно для минимизации функции $f = (1010001000001111)$

Для составления минимальной ДНФ выделим клетки с единицами прямоугольниками, как показано на рисунке 2.2,б. Выделенным прямоугольникам соответствуют простые импликанты, содержащие переменные, значения которых одинаково в о всех клетках данного прямоугольника. Причем если это значение равно 0, то над переменной ставится отрицание (см. рис. 2.2,б).

Выписывая составленные по карте Карно импликанты в ДНФ, получим минимальную ДНФ: $f = \bar{a}\bar{b}\bar{d} \vee \bar{a}c\bar{d} \vee ab$.

2) Построение СКНФ и ее минимизация проводится аналогично.

3). СПНФ получим из СДНФ аналитическими преобразованиями, для чего заменим все дизъюнкции на кольцевые суммы (в СДНФ это допустимо), а также применим формулу $\bar{x} = x \oplus 1$, для исключения операции отрицание.

$$f = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d} \vee ab\bar{c}\bar{d} \vee ab\bar{c}d \vee abc\bar{d} \vee abcd =$$

$$= (a\oplus 1)(b\oplus 1)(c\oplus 1)(d\oplus 1) \oplus (a\oplus 1)(b\oplus 1)c(d\oplus 1) \oplus (a\oplus 1)bc(d\oplus 1) \oplus$$

$$\oplus ab(c\oplus 1)(d\oplus 1) \oplus ab(c\oplus 1)d \oplus abc(d\oplus 1) \oplus abcd =$$

Для минимизации полученной СПНФ применим закон дистрибутивности конъюнкции относительно кольцевой суммы ($x(y\oplus z) = xy \oplus xz$), после чего сократим парные конъюнкты, на основании правил: $x \oplus x = 0, x \oplus 0 = x$:

$$f=abcd\oplus abc\oplus acd\oplus bcd\oplus abd\oplus ab\oplus ac\oplus ad\oplus bc\oplus bd\oplus cd\oplus$$
$$\oplus a\oplus b\oplus c\oplus d\oplus 1\oplus abcd\oplus abc\oplus acd\oplus bcd\oplus ac\oplus bc\oplus cd\oplus c\oplus$$
$$\oplus abcd\oplus bcd\oplus abc\oplus bc\oplus abcd\oplus abc\oplus abd\oplus ab\oplus abcd\oplus abd\oplus$$
$$\oplus abcd\oplus abc\oplus abcd=ad\oplus bd\oplus a\oplus b\oplus d\oplus 1\oplus bcd\oplus bc\oplus abd\oplus abc\oplus abcd$$

Задание 2.3 Даны два выражения $f_1(a,b,c,d)=\left(\left(c\,|\,\overline{b}\right)|\left(c\Leftrightarrow\overline{b}\right)\right)|\left(\left(\overline{a}\oplus\overline{d}\right)\to\left(\overline{a}\wedge d\right)\right)$ и $f_2(a,b,c,d)=\left(\left(c\to\overline{d}\right)\to\left(\overline{b}\wedge d\right)\right)\downarrow\left(\left(\overline{b}\,|\,\overline{a}\right)|\left(\overline{a}\to c\right)\right)$

1). Проверьте эквивалентность данных выражений аналитическим способом (на основе законов алгебры логики).

2). С помощью таблиц истинности подтвердите справедливость вывода, сделанного в п 1).

Решение.

1) Для сравнения выражений приведем каждое из них в ДНФ, воспользовавшись соответствующим алгоритмом:

$$\left(\left(c\,|\,\overline{b}\right)|\left(c\Leftrightarrow\overline{b}\right)\right)|\left(\left(\overline{a}\oplus\overline{d}\right)\to\left(\overline{a}\wedge d\right)\right)=\overline{\overline{\overline{c\overline{b}}\left(c\overline{b}\vee\overline{c}\,\overline{\overline{b}}\right)}\left(\overline{\left(\overline{a}\vee\overline{d}\right)\left(\overline{\overline{a}}\vee\overline{\overline{d}}\right)}\vee\overline{a}d\right)}=$$
$$\left(\overline{c}\vee b\right)\left(c\overline{b}\vee b\overline{c}\right)\vee\left(\left(\overline{a}\vee\overline{d}\right)\left(a\vee d\right)\left(a\vee\overline{d}\right)\right)=\overline{c}b\vee a\overline{d}\,.$$

$$\left(\left(c\to\overline{d}\right)\to\left(\overline{b}\wedge d\right)\right)\downarrow\left(\left(\overline{b}\,|\,\overline{a}\right)|\left(\overline{a}\to c\right)\right)=\overline{\left(\left(\overline{\overline{c}\vee\overline{d}}\right)\vee\left(\overline{b}d\right)\right)\vee\overline{\left(\overline{\overline{b}}\,\overline{\overline{a}}\right)\left(a\vee c\right)}}=$$
$$=\left(\overline{c}\vee\overline{d}\right)\left(b\vee\overline{d}\right)\left(b\vee a\right)\left(a\vee c\right)=\left(\overline{d}\vee\overline{c}b\right)\left(a\vee bc\right)=a\overline{d}\vee bc\overline{d}\vee ab\overline{c}\,.$$

2) Проверим верность произведенных преобразований с помощью таблиц истинности.

Проверим преобразования выражения $f_1(a,b,c,d)=\left(\left(c\,|\,\overline{b}\right)|\left(c\Leftrightarrow\overline{b}\right)\right)|\left(\left(\overline{a}\oplus\overline{d}\right)\to\left(\overline{a}\wedge d\right)\right)$. Строим таблицу истинности исходного выражения и получившейся ДНФ:

a	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
b	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
c	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
d	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$\overline{b}$	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
$c\,|\,\overline{b}$	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
$c\Leftrightarrow\overline{b}$	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0

$\left(c \mid \overline{b}\right) \mid \left(c \Leftrightarrow \overline{b}\right)$	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
$\overline{a}$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{d}$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$\overline{a} \oplus \overline{d}$	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
$\overline{a} \wedge d$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\left(\overline{a} \oplus \overline{d}\right) \Rightarrow \left(\overline{a} \wedge d\right)$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$\left(\left(c \mid \overline{b}\right) \mid \left(c \Leftrightarrow \overline{b}\right)\right) \mid \left(\left(\overline{a} \oplus \overline{d}\right) \Rightarrow \left(\overline{a} \wedge d\right)\right)$	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
$\overline{c}b$	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$a\overline{d}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$\overline{c}b \vee a\overline{d}$	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**

Совпадение таблиц истинности исходного и полученного в результате аналитических преобразований выражений (строки для сравнения выделены жирным шрифтом) доказывает их правильность.

Проверим преобразования выражения $f_2(a,b,c,d) = \left(\left(c \to \overline{d}\right) \to \left(\overline{b} \wedge d\right)\right) \downarrow \left(\left(\overline{b} \mid \overline{a}\right) \mid \left(\overline{a} \to c\right)\right)$. Строим таблицу истинности исходного выражения и получившейся ДНФ:

a	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
b	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
c	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
d	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$c \to \overline{d}$	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
$\overline{b} \wedge d$	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
$\left(c \to \overline{d}\right) \to \left(\overline{b} \wedge d\right)$	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
$\overline{b} \mid \overline{a}$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\overline{a} \to c$	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\left(\overline{b} \mid \overline{a}\right) \mid \left(\overline{a} \to c\right)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\left(\left(c \to \overline{d}\right) \to \left(\overline{b} \wedge d\right)\right) \downarrow \left(\left(\overline{b} \mid \overline{a}\right) \mid \left(\overline{a} \to c\right)\right)$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
$a\overline{d}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$bc\overline{d}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$ab\overline{c}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$a\overline{d} \vee bc\overline{d} \vee ab\overline{c}$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**

Совпадение таблиц истинности доказывает правильность проведенных преобразований и подтверждает вывод о неравенстве заданных выражений.

Задание 2.4. Определите, к каким классам Поста относятся логические функции из заданий 2.1 - 2.3.

Решение.

Проверим принадлежность классам Поста функции из задания 2.2.

При выполнении задания 2.2. была построена таблица истинности, из которой легко увидеть, что данная функция не сохраняет 0 ($f(0000)=1$), то есть $f \notin T_0$, но сохраняет единицу ($f(1111)=1$): $f \in T_1$. Сравнивая значения функции на сравнимых наборах, находим признак немонотонности: $(0000)<(0001)$, но $f(0000)=1, f(0001)=0$, то есть $f(0000)> f(0001)$. Итак $f \notin T_M$.

Построенный при выполнении задания 2.2 полином Жегалкина позволяет сделать вывод о нелинейности данной функции (в нем присутствуют конъюнкты): $f \notin T_L$.

Для проверки самодвойственности построим таблицу истинности двойственной функции, инвертируя значения в исходной таблице:

a	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
c	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
d	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f^*	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	00	1

Так как таблицы истинности двойственной и исходной функций не совпадают, то данная функция не самодвойственная: $f \notin T_*$.

Сделанные выводы удобно поместить в таблицу:

	T_0	T_1	T_M	T_L	T_*
функция из задания 2.1.					
функция из задания 2.2.	-	+	-	-	-
функция из задания 2.3.					

Проверка остальных функций осуществляется аналогично.

3. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

3.1 Индивидуальное задание № 3 по теме «Логика высказываний»

Задание 3.1. Каждую из трех клауз Вашего варианта необходимо проверить тремя методами: Квайна, редукции и резолюций.

Вариант 1.

$(A \to C) \to (A \wedge B) \Rightarrow A \vee B$

$A \vee D, B \vee E, D \to C, D \vee C \Rightarrow A \wedge C; E \wedge D; B$

$A \to B, C \to D, A \vee C, A \to \overline{D}, C \to \overline{B} \Rightarrow (A \vee B) \to (A \wedge B)$

Вариант 2.

$C \to A, B \vee C, B \to D, D \to A \Rightarrow A$

$D \to E, E \to C, A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow C \Rightarrow A \to B$

$A \vee B, A \to B, B \to (C \to \overline{D}), A \to D \Rightarrow \overline{A \wedge C}$

Вариант 3.

$(A \wedge B) \to C \Rightarrow A \to (B \to C)$

$A \to (B \to C), (C \wedge D) \to E, \overline{F} \to (D \wedge \overline{E}) \Rightarrow A \to (B \to F)$

$(A \wedge (B \to C)) \leftrightarrow D, E \leftrightarrow (A \wedge (\overline{B \vee C})) \Rightarrow (D \wedge \overline{E}) \leftrightarrow (A \wedge C)$

Вариант 4.

$A \to (B \to \overline{C}), \overline{A} \to B, \overline{A} \to (\overline{B} \to C) \Rightarrow C; B$

$A, \overline{B} \to (A \to D), C \to (B \to E), D \to (E \vee \overline{C}) \Rightarrow C \to E$

$\overline{C}, D \to C, A \to (\overline{B} \to D), B \Rightarrow A \to C$

Вариант 5.

$(A \vee C) \leftrightarrow (\overline{B \vee D}) \Rightarrow \overline{A} \leftrightarrow B; \overline{C} \leftrightarrow D$

$A \to B, C \to D, B \to E, D \to F, \overline{E \wedge F}, A \to C \Rightarrow \overline{A}$

$C \to (B \to A), \overline{B} \to D, C \Rightarrow A \vee D$

Вариант 6.

$\overline{C}, A \vee B \Rightarrow (B \to C) \to A$

$A \to C, D \to F, B \to E, \overline{D} \to \overline{C}, A \to B \Rightarrow A \to (E \wedge F)$

$A, B \vee C, C \leftrightarrow D \Rightarrow (B \to \overline{A}) \to (B \to D)$

Вариант 7.

$A \to (C \to B), D \to A, C \Rightarrow D \to B$

$E \to F, C \to (D \to E), (A \to B) \to C \Rightarrow D \to (A \vee F)$

$\overline{A} \leftrightarrow B, B \to C, \overline{C} \leftrightarrow D \Rightarrow (C \to B) \to (D \to A)$

Вариант 8.

$A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D \Rightarrow (A \vee C) \leftrightarrow (B \vee D)$

$A \to (B \to C), C \to (B \to \overline{A}), D \to A, A \to B \Rightarrow \overline{D}$

$A \to B, B \to D, D \to A, B \vee C, C \to D \Rightarrow D$

Вариант 9.

$A, B \vee C \Rightarrow A \wedge B; C$

$C, (A \to B) \to (C \to A) \Rightarrow A$

$A \to (B \vee C), B \to (D \to A), C \to (B \to A), A \to (B \to C), D \to (A \vee B),$

$D \to (A \to B), C \to (B \vee D), A \vee C \vee D, C \to (A \to B) \Rightarrow A \wedge B \wedge C; A \wedge B \wedge D$

Вариант 10.

$A, B \to C \Rightarrow A \wedge \overline{B}; B \wedge C$

$A \to (B \wedge C), \overline{B} \vee D, (E \to \overline{F}) \to \overline{D}, \overline{B} \vee (A \wedge \overline{E}) \Rightarrow B \to E$

$A \vee B, A \vee C, A \to C, C \to (A \to D) \Rightarrow B \vee D$

Вариант 11.

$A, B \to C \Rightarrow (A \to \overline{C}) \to \overline{B}$

$A \to B, A \leftrightarrow D, C \leftrightarrow E \Rightarrow (B \to C) \to (D \to E)$

$A \to (C \to B), D \to A, C \Rightarrow D \to B$

Вариант 12.

$A \to (B \to C), A \to (B \vee C) \Rightarrow A \to C$

$A \leftrightarrow \overline{B}, A \vee C, \overline{C \wedge E}, B \to C, B \vee D, A \to E \Rightarrow D \leftrightarrow E; \overline{C \wedge D}$

$A, D \to C, B \vee (A \to D), B \to C \Rightarrow C$

Вариант 13.

$A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D \Rightarrow (A \to C) \to (B \to D)$

$A \vee C, C \to D, \overline{A \wedge D}, \overline{B \wedge C}, A \to B, A \vee B \Rightarrow A \wedge B$

$E \to D, C \vee E, A \vee D, D \to \overline{B} \Rightarrow C \wedge D; (E \wedge B) \to (E \to A)$

Вариант 14.

$A, B \to C \Rightarrow A \wedge \overline{B}; B \wedge C$

$C \to (D \to E), E \to F \Rightarrow ((A \to B) \to C) \to (D \to (\overline{A} \to F))$

$A \to B, A \leftrightarrow C, D \leftrightarrow E \Rightarrow (B \to D) \to (C \to E)$

Вариант 15.

$\left(\overline{A \vee C}\right) \leftrightarrow (B \vee D), \overline{A} \leftrightarrow B \Rightarrow C \to \overline{D}$

$A \to (B \vee C), A \vee B, B \to A, B \to D \Rightarrow C \vee D$

$E \to D, C \vee E, A \vee D, D \to B, E \Rightarrow A; B \wedge E; C \wedge D$

Вариант 16.

$A \to B, B \vee C, C \to A, B \to C \Rightarrow A \wedge B$

$E \to D, E \leftrightarrow C, C \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B \Rightarrow A \to B$

$A \vee B, B \leftrightarrow C, C, D, A \leftrightarrow D \Rightarrow A \wedge B$

Вариант 17.

$A \to B, A \vee C, C \to B, D \to A \Rightarrow (B \to D) \to B$

$\overline{D}, E \Rightarrow ((A \wedge \overline{B}) \to C) \leftrightarrow \overline{D}; E \leftrightarrow (A \wedge (B \to C))$

$A \vee (B \to C), C \to (B \to A), A \to D \Rightarrow (A \vee B) \to D$

Вариант 18.

$(\overline{A \to C}) \leftrightarrow (B \to D) \Rightarrow A \leftrightarrow \overline{B}; \overline{C} \leftrightarrow D$

$C \to (A \vee B), D \to (B \vee C) \Rightarrow A \vee B; \overline{D}$

$A \to D, A \vee C, D \vee E, D \to B \Rightarrow (A \wedge B) \to (A \to E); C \wedge D$

Вариант 19.

$A \vee C, A \to B, C \to B \Rightarrow A \wedge B; B \wedge C$

$A \to B, A \to C, D \leftrightarrow E, D \to A, E \to A, B \to E, C \to D \Rightarrow B \leftrightarrow C$

$C \to (B \to A), C \vee D, D \to B, B \vee D \Rightarrow (D \to C) \to A$

Вариант 20.

$A, B \vee C \Rightarrow A \wedge C; B \wedge \overline{C}$

$A \to B, C \to D, (B \wedge D) \to E, E, A \Rightarrow \overline{C}$

$A \to (B \to C), B \vee C \vee D \Rightarrow (A \to C) \vee D$

Задание 3.2. По Вашему выбору для двух из трех клауз из задания 3.1 составьте легенды.

Задание 3.3. Для легенды Вашего варианта запишите с использованием 4-6 букв клаузу, отвечающую контексту легенды. Для чего сформулируйте необходимые посылки и следствие (если оно явно не присутствует в контексте легенды – составьте сами). Проверьте полученное умозаключение на общезначимость любым методом.

Вариант 1. В одной старой легенде рассказывается, что греческий драматург Софокл погиб при очень странных обстоятельствах. На его лысый череп орел сбросил камень, приняв его за яйцо. Если бы Софокл не сочинял трагедий, то он не уединялся бы в горах и остался бы жить до своей естественной кончины. Он мог бы сочинять свои трагедии в горах при наличии волос или при отсутствии там этих странных птиц.

Вариант 2. «Ты меня уважаешь?» - «Да». – «Тогда дай мне денег». – «Дав тебе денег, я перестану тебя уважать». – «Разве ты уважаешь меня из-за денег?». – «Нет, как художника». – «Ну тогда тем более ты должен дать мне их мне». – «Я даю деньги тем, у кого они в принципе водятся. Ты же мне долг не вернешь». – «Я открою свое дело. Через год у меня будет состояние. Займи под проценты». – «Я тебе не верю, но помогу организовать выставку твоих картин». – «Хорошо, идет».

Вариант 3. Современный футбол – это надежная защита, хорошая скорость, напористая атака и убедительная результативность. Матвеев мне результативность обеспечит, но голы он забивает только по вдохновению, когда складывается игра. Без Федотова такой игры не получится. Он видит поле, чувствует, где надо находиться, но бегать не может. Скорость команде сообщит Комаров, хотя он может развалить всю защиту. Попробовать Петрова в обороне, но в паре с Матвеевым он не играет. Квасов умеет блокировать бомбардиров противника, но левой у него не получается. Надо ставить Земерова, чтобы левый край прикрыл. Однако Земеров в последнее время точный пас отдать не может. Ну нет команды! Завтра точно встречу проиграем.

Вариант 4. Мотоцикл я сначала не заметил, так как его заслонил бензовоз, а «Волга» вывернула из-за угла, когда «Жигули» были уже вблизи светофора. «Иномарка» проскочила на красный свет и явилась, как мне кажется, причиной всей этой аварии. Из-за нее «Волга» резко затормозила и мотоциклист оказался на асфальте. «Жигули», чтобы не задавить мотоциклиста, свернули на тротуар, а бензовоз в это время врезался в «Волгу». Если бы не было мотоцикла, то опасной ситуации тоже могло и не быть. Хотя виноват и водитель «Волги», поскольку он явно превысил скорость.

Вариант 5. Если облака – это горы в небе и горы – это облака на земле, то гроза – это вулкан на небе и вулкан – это гроза на земле. Вулкан извергает пепел, а гроза — воду. Вулканический пепел и дождевая вода одинаково хорошо сказываются на урожайности полей. Урожай — это благо. Все благо — от Бога. Значит, пепел и вода, вулкан и гроза, горы и облака — от Бога.

Вариант 6. «Я вижу, у Вас поднялось давление». — «Это последствие рыбалки, доктор». — «Рыбалка, напротив, должна успокаивать и укреплять здоровье». — «Верно, доктор, но я переволновался, так как ловил рыбу в запрещенном месте». — «Ай-ай-ай! Зачем же Вы на это пошли?» — «Там, где разрешено, доктор, рыбы нет». — «В таком случае рыбы много в магазине. Я же Вам прописал отдых на свежем воздухе». — «Хорошо, доктор, тогда завтра я пойду охотиться». — «Только, пожалуйста, голубчик, не стреляйте в зоопарке».

Вариант 7. Ваня и Петя — братья-близнецы. Ваня с огромной скоростью улетел на ракете в космос, а Петя остался на неподвижной Земле. Теория относительности утверждает, что если лететь на большой скорости, то время замедляется, поэтому Петя состарится, а Ваня — нет. Эта же теория учит, что движение относительно: если Ваня движется относительно Пети, то Петя движется относительно Вани. Однако по теории почему-то именно Ваня, вернувшись из полета, будет моложе Пети. Вывод: теория относительности не свободна от противоречий.

Вариант 8. Если усложнить схему устройства, то возрастет ею производительность, а если использовать новую элементную базу, то увеличится период эксплуатации. Устройство начнут хорошо раскупать только при одновременном росте его производительности и периода эксплуатации. Но устройство не пользуется спросом.

Вариант 9. Увеличение денег в обращении влечет за собой инфляцию. Но рост денежной массы происходит по двум причинам: из-за денежной эмиссии или снижения товарооборота. Снижение товарооборота приводит к безработице и спаду производства. Из-за инфляции падает курс денежной единицы. Рекомендации экономиста Иванова: увеличить денежную эмиссию и поднять производство, тогда избежим безработицы и курс денежной единицы останется неизменным.

Вариант 10. «Что собираешься делать, честолюбивый полководец?» — «Хочу завоевать Африку, мудрый философ». — «Предположим, Африку ты завоевал. Что дальше будешь делать?» — «Пойду походом на Индию». —

«Допустим, и Индию ты покорил. Что потом?» — «Потом я уединюсь в своем саду и стану наслаждаться чтением книг. Хочу быть таким же мудрым как ты, философ». — «Почему бы тебе сразу же не отправиться в сад и не приняться за книги?» — «Так ведь ни Африки, ни Индии я еще не завоевал». — «Да, ты прав, полководец. Я рассуждаю немудро, поскольку не учитываю твоего сегодняшнего честолюбия».

Вариант 11. Чтобы сварить щи, нужны: капуста, свекла, картофель, лук, морковь и томаты. Свеклы и капусты в нашем магазине не оказалось. Все остальное я купила. Однако щи уже не получатся. Хорошо, тогда куплю огурцы и сметану, сделаю салат из огурцов, томатов и лука. Поджарю котлетки, отварю картошечку — второе у меня есть. Что приготовить на первое? Пожалуй, на говяжьих косточках неплохо будет домашняя лапша. А морковку я сейчас помою и отдам детям — пусть червячка заморят.

Вариант 12. Любой марксист — диалектик, но не всякий диалектик — марксист. Любой марксист — материалист, но не всякий материалист — марксист. Гегель был диалектик, но не материалист. Фейербах был материалист, но не диалектик. Итак, если бы Гегель и Фейербах могли объединиться в один кружок, то Маркс уже не понадобился бы.

Вариант 13. Преступник изготовит партию фальшивых денег, если у него имеются соответствующие материалы и работает станок. Эти два условия, к сожалению, выполняются. Однако фальшивые деньги не появятся, если хорошо работает милиция. Милиция же работает хорошо тогда и только тогда, когда каждый милиционер получает высокую зарплату. Увы, пока такой зарплаты нет, но есть высокая сознательность всех работников милиции.

Вариант 14. «Надо завести собаку», — сказал старик. «Она не даст жить моей кошечке», — сказала старуха. «Если не будет собаки, то я не смогу результативно охотиться и приносить в дом дичь». — «А если не будет моей кошечки, то в доме разведутся мыши, которые уничтожат все наши продовольственные запасы». — «Согласен, старуха. Давай собаку я заведу, но держать ее буду во дворе». — «Кошечку во двор я пускать не буду».

Вариант 15. Существуют две теории возникновения человека на земле - теория эволюции Дарвина и теория сотворения человека Господом Богом. Если справедлива теория эволюции, то самопроизвольное возникновение человека без соответствующих превращений живых организмов невозможно. Как доказали ученые, такие превращения действительно имели место. По теории же сотворения человек был слеплен из простой глины, а жизнь в него вдохнул Господь. Глины всегда было много, а насчет дыхания Бога тоже сомневаться не приходится, поскольку есть на то свидетельство Библии. Отсюда вывод — две названные теории друг другу не противоречат.

Вариант 16. Человек, который решил свести счеты со своей жизнью, вряд ли будет за час до этого просматривать статистические данные по зерну за прошлый год. Сломанная герань только подчеркивает кем-то хорошо скрытые следы борьбы и насилия. Очень, конечно, странно, что дверь оказалась заперта изнутри, а вахтер ничего не заметил. Как же преступнику удалось выйти из помещения? И каковы, собственно, мотивы преступления? Такой тихий, скромный человек, ничего кроме семьи и работы его не интересовало. Правда, жена сообщила, что она вчера вечером видела его в обществе двух подозрительных молодых людей. Да и вахтер утверждал, что примерно в течение получаса отлучался для обхода территории. Тем не менее не хватает какого-то звена в этой загадочной цепи событий, чтобы уверенно сказать - «самоубийство» кем-то старательно инсценировано.

Вариант 17. Из утверждения «два плюс два равно пяти» следует, что я и папа римский — одно в то же лицо. В самом деле, если от обеих частей указанного равенства отнять по двойке, то будет справедливо равенство «два равно трем». Если от обеих частей нового равенства отнять по единице, то будет справедливо равенство — «один ранен двум». Один — это я, а двойка — это я и папа римский. Поскольку верно, что «один равен двум», то я есть папа римский.

Вариант 18. «Хочешь яблоко?» - «Яблоки я не ем после рыбы, а рыбу я не ем после борща. Борщ я сегодня не ел, но съел немного горохового супа. После него я съел кусочек жареного хека. Если я ем гороховый суп, то в этот день уже не буду отказываться от яблок, но при условии, что к столу не подавали салат. Итак, давай сюда яблоко».

Вариант 19. Уменьшение температуры приводит к снижению давления и уменьшению объема. Увеличение объема приводит к росту скорости потока. Повышение давления приводит к падению уровня, если при этом уменьшать температуру. Снижение скорости приводит к уменьшению давления или росту температуры. Технолог Иванов рассудил так: «Мне надо повысить давление при одновременном снижении скорости потока, поэтому я должен увеличить объем и температуру».

Вариант 20. Сегодня посмотрю футбол, если трамвай не задержится. Трамвай не опоздал, но случилась другая беда: у меня не оказалось денег на билет. Рискну доехать «зайцем». В салоне оказался контролер, и я лихорадочно стал рыться по карманам. К моему счастью, нашелся один неиспользованный трамвайный талон. До компостера я добрался вовремя, хотя футбольный матч я гак и не увидел; вместе с деньгами я дома оставил и билет на матч.

3.2 Методические указания к выполнению индивидуального задания № 3

Задание 3.1. Каждую из трех клауз Вашего варианта необходимо проверить тремя методами: Квайна, редукции и резолюций.

Решение.

Рассмотрим применение методов на примере двух клауз $X \to Y, Y \to Z \Rightarrow X \to Z$ и $A \to (\overline{B} \vee C), \neg A, B \to C \Rightarrow A \vee C$.

Метод Квайна (частичный обход семантического дерева) предполагает исследование таблицы истинности формулы, однако позволяет обходить не все дерево значений. Метод заключается в том, что пропозициональным переменным последовательно придается значение 0 и 1 и анализируются формулы, содержащие меньшее количество переменных.

Применим метод Квайна для исследования клаузы $X \to Y, Y \to Z \Rightarrow X \to Z$. Перейдем от метасимволов к символам конъюнкции и импликации, получим: $F(X,Y,Z) = \left(\left(X \to Y\right) \& \left(Y \to Z\right)\right) \to \left(X \to Z\right)$.

Придадим значение переменной $X = 1$, тогда формула примет вид: $F(1,Y,Z) = \left(\left(1 \to Y\right) \& \left(Y \to Z\right)\right) \to \left(1 \to Z\right)$, далее, пользуясь таблицей истинности импликации, преобразуем ее в формулу: $F(1,Y,Z) = \left(Y \& \left(Y \to Z\right)\right) \to Z$. В полученной формуле придадим значение переменной $Y = 1$: $F(1,1,Z) = \left(1 \& \left(1 \to Z\right)\right) \to Z = Z \to Z = 1$.

В случае $Y = 0$ имеем формулу: $F(1,0,Z) = \left(0 \& \left(0 \to Z\right)\right) \to Z = 0 \to Z = 1$.

Рассмотрим теперь случай $X = 0$:

$$F(0,Y,Z) = \left(\left(0 \to Y\right) \& \left(Y \to Z\right)\right) \to \left(0 \to Z\right) = \left(1 \& \left(Y \to Z\right)\right) \to 1 = 1.$$

Таким образом, все возможные случаи приводят к истинным значениям, значит клауза верна. На рисунке 3.1 изображена часть семантического дерева, которая использовалась для проверки данной клаузы методом Квайна. Такое дерево рекомендуется строить всегда при применении данного метода, чтобы не пропустить ветки, которые не исследованы.

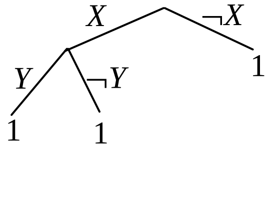


Рис. 3.1. Часть семантического дерева, построенного в процессе применения метода Квайна для исследования функции $F(X,Y,Z) = \left(\left(X \to Y\right) \& \left(Y \to Z\right)\right) \to \left(X \to Z\right)$.

Применим метод Квайна для исследования второй клаузы $A \to (\overline{B} \vee C), \neg A, B \to C \Rightarrow A \vee C$. Будем изучать значения функции $F(A,B,C) = \left(A \to \left(\overline{B} \vee C\right)\right) \& \overline{A} \& \left(B \to C\right) \to \left(A \vee C\right)$.

Придадим значение переменной A=0, тогда формула примет вид:

$$F(0,B,C) = \left(0 \to \left(\overline{B} \vee C\right)\right) \& \overline{0} \& \left(B \to C\right) \to \left(0 \vee C\right) =$$

$$= 1 \& 1 \& \left(B \to C\right) \to C = \left(B \to C\right) \to C,$$

Для получения последней формулы воспользовались таблицей истинности импликации, конъюнкции и дизъюнкции.

В полученной формуле придадим значение переменной B=0: $F(0,0,C) = \left(0 \to C\right) \to C = 1 \to C = C$.

Значение последней формулы зависит от значения переменной C:

$F(0,0,0) = 0$, $F(0,0,1) = 1$.

Получение нуля свидетельствует о неверности клаузы. На рисунке 3.2 изображена часть семантического дерева, которая использовалась для проверки данной клаузы методом Квайна. Достраивать семантическое дерево в этом случае не требуется.

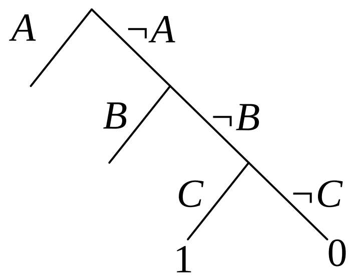


Рис. 3.2. Часть семантического дерева, построенного в процессе применения метода Квайна для исследования функции $F(A,B,C) = \left(A \to \left(\overline{B} \vee C\right)\right) \& \overline{A} \& \left(B \to C\right) \to \left(A \vee C\right)$.

Идея метода редукции основана на том, что предполагается неверность клаузы, то есть, что существует некоторая интерпретация, при которой все посылки истинны, а заключение ложно. Решая полученные логические уравнения, приводим к противоречию (в случае верной клаузы) или находим ту интерпретацию, при которой действительно нарушается определение логического следования, а значит, клауза неверна.

Докажем методом редукции клаузу $X \to Y, Y \to Z \Rightarrow X \to Z$.

Предположив, что клауза неверна, получим систему логических уравнений:

$$\begin{cases} X \to Y = 1, \\ Y \to Z = 1, \\ X \to Z = 0. \end{cases}$$

По таблице истинности импликации получаем единственное решение третьего уравнения: $X = 1$, $Z = 0$. Подставляем эти значения в первое и второе уравнения системы:

$$\begin{cases} 1 \to Y = 1, \\ Y \to 0 = 1, \\ X = 1, \ \ Z = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $Y = 1$, а из второго $Y = 0$ (вновь используя таблицу истинности импликации).

Полученное противоречие свидетельствует о верности клаузы.

Проверим методом редукции клаузу: $A \to (\overline{B} \vee C), \neg A, B \to C \Rightarrow A \vee C$. Клауза неверна тогда и только тогда, когда имеет решение система логических уравнений:

$$\begin{cases} A \to (\overline{B} \vee C) = 1, \\ \neg A = 1, \\ B \to C = 1, \\ A \vee C = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение имеет решение $A = 0$, подставляем это значение в первое и четвертое уравнения:

$$\begin{cases} 0 \to (\overline{B} \vee C) = 1, \\ A = 0, \\ B \to C = 1, \\ 0 \vee C = 0. \end{cases}$$

Из четвертого уравнения получаем $C = 0$ и подставляем это значение в третье уравнение:

$$\begin{cases} 0 \to (\overline{B} \vee C) = 1, \\ A = 0, \\ B \to 0 = 1, \\ C = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения получаем $B = 0$. Подставляем значения переменных в первое уравнение и получаем верное равенство: $0 \to (\overline{0} \vee 0) = 1$.

Итак, найдено решение составленной системы уравнений: $A = 0$, $B = 0$,

$C=0$. Следовательно, определение логического следования нарушается. Клауза не верна.

Докажем методом резолюций клаузу $X \to Y, Y \to Z \Rightarrow X \to Z$.

1 шаг. Приводим клаузу в противоречие: $X \to Y, Y \to Z, \overline{X \to Z} \Rightarrow 0$.

2 шаг. Строим КНФ:

$$X \to Y, Y \to Z, \overline{X \to Z} = (X \to Y) \& (Y \to Z) \& \left(\overline{X \to Z}\right) =$$

$$= \left(\overline{X} \vee Y\right) \& \left(\overline{Y} \vee Z\right) \& X \& \overline{Z}.$$

Выписываем множество дизъюнктов, $S = \left\{\left(\overline{X} \vee Y\right), \left(\overline{Y} \vee Z\right), X, \overline{Z}\right\}$.

3 шаг Перенумеруем для удобства получившиеся дизъюнкты:

1. $\overline{X} \vee Y$,
2. $\overline{Y} \vee Z$,
3. X,
4. $\overline{Z}$,

добавляем составленные резольвенты, пока не получим 0:

5. $res_X\left(\overline{X} \vee Y, X\right) = Y$, (из 1 и 3),
6. $res_Z\left(\overline{Y} \vee Z, \overline{Z}\right) = \overline{Y}$, (из 2 и 4),
7. $res_Y\left(Y, \overline{Y}\right) = 0$. (из 5 и 6).

Клауза доказана.

Проверим методом резолюций вторую клаузу $A \to (\overline{B} \vee C), \neg A, B \to C \Rightarrow A \vee C$.

1 шаг. Приводим клаузу в противоречие: $A \to \left(\overline{B} \vee C\right), \overline{A}, B \to C, \neg(A \vee C) \Rightarrow 0$.

2 шаг. Строим КНФ:

$$\left(A \to \left(\overline{B} \vee C\right)\right) \& \overline{A} \& (B \to C) \& \neg(A \vee C) = \left(A \vee \left(\overline{\overline{B} \vee C}\right)\right) \& \overline{A} \& \left(B \vee \overline{C}\right) \& \neg(A \vee C) =$$

$$= \left(A \vee \left(B \& \overline{C}\right)\right) \& \overline{A} \& \left(B \vee \overline{C}\right) \& \overline{A} \& \overline{C} = (A \vee B) \& \left(A \vee \overline{C}\right) \& \overline{A} \& \left(B \vee \overline{C}\right) \& \overline{A} \& \overline{C} =$$

$$= (A \vee B) \& \left(A \vee \overline{C}\right) \& \overline{A} \& \left(B \vee \overline{C}\right) \& \overline{C}.$$

3 шаг Перенумеруем для удобства получившиеся дизъюнкты:

1. $A \vee B$,
2. $A \vee \overline{C}$,
3. $\overline{A}$,
4. $B \vee \overline{C}$,
5. $\overline{C}$

Известно, что данная клауза неверна (мы ее выше проверяли двумя методами), следовательно нуля не получится, поэтому для ее проверки применим модификацию метода – метод насыщения уровней:

Составляем всевозможные дизъюнкты первого уровня (получающиеся тавтологии к списку не добавляем):

6. B (1,3)
7. $\overline{C}$ (2,3)

Далее необходимо составить всевозможные дизъюнкты второго уровня. Однако ни одного такого дизъюнкта не существует, следовательно, составлены всевозможные резольвенты. Отсутствие нуля говорит о неверности клаузы.

Задание 3.2. По Вашему выбору для двух из трех клауз из задания 3.1 составьте легенды.

Решение.

Составим легенду например для клаузы $X \to Y, Y \to Z \Rightarrow X \to Z$.

Введем элементарные высказывания:

X = «Сегодня вечером я останусь дома»,

Y = «Я сделаю контрольную работу по “Дискретной математике”»,

Z = «Завтра я получу зачет по “Дискретной математике”».

Составим посылки:

$P_1 = X \to Y$ = «Если сегодня вечером я останусь дома, то я сделаю контрольную работу по “Дискретной математике”»,

$P_2 = Y \to Z$ = «Если я сегодня сделаю контрольную работу по “Дискретной математике”, то завтра я получу зачет по “Дискретной математике”»

Заключение: $C = X \to Z$ = «если я сегодня останусь дома, то получу зачет по “Дискретной математике”»

Итак, легенда, соответствующая данной клаузе:

«Если сегодня вечером я останусь дома, то я сделаю контрольную работу по “Дискретной математике”. Если я сегодня сделаю контрольную работу по “Дискретной математике”, то завтра я получу зачет по “Дискретной математике”. Следовательно, если я сегодня останусь дома, то получу зачет по “Дискретной математике”».

Задание 3.3. Для заданной легенды запишите с использованием 4-6 букв клаузу, отвечающую контексту легенды. Для чего сформулируйте необходимые посылки и следствие (если оно явно не присутствует в контексте легенды – составьте сами). Проверьте полученное умозаключение на общезначимость любым методом. Составьте некоторые другие возможные следствия из указанных посылок, запишите их семантику.

Решение.

Рассмотрим легенду: «Если в цепи будет большой перепад напряжения, то сгорит предохранитель, что повлечет за собой необходимость его замены. При целом предохранителе телевизор, конечно, будет работать, но только-если он включен в сеть питания. Если телевизор работает нормально, то я увижу сегодняшние «Новости». Итак, я смотрю телевизионные «Новости» при условии отсутствия перепада напряжения и подключения телевизора к сети питания.»

Для составления клаузы введем элементарные высказывания:

A= «В цепи произошел большой перепад напряжения»;

B= «Предохранитель цел»;

C= «Телевизор работает»;

D= «Телевизор включен в сеть»;

E= «Я смотрю новости».

Формулируем посылки:

$P_1 = A \to \overline{B}$ = «Если в цепи будет большой перепад напряжения, то сгорит предохранитель»;

$P_2 = B \to (D \to C)$= «При целом предохранителе телевизор, конечно, будет работать, но только если он включен в сеть питания»;

$P_3 = C \to E$ = «Если телевизор работает нормально, то я увижу сегодняшние «Новости»;

Заключение: $(\overline{A} \& D) \to E$= «Я смотрю телевизионные «Новости» при условии отсутствия перепада напряжения и подключения телевизора к сети питания.»

Собираем посылки и заключение в клаузу:

$$A \to \overline{B}, B \to (D \to C), C \to E \Rightarrow (\overline{A} \& D) \to E.$$

Проверим полученную клаузу, например, методом редукции:

$$\begin{cases} A \to \overline{B} = 1, \\ B \to (D \to C) = 1, \\ C \to E = 1, \\ (\overline{A} \& D) \to E = 0 \end{cases} \begin{cases} A \to \overline{B} = 1, \\ B \to (D \to C) = 1, \\ C \to E = 1, \\ \overline{A} \& D = 1, E = 0 \end{cases} \begin{cases} A \to \overline{B} = 1, \\ B \to (D \to C) = 1, \\ C \to 0 = 1, \\ \overline{A} = 1, D = 1, E = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \to \overline{B} = 1, \\ B \to (1 \to 0) = 1, \\ C = 0, \\ A = 0, D = 1, E = 0 \end{cases} \begin{cases} 1 = 1, \\ B \to 0 = 1, \\ C = 0, \\ A = 0, D = 1, E = 0 \end{cases} \begin{cases} 1 = 1, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ A = 0, D = 1, E = 0 \end{cases}$$

Итак, существует интерпретация при которой несмотря на истинность всех посылок заключение все ж равно нулю. Это происходит в том случае, когда предохранитель сломан вне зависимости от перепада напряжения. Делаем вывод о неверности составленной клаузы.

4. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

4.1 Индивидуальное задание № 4 по теме «Логика предикатов»

Задание 4.1. Привести формулу логики предикатов к пренексной (предваренной) нормальной форме. Вычислить значение истинности формулы на множестве M={1, 2} со следующими предикатами:

x	1	2
$P(x)$	1	0
$R(x)$	0	1

$Q(x,y)$	1	2
1	1	0
2	0	0

Вариант 1. $\forall x\left(P(x)\,\&\,R(x)\to\exists yQ(x,y)\right)$

Вариант 2. $\forall xP(x)\to\left(R(x)\to\exists yQ(x,y)\right)$

Вариант 3. $\forall x\left(P(x)\,\&\,\neg R(x)\to\exists yQ(x,y)\right)$

Вариант 4. $\forall x\left(\neg P(x)\to\left(\neg R(x)\to\exists y\neg Q(x,y)\right)\right)$

Вариант 5. $\forall x\left(\neg P(x)\vee\neg R(x)\to\exists yQ(x,y)\right)$

Вариант 6. $\exists x\left(P(x)\,\&\,R(x)\to\forall yQ(x,y)\right)$

Вариант 7. $\exists x\left(P(x)\to\left(R(x)\to\forall yQ(x,y)\right)\right)$

Вариант 8. $\exists x\left(P(x)\vee\neg\left(R(x)\to\forall yQ(x,y)\right)\right)$

Вариант 9. $\exists x\left(\neg P(x)\to\left(\neg R(x)\to\forall yQ(x,y)\right)\right)$

Вариант 10. $\exists x\left(\neg P(x)\vee\neg R(x)\to\exists y\neg Q(x,y)\right)$

Вариант 11. $\forall y\left(P(y)\,\&\,R(y)\to\exists xQ(x,y)\right)$

Вариант 12. $\forall y\left(P(y)\to\left(R(y)\to\exists xQ(x,y)\right)\right)$

Вариант 13. $\forall y\left(P(y)\vee\neg R(y)\to\exists xQ(x,y)\right)$

Вариант 14. $\forall y\neg P(y)\to\left(\neg R(x)\to\exists xQ(x,y)\right)$

Вариант 15. $\forall y\left(P(x)\to\left(\neg R(x)\to\exists xQ(x,y)\right)\right)$

Вариант 16. $\forall x\left(P(x)\,\&\,R(x)\to\forall yQ(x,y)\right)$

Вариант 17. $\forall x\left(P(x)\to\left(R(x)\to\forall yQ(x,y)\right)\right)$

Вариант 18. $\forall x\left(P(x)\vee\neg R(x)\to\forall yQ(x,y)\right)$

Вариант 19. $\forall x\left(P(x)\to R(x)\right)\to\forall yQ(x,y)$

Вариант 20. $\forall x\left(\neg P(x)\vee\neg R(x)\to\forall yQ(x,y)\right)$

Задание 4.2. Установить истинность каждого из двух логических выражений Вашего варианта двумя методами:

1) используя определения кванторов и логических операций;

2) методом конкретизации.

Вариант 1.

$\forall x\forall yP(x,y)\Rightarrow\exists x\exists yP(x,y)$,

$\exists xA(x)\vee\forall xB(x)=\exists x\forall y(A(x)\vee B(y))$

Вариант 2.

$\forall x\exists y(A(y)\vee B(x))=\exists xA(x)\vee\forall xB(x)$

$\forall x\exists yP(x,y)\Rightarrow\exists x\exists yP(x,y)$

Вариант 3.

$\exists x(B(x)\wedge A)=\exists xB(x)\wedge A$

$\exists x\forall yP(x,y)\Rightarrow\exists xP(x,b)$

Вариант 4.

$\exists x(A(x)\to B)=\forall xA(x)\to B$

$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

Вариант 5.

$\forall x\forall yP(x,y)\Rightarrow\forall xP(x,x)$

$\forall x(A(x)\to B)=\exists xA(x)\to B$

Вариант 6.

$\exists x(A(x)\vee B(x))=\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

$\forall xP(x,b)\Rightarrow\exists y\forall xP(x,y)$

Вариант 7.

$\exists xA(x)\to\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\to B(x))$

$\exists x(A\to B(x))=A\to\exists xB(x)$

Вариант 8.

$\forall x(A(x)\to B)=\exists xA(x)\to B$

$\exists xP(x,x)\Rightarrow\exists x\exists yP(x,y)$

Вариант 9.

$\forall x\forall y(A(x)\to B(y))=\exists xA(x)\to\forall xB(x)$

$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x\forall y(A(x)\vee B(y))$

Вариант 10.

$\exists x(A(x)\to B(x))=\forall xA(x)\to\exists xP(x)$

$\forall x\forall yP(x,y)\Rightarrow\exists x\exists yP(x,y)$

Вариант 11.

$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

$\exists xA(x)\to\forall xB(x)=\forall x\forall y(A(x)\to B(y))$

Вариант 12.

$\exists x A(x) \vee \forall x B(x) = \exists x \forall y (A(x) \vee B(y))$

$\forall x \forall y (A(x) \to B(y)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \forall x B(x)$

Вариант 13.

$\exists x (A \to B(x)) = A \to \exists x B(x)$

$\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x P(x, x)$

Вариант 14.

$\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$

$\forall x (A \to B(x)) = A \to \forall x B(x)$

Вариант 15.

$\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$

$\exists x (A(x) \to B) = \forall x A(x) \to B$

Вариант 16.

$\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$

$\exists x (A(x) \to B(x)) = \forall x A(x) \to \exists x P(x)$

Вариант 17.

$\exists x \forall y (A(x) \vee B(y)) = \forall y \exists x (A(x) \vee B(y))$

$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x))$

Вариант 18.

$\forall y P(a, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$

$\exists x (B(x) \wedge A) = \exists x B(x) \wedge A$

Вариант 19.

$\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists x P(x, b)$

$\forall x \exists y (A(y) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$

Вариант 20.

$\forall x (A \vee B(x)) = A \vee \forall x B(x)$

$\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$

Задание 4.3. Доказать истинность клаузы методом резолюций:

Вариант 1.

$\forall z B(b,z,z) \vee \exists v \overline{A}(b,v,b), \forall u B(u,u,a) \vee \forall y \forall z A(y,y,z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists w B(w,c,w) \wedge \exists u A(u,u,u); \exists w \forall u B(b,u,w) \wedge \exists z \forall x B(x,c,z)$

Вариант 2.

$\exists x \forall z B(x,b,z) \to \forall w A(w,b,w), \exists x \forall z A(x,z,z) \vee \forall x B(a,x,x) \vee \forall u A(a,b,u) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists v \forall w A(v,b,w); \exists u \forall v B(u,v,v) \wedge \exists u A(a,u,c) \wedge \forall u \exists z B(u,b,z) \wedge \exists x \forall z A(x,b,z)$

Вариант 3.

$\forall y \exists z B(y,c,z), \forall x \exists y A(x,y,y) \vee \forall x B(b,x,a) \vee \exists x \forall w A(x,c,w) \vee \forall u \exists w B(u,c,w) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists z B(z,c,z) \wedge \overline{\forall} u \exists w A(u,c,w); \vee u \exists w B(u,w,w) \wedge \exists u A(b,u,u) \wedge \exists x B(b,c,x)$

Вариант 4.

$\forall x\exists zB(x,z,a), \forall u\exists wA(u,w,w) \vee \exists z\forall wB(w,z,z) \vee \exists z\forall xA(x,c,z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\forall} x\exists wA(x,x,w) \wedge \forall u\exists vB(u,v,b); \exists v\exists wB(b,v,w) \wedge \exists zA(b,z,z) \wedge \exists v\forall uB(u,v,a)$

Вариант 5.

$\forall x\forall zA(x,x,z), \exists x\exists yB(x,x,y) \to \forall zA(z,b,z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists u\exists vA(u,v,v) \wedge \exists z\overline{B}(z,z,z); \forall u\exists vA(a,v,u) \wedge \exists yB(a,y,a) \wedge \exists xA(x,b,c)$

Вариант 6.

$A(b,b,c), \forall v\forall wB(c,v,w) \forall u\overline{B}(u,u,a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall vA(b,v,b) \wedge \exists uB(c,u,u) \wedge \exists u\exists xA(u,x,c); \overline{\forall} xB(x,c,a) \wedge \overline{\forall} y\forall zA(y,y,z) \wedge \forall yB(c,y,y)$

Вариант 7.

$\forall u\exists wA(b,u,w) \vee B(c,c,c) \vee \exists w\forall uA(u,c,w) \vee \forall wB(b,w,w), \forall w\exists uB(w,u,a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists u\overline{A}(u,c,a) \wedge \exists v\exists wB(w,v,w); \exists v\exists wB(b,v,w) \wedge \exists zA(z,c,z) \wedge \exists x\forall yB(y,x,a)$

Вариант 8.

$\forall y\forall zA(a,y,z) \vee \forall v\exists wA(w,v,v), \forall x\forall zB(x,a,z) \vee \forall xB(x,c,a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists u\forall zA(u,z,c) \wedge \exists xB(x,x,a); \exists yB(b,y,b) \wedge \exists y\overline{B}(c,y,a)$

Вариант 9.

$\forall zA(z,b,z) \vee \forall xB(x,x,x), \forall z\exists xA(a,x,z) \vee \forall w\exists uA(u,b,w) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists wA(a,w,w) \wedge \forall y\overline{B}(a,y,a); \exists xA(x,x,c) \wedge \exists v\exists wB(v,v,w)$

Вариант 10.

$\forall y\forall zA(a,y,z) \vee \forall wB(a,w,w) \vee \forall y\exists xA(x,y,c), \exists u\forall zB(u,u,z) \to \exists x\forall yA(x,y,a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x\forall zB(x,z,z) \wedge \forall w\exists zA(z,w,w) \wedge \forall w\exists uB(u,b,w); \exists u\forall wA(u,w,c)$

Вариант 11.

$\forall x\forall yB(x,y,y) \vee \forall w\overline{A}(w,w,w), \exists x\forall yB(b,y,x) \vee \forall vA(b,v,b) \vee \forall uB(u,c,a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists u\exists wB(u,u,w); \overline{\forall} u\forall yA(u,u,v) \wedge \exists wB(w,c,w)$

Вариант 12.

$\forall y\forall zA(a,y,z) \vee \forall wB(w,b,w) \vee \forall u\exists vA(v,u,c), \exists xB(x,b,c) \to \forall y\forall zA(z,y,z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists z\forall xA(z,x,c); \exists x\forall zB(a,x,z) \wedge A(b,b,b) \wedge \forall z\exists xB(x,b,z) \wedge \exists zA(a,z,z)$

Вариант 13.

$\exists uA(u,b,c) \to (\exists v\exists wB(v,v,w) \to \exists vA(b,v,v)), \exists yB(a,y,a) \vee \forall xA(b,x,x) \vee \forall x\forall uB(x,u,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall xA(x,x,c) \to \exists y\exists zA(b,y,z); B(a,a,b)$

Вариант 14.

$\forall w\overline{B}(b,c,w), \forall x\exists zB(x,b,z), \forall zA(a,z,z) \Rightarrow \exists u\overline{B}(u,c,a) \wedge \exists wB(c,b,w) \wedge$

$\wedge \exists u\forall w\overline{A}(b,u,w); \exists z\forall wA(z,w,z) \wedge \forall u\exists wB(u,w,w) \wedge \exists wA(w,a,w)$

Вариант 15.

$\forall v\overline{A}(a,v,b) \vee \forall vA(c,v,c), \forall uA(u,u,b) \vee \forall x\exists wB(x,w,a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists v\exists wB(b,v,w) \wedge \exists y\forall zB(z,y,y); \exists u\exists wA(u,b,w) \wedge \exists uA(u,a,b)$

Вариант 16.

$\exists xA(x,b,c)\to(\exists x\forall zB(a,x,z)\to\forall zA(b,a,z)),\forall w\exists zB(w,z,w)\vee$
$\vee\exists x\forall zA(x,z,z)\vee\forall zB(z,c,z)\Rightarrow\forall zA(a,b,z)\to\exists u\forall wA(u,a,w);\exists wB(c,w,w)$

Вариант 17.

$\exists z\forall x\overline{A}(x,b,z),(\forall x\exists zA(z,b,x)\to\forall x\forall zB(x,a,z))\to(\exists u\forall y\overline{A}(y,b,u)\wedge$
$\wedge\forall x\exists y\forall zB(x,y,z))\Rightarrow\forall u\exists w\exists vB(u,v,w)\wedge\exists u\exists z\forall vB(z,u,v)$

Вариант 18.

$(\forall uA(u,a,b)\to\exists z\forall y\exists x\overline{B}(z,y,x))\to(\forall u\exists v\forall wB(u,v,w)\vee\forall x\exists yA(x,y,a)),\exists u\forall v\overline{A}(u,v,a)\Rightarrow$
$\Rightarrow\forall u\exists w\exists vB(u,v,w)\wedge\exists x\exists y\forall zB(x,y,z)$

Вариант 19.

$\exists x\forall y\exists zB(x,y,z),\exists u\forall y\forall xA(u,x,y)\vee\forall x\exists zB(x,a,z),\forall z\exists xB(z,a,x)\to\forall u\exists v\forall w\overline{B}(u,v,w)\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists u\exists v\forall wA(u,v,w)\wedge\exists v\exists w\forall uA(w,v,u)$

Вариант 20.

$\forall x\exists yA(y,x)\to\forall x\forall y\exists zB(x,y,z),\exists u\forall vA(u,v)\to\forall z\forall x\exists yB(x,y,z),$
$\forall y\exists xA(x,y)\vee\exists v\forall uA(v,u)\Rightarrow\forall y\forall z\exists xB(z,y,x)\wedge\exists y\forall z\exists xB(y,z,x)$

4.2 Методические указания к выполнению индивидуального задания № 4

Задание 4.1. Привести формулу логики предикатов $\exists x(P(x)\to\exists y(Q(x,y)\to\neg R(x)))$ к пренексной (предваренной) нормальной форме. Вычислить значение истинности формулы на множестве $M=\{1,\ 2\}$ со следующими предикатами:

x	1	2
$P(x)$	1	0
$R(x)$	0	1

$Q(x,y)$	1	2
1	1	0
2	0	0

Решение.

Приведем формулу $\exists x\big(P(x)\to\exists y\big(Q(x,y)\to\neg R(x)\big)\big)$ к пренексной (предваренной) нормальной форме:

$$\exists x\big(P(x)\to\exists y\big(Q(x,y)\to\neg R(x)\big)\big)=\exists x\big(P(x)\vee\neg\exists y\big(Q(x,y)\vee\neg\neg R(x)\big)\big)=$$
$$=\exists x\big(P(x)\vee\forall y\neg\big(Q(x,y)\vee R(x)\big)\big)=\exists x\Big(P(x)\vee\forall y\Big(\overline{Q(x,y)}\,\&\,\overline{R(x)}\Big)\Big)=$$
$$=\exists x\forall y\Big(P(x)\vee\Big(\overline{Q(x,y)}\,\&\,\overline{R(x)}\Big)\Big).$$

Поясним подробнее выполненные преобразования:

На первом шаге операция импликация была заменена по формуле: $X\to Y=X\vee\overline{Y}$. На втором шаге применена формула для переноса отрицания через квантор существования ($\neg\exists xP(x)=\forall x\overline{P(x)}$) и использован закон инволютивности отрицания ($\overline{\overline{X}}=X$). На третьем шаге использован закон де Моргана ($\overline{X \vee Y} = \overline{X} \,\&\, \overline{Y}$). И последнее выражение получено с использованием правила выноса квантора общности из дизъюнкции ($A \vee \forall x B(x) = \forall x \left(A \vee B(x) \right)$).

Данное выражение является замкнутым. Следовательно, принимает определенное значение, если в него подставить конкретные предикаты. Воспользуемся определениями кванторов.

По определению квантора существования данное высказывание истинно, если предикат $\forall y \left(P(x) \vee \left(\overline{Q(x,y)} \,\&\, \overline{R(x)} \right) \right)$ выполним, то есть принимает значение 1 для какого-либо значения переменной x. Проверим значение предиката для x=1:

$$\forall y \left(P(1) \vee \left(\overline{Q(1,y)} \,\&\, \overline{R(1)} \right) \right) = \forall y \left(1 \vee \left(\overline{Q(1,y)} \,\&\, \overline{0} \right) \right) = \forall y \left(1 \vee \left(\overline{Q(1,y)} \,\&\, 1 \right) \right).$$

Для установления значения получившегося высказывания воспользуемся определением квантора общности. Согласно этому определению данное высказывание истинно, если предикат $1 \vee \left(\overline{Q\left(1,y\right)} \,\&\, 1 \right)$ является тождественно истинным. По таблице истинности дизъюнкции $1 \vee \left(\overline{Q(1,y)} \,\&\, 1 \right) = 1$, не зависимо от значений предиката Q(1,y).

Следовательно, высказывание $\exists x \forall y \left(P(x) \vee \left(\overline{Q(x,y)} \,\&\, \overline{R(x)} \right) \right)$=1.

Примечание. В случае открытой формулы ее значение необходимо установить для всех возможных значений свободной переменной.

Задание 4.2. Установить истинность каждого из двух логических выражений

$$\neg\left(\exists x P(x)\right) = \forall x \neg P(x),$$

$$\left(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\right) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

двумя методами:

1) используя определения кванторов и логических операций;

2) методом конкретизации.

Решение.

1) Докажем, пользуясь определениями кванторов и логических операций формулу $\neg\left(\exists x P(x)\right) = \forall x \neg P(x)$.

Допустим, что отрицание высказывания $\neg\left(\exists x P(x)\right) = 1$. По определению операции отрицания это выполняется тогда и только тогда когда высказывание $\exists x P(x) = 0$. По определению квантора существования экзистенциальное высказывание равно нулю, тогда и только тогда когда предикат тождественно ложен: $P(x) \equiv 0$. Тогда в этом и только этом случае отрицание предиката (согласно определению операции отрицания) тождественно-истинно: $\neg P(x) \equiv 1$, а в этом и только этом случае универсальное высказывание истинно $\forall x \neg P(x) = 1$, согласно определению квантора общности.

Данное доказательство можно представить в виде цепочки:
$\neg\left(\exists x P(x)\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; \exists x P(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; P(x) \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \neg P(x) \equiv 1 \;\Leftrightarrow\; \forall x \neg P(x) = 1.$

Логические следствия методом, основанным на определениях, доказываются от противного.

Докажем, пользуясь определениями кванторов и логических операций формулу $\left(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\right) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$.

Предположим, что найдутся такие предикаты, что

$\left(\left(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\right) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))\right) = 0$, тогда, по определению импликации, $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) = 1,\quad \forall x (P(x) \vee Q(x)) = 0$.

Рассмотрим второе равенство: $\forall x (P(x) \vee Q(x)) = 0$. По определению квантора общности данное высказывание ложно тогда и только тогда когда $P(x) \vee Q(x)$ опровержимый предикат. По определению операции дизъюнкция, дизъюнкция $P(x) \vee Q(x)$ опровержима тогда и только тогда, когда $P(x)$ - опровержимый предикат и $Q(x)$- опровержимый предикат. По определению квантора общности тогда и только тогда, когда предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ опровержимы - универсальные высказывания ложны: $\forall x P(x) = 0$ и $\forall x Q(x) = 0$. По определению дизъюнкции тогда и только тогда когда два высказывания ложны дизъюнкция $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) = 0$. Получили противоречие с предположением, следовательно, клауза верна.

Данное доказательство можно представить в виде цепочки:

$\left(\left(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\right) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))\right) = 0 \;\Leftrightarrow$

$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) = 1,\; \forall x (P(x) \vee Q(x)) = 0 \;\Leftrightarrow$

$P(x) \vee Q(x)$ -опровержимый предикат $\Leftrightarrow$

$P(x)$ - опровержимый предикат и $Q(x)$- опровержимый предикат $\Leftrightarrow$

$\forall x P(x) = 0$ и $\forall x Q(x) = 0 \;\Leftrightarrow$

$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) = 0$.

2) Докажем методом конкретизации формулу $\neg\left(\exists x P(x)\right) = \forall x \neg P(x)$.

Не уменьшая общности доказательства, можно считать, что предметная область состоит из двух элементов: $M = \{a, b\}$.

Преобразуем левую часть равенства:

$\neg\left(\exists x P(x)\right) = \neg\left(P(a) \vee P(b)\right) = \neg P(a) \,\&\, \neg P(b)$.

Преобразуем правую часть равенства:

$\forall x \neg P(x) = \neg P(a) \,\&\, \neg P(b)$.

Левая и правая части эквивалентны одному и тому же выражению, следовательно, эквивалентны друг другу.

Для доказательства логического следования, формулу приводят к ***аксиоме порядка***: $A, B \Rightarrow A$. Докажем методом конкретизации формулу $\left(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\right) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$.

Преобразуем левую часть формулы:

$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) = \left(P(a) \,\&\, P(b)\right) \vee \left(Q(a) \,\&\, Q(b)\right) =$

$= \left(P(a) \vee Q(a)\right) \& \left(P(a) \vee Q(b)\right) \& \left(P(b) \vee Q(a)\right) \& \left(P(b) \vee Q(b)\right).$

Преобразуем правую часть формулы:

$\forall x(P(x) \vee Q(x)) = \left(P(a) \vee Q(a)\right) \& \left(P(b) \vee Q(b)\right).$

Собираем обратно в логическое следствие:

$$\underbrace{\left(P(a) \vee Q(a)\right) \& \left(P(b) \vee Q(b)\right)}_{A}, \underbrace{\left(P(a) \vee Q(b)\right) \& \left(P(b) \vee Q(a)\right)}_{B} \Rightarrow \underbrace{\left(P(a) \vee Q(a)\right) \& \left(P(b) \vee Q(b)\right)}_{A}$$

Получили аксиому порядка.

Задание 4.3. Доказать истинность клаузы

$\forall x\left(V(x) \to P(x)\right), \forall x\left(P(x) \to Q(x)\right) \Rightarrow \forall x\left(V(x) \to Q(x)\right)$

методом резолюций:

Решение.

1) Приводим клаузу в противоречие:

$\forall x\left(V(x) \to P(x)\right), \forall x\left(P(x) \to Q(x)\right), \neg\forall x\left(V(x) \to Q(x)\right) \Rightarrow 0$

2) Строим сколемовскую стандартную форму формулы

$S = \forall x\left(V(x) \to P(x)\right) \& \forall x\left(P(x) \to Q(x)\right) \& \neg\forall x\left(V(x) \to Q(x)\right)$

2.1) Строим приведенную форму.

Заменяем импликацию по формуле $A \to B = \neg A \vee B$:

$S = \forall x\left(\neg V(x) \vee P(x)\right) \& \forall x\left(\neg P(x) \vee Q(x)\right) \& \neg\forall x\left(\neg V(x) \vee Q(x)\right)$

Переносим отрицание через квантор по формуле $\neg\left(\exists x P(x)\right) \equiv \forall x \neg P(x)$:

$S = \forall x\left(\neg V(x) \vee P(x)\right) \& \forall x\left(\neg P(x) \vee Q(x)\right) \& \exists x \neg\left(\neg V(x) \vee Q(x)\right)$

Опускаем отрицание по закону де Моргана:

$S = \forall x\left(\neg V(x) \vee P(x)\right) \& \forall x\left(\neg P(x) \vee Q(x)\right) \& \exists x\left(V(x) \,\&\, \neg Q(x)\right)$

2.2.) Строим предваренную форму.

Переименовываем связанные переменные, находящиеся в области действия различных кванторов:

$S = \forall x_1\left(\neg V(x_1) \vee P(x_1)\right) \& \forall x_2\left(\neg P(x_2) \vee Q(x_2)\right) \& \exists x_3\left(V(x_3) \,\&\, \neg Q(x_3)\right)$

Выносим кванторы в начало формулы (после переименования переменных видно, что работают формулы $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ и $\exists x P(x) \wedge Q \equiv \exists x(P(x) \wedge Q)$):

$$S=\exists x_3\forall x_1\forall x_2\left(\left(\neg V(x_1)\vee P(x_1)\right)\&\left(\neg P(x_2)\vee Q(x_2)\right)\&\left(V(x_3)\&\neg Q(x_3)\right)\right)$$

2.3) Исключив кванторы существования, получаем сколемовскую стандартную форму:

$$\forall x_1\forall x_2\left(\left(\neg V(x_1)\vee P(x_1)\right)\&\left(\neg P(x_2)\vee Q(x_2)\right)\&\left(V(c)\&\neg Q(c)\right)\right)$$

3) Построенную формулу приводим в КНФ:

$$\left(\neg V(x_1)\vee P(x_1)\right)\&\left(\neg P(x_2)\vee Q(x_2)\right)\&\left(V(c)\&\neg Q(c)\right)=$$
$$=\left(\neg V(x_1)\vee P(x_1)\right)\&\left(\neg P(x_2)\vee Q(x_2)\right)\&V(c)\&\neg Q(c)$$

4) Строим резольвенты:

1. $\neg V(x_1)\vee P(x_1)$.
2. $\neg P(x_2)\vee Q(x_2)$.
3. $V(c)$.
4. $\neg Q(c)$.
5. После унификации $\theta_1=\{c\setminus x_1\}$ можно составить резольвенту дизъюнктов 1 и 3:

$$Res_V\left(\left(\neg V(x_1)\vee P(x_1)\right)_{\theta_1},\left(V(c)\right)_{\theta_1}\right)=Res_V\left(\neg V(c)\vee P(c),V(c)\right)=P(c).$$

6. После унификации $\theta_2=\{c\setminus x_2\}$ можно составить резольвенту дизъюнктов 2 и 4:

$$Res_Q\left(\left(\neg P(x_2)\vee Q(x_2)\right)_{\theta_2},\left(\neg Q(c)\right)_{\theta_2}\right)=Res_Q\left(\neg P(c)\vee Q(c),Q(c)\right)=\neg P(c).$$

7. Резольвента дизъюнктов 5 и 6 дает 0:

$$Res_P\left(P(c),\neg P(c)\right)=0.$$

5. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

5.1. Индивидуальное здание № 5 по теме «Исчисление высказываний»

Каждую клаузу своего варианта необходимо доказать двумя методами:

1) аксиоматическим, основываясь на системе аксиом:

$A_1:\quad A\to\left(B\to A\right)$,

$A_2:\quad \left(A\to\left(B\to C\right)\right)\to\left(\left(A\to B\right)\to\left(A\to C\right)\right)$,

$A_3:\quad \left(\neg B\to\neg A\right)\to\left(\left(\neg B\to A\right)\to B\right)$;

2) методом естественного вывода.

Вариант 1.

$(A\to C)\to(A\wedge B)\Rightarrow A\vee B$

$A\vee D, B\vee E, D\to C, D\vee C\Rightarrow A\wedge C; E\wedge D; B$

$A\to B, C\to D, A\vee C, A\to\overline{D}, C\to\overline{B}\Rightarrow(A\vee B)\to(A\wedge B)$

Вариант 2.

$C \to A, B \vee C, B \to D, D \to A \Rightarrow A$

$D \to E, E \to C, A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow C \Rightarrow A \to B$

$A \vee B, A \to B, B \to (C \to \overline{D}), A \to D \Rightarrow \overline{A \wedge C}$

Вариант 3.

$(A \wedge B) \to C \Rightarrow A \to (B \to C)$

$A \to (B \to C), (C \wedge D) \to E, \overline{F} \to (D \wedge \overline{E}) \Rightarrow A \to (B \to F)$

$(A \wedge (B \to C)) \leftrightarrow D, E \leftrightarrow (A \wedge (\overline{B \vee C})) \Rightarrow (D \wedge \overline{E}) \leftrightarrow (A \wedge C)$

Вариант 4.

$A \to (B \to \overline{C}), \overline{A} \to B, \overline{A} \to (\overline{B} \to C) \Rightarrow C; B$

$A, \overline{B} \to (A \to D), C \to (B \to E), D \to (E \vee \overline{C}) \Rightarrow C \to E$

$\overline{C}, D \to C, A \to (\overline{B} \to D), B \Rightarrow A \to C$

Вариант 5.

$(A \vee C) \leftrightarrow (\overline{B \vee D}) \Rightarrow \overline{A} \leftrightarrow B; \overline{C} \leftrightarrow D$

$A \to B, C \to D, B \to E, D \to F, \overline{E \wedge F}, A \to C \Rightarrow \overline{A}$

$C \to (B \to A), \overline{B} \to D, C \Rightarrow A \vee D$

Вариант 6.

$\overline{C}, A \vee B \Rightarrow (B \to C) \to A$

$A \to C, D \to F, B \to E, \overline{D} \to \overline{C}, A \to B \Rightarrow A \to (E \wedge F)$

$A, B \vee C, C \leftrightarrow D \Rightarrow (B \to \overline{A}) \to (B \to D)$

Вариант 7.

$A \to (C \to B), D \to A, C \Rightarrow D \to B$

$E \to F, C \to (D \to E), (A \to B) \to C \Rightarrow D \to (A \vee F)$

$\overline{A} \leftrightarrow B, B \to C, \overline{C} \leftrightarrow D \Rightarrow (C \to B) \to (D \to A)$

Вариант 8.

$A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D \Rightarrow (A \vee C) \leftrightarrow (B \vee D)$

$A \to (B \to C), C \to (B \to \overline{A}), D \to A, A \to B \Rightarrow \overline{D}$

$A \to B, B \to D, D \to A, B \vee C, C \to D \Rightarrow D$

Вариант 9.

$A, B \vee C \Rightarrow A \wedge B; C$

$C, (A \to B) \to (C \to A) \Rightarrow A$

$A \to (B \vee C), B \to (D \to A), C \to (B \to A), A \to (B \to C), D \to (A \vee B),$

$D \to (A \to B), C \to (B \vee D), A \vee C \vee D, C \to (A \to B) \Rightarrow A \wedge B \wedge C; A \wedge B \wedge D$

Вариант 10.

$A, B \to C \Rightarrow A \wedge \overline{B}; B \wedge C$

$A \to (B \wedge C), \overline{B} \vee D, (E \to \overline{F}) \to \overline{D}, \overline{B} \vee (A \wedge \overline{E}) \Rightarrow B \to E$

$A \vee B, A \vee C, A \to C, C \to (A \to D) \Rightarrow B \vee D$

Вариант 11.

$A, B \to C \Rightarrow (A \to \overline{C}) \to \overline{B}$

$A \to B, A \leftrightarrow D, C \leftrightarrow E \Rightarrow (B \to C) \to (D \to E)$

$A \to (C \to B), D \to A, C \Rightarrow D \to B$

Вариант 12.

$A \to (B \to C), A \to (B \vee C) \Rightarrow A \to C$

$A \leftrightarrow \overline{B}, A \vee C, \overline{C \wedge E}, B \to C, B \vee D, A \to E \Rightarrow D \leftrightarrow E; \overline{C \wedge D}$

$A, D \to C, B \vee (A \to D), B \to C \Rightarrow C$

Вариант 13.

$A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D \Rightarrow (A \to C) \to (B \to D)$

$A \vee C, C \to D, \overline{A \wedge D}, \overline{B \wedge C}, A \to B, A \vee B \Rightarrow A \wedge B$

$E \to D, C \vee E, A \vee D, D \to \overline{B} \Rightarrow C \wedge D; (E \wedge B) \to (E \to A)$

Вариант 14.

$A, B \to C \Rightarrow A \wedge \overline{B}; B \wedge C$

$C \to (D \to E), E \to F \Rightarrow ((A \to B) \to C) \to (D \to (\overline{A} \to F))$

$A \to B, A \leftrightarrow C, D \leftrightarrow E \Rightarrow (B \to D) \to (C \to E)$

Вариант 15.

$\left(\overline{A \vee C}\right) \leftrightarrow (B \vee D), \overline{A} \leftrightarrow B \Rightarrow C \to \overline{D}$

$A \to (B \vee C), A \vee B, B \to A, B \to D \Rightarrow C \vee D$

$E \to D, C \vee E, A \vee D, D \to B, E \Rightarrow A; B \wedge E; C \wedge D$

Вариант 16.

$A \to B, B \vee C, C \to A, B \to C \Rightarrow A \wedge B$

$E \to D, E \leftrightarrow C, C \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B \Rightarrow A \to B$

$A \vee B, B \leftrightarrow C, C, D, A \leftrightarrow D \Rightarrow A \wedge B$

Вариант 17.

$A \to B, A \vee C, C \to B, D \to A \Rightarrow (B \to D) \to B$

$\overline{D}, E \Rightarrow ((A \wedge \overline{B}) \to C) \leftrightarrow \overline{D}; E \leftrightarrow (A \wedge (B \to C))$

$A \vee (B \to C), C \to (B \to A), A \to D \Rightarrow (A \vee B) \to D$

Вариант 18.

$(\overline{A \to C}) \leftrightarrow (B \to D) \Rightarrow A \leftrightarrow \overline{B}; \overline{C} \leftrightarrow D$

$C \to (A \vee B), D \to (B \vee C) \Rightarrow A \vee B; \overline{D}$

$A \to D, A \vee C, D \vee E, D \to B \Rightarrow (A \wedge B) \to (A \to E); C \wedge D$

Вариант 19.

$A \vee C, A \to B, C \to B \Rightarrow A \wedge B; B \wedge C$

$A \to B, A \to C, D \leftrightarrow E, D \to A, E \to A, B \to E, C \to D \Rightarrow B \leftrightarrow C$

$C \to (B \to A), C \vee D, D \to B, B \vee D \Rightarrow (D \to C) \to A$

Вариант 20.

$A, B \vee C \Rightarrow A \wedge C; B \wedge \overline{C}$

$A \to B, C \to D, (B \wedge D) \to E, E, A \Rightarrow \overline{C}$

$A \to (B \to C), B \vee C \vee D \Rightarrow (A \to C) \vee D$

5.2 Методические указания к выполнению индивидуального задания № 5

1) Докажем клаузу $\neg G \to \neg F, F \Rightarrow G$ аксиоматическим методом

1) $\neg G \to \neg F$ (гипотеза),
2) F (гипотеза),
3) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$ (ПП $A_3(A, B \| F, G)$,
4) $(\neg G \to F) \to G$ (МР 1,3),
5) $F \to (\neg G \to F)$ (ПП $A_1(A, B \| F, G)$),
6) $\neg G \to F$ (МР 2,5),
7) G (МР 6,4).

2) Методом естественного вывода докажем клаузу $B \to (C \to A), \neg B \to D, C, \neg D \Rightarrow A$.

1) $B \to (C \to A)$ (гипотеза),
2) $\neg B \to D$ (гипотеза),
3) C (гипотеза),
4) $\neg D$ (гипотеза),
5) $\neg\neg B$ (ВО2 2,4),
6) B (УО1 5),
7) $C \to A$ (УИ1 1,5),
8) A (УИ1 3,6).

В вышеприведенном доказательстве использованы только правила первого рода. Процедура применения правил второго рода предполагает проведение дополнительного вывода. Этот вывод будем оформлять немного в стороне от основного.

Докажем выводимость $(A \vee (B \& C)) \Rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$.

1) $A \vee (B \& C)$ (гипотеза).

Для вывода к гипотезе 1 применим правило УД2. Согласно этому правилу необходимо вывести заключение $(A \vee B) \& (A \vee C)$ из A и из $B \& C$. Для получения этих выводов вводим дополнительные гипотезы:

2) A (доп. гипотеза),
3) $A \vee B$ (ВД 2),
4) $A \vee C$ (ВД 2),
5) $(A \vee B) \& (A \vee C)$ (ВК 3,4),

6) $A \Rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$ (вывод 2 – 5),

7) $B \& C$ (доп. гипотеза),

8) B (УК 7),

9) C (УК 7),

10) $A \vee B$ (ВД 8),

11) $A \vee C$ (ВД 9),

12) $(A \vee B) \& (A \vee C)$ (ВК 10, 11),

13) $B \& C \Rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$ (вывод 7 – 12),

14) $(A \vee B) \& (A \vee C)$ (УД2 1, 6, 13),

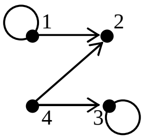
15) $(A \vee (B \& C)) \rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$ (ВИ2 1 – 14).

6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

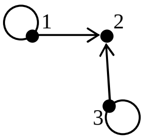
6.1 Индивидуальное задание № 5 по теме «Элементы теории графов»

Задание 6.1. Даны графы G_1 и G_2. Задайте их структурами смежности, матрицами смежности, матрицами инцидентности и списками ребер. Представьте в геометрической и матричных формах графы $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \oplus G_2$, $G_1 \times G_2$.

Вариант 1.

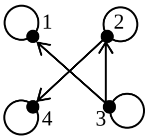


G_1

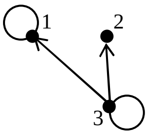


G_2

Вариант 2.

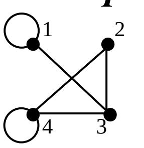


G_1

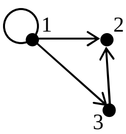


G_2

Вариант 3.

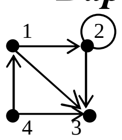


G_1

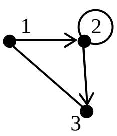


G_2

Вариант 4.

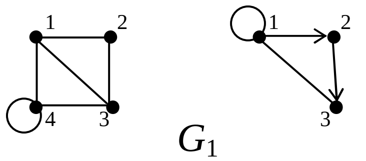


G_1



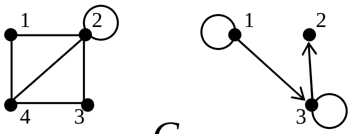
G_2

Вариант 5.



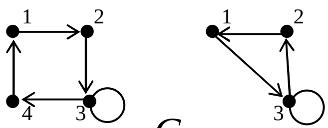
G_1 G_2

Вариант 6.



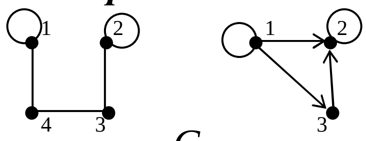
G_1 G_2

Вариант 7.



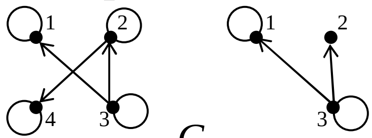
G_1 G_2

Вариант 8.



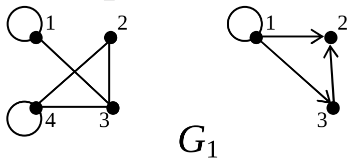
G_1 G_2

Вариант 9.



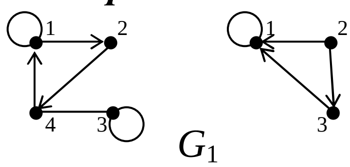
G_1 G_2

Вариант 10.



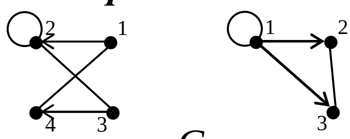
G_1 G_2

Вариант 11.



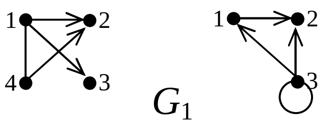
G_1 G_2

Вариант 12.



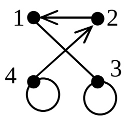
G_1 G_2

Вариант 13.

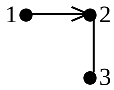


G_1 G_2

Вариант 14.

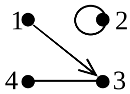


G_1

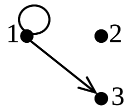


G_2

Вариант 15.

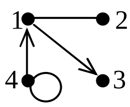


G_1

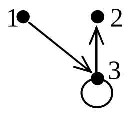


G_2

Вариант 16.

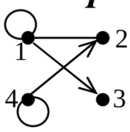


G_1

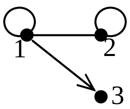


G_2

Вариант 17.

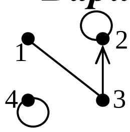


G_1

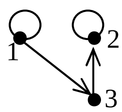


G_2

Вариант 18.

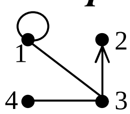


G_1

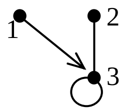


G_2

Вариант 19.

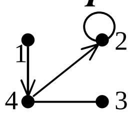


G_1

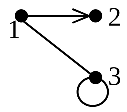


G_2

Вариант 20.



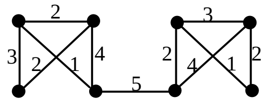
G_1



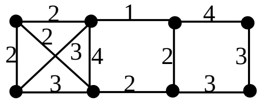
G_2

Задание 6.2. Найдите остов минимального веса, используя два алгоритма
1) алгоритм Краскала,
2) алгоритм Прима.

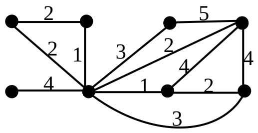
Вариант 1.



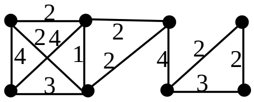
Вариант 2.



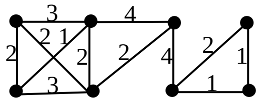
Вариант 3.



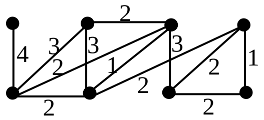
Вариант 4.



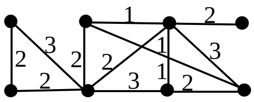
Вариант 5.



Вариант 6.

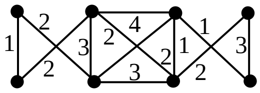


Вариант 7.

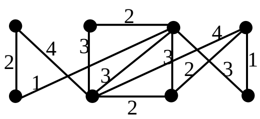


Вариант 8.

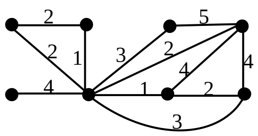
Вариант 9.



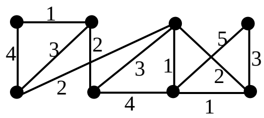
Вариант 10.



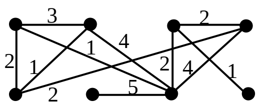
Вариант 11.



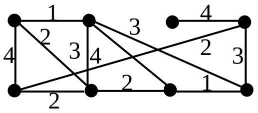
Вариант 12.



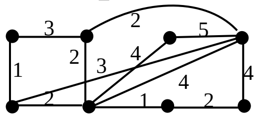
Вариант 13.



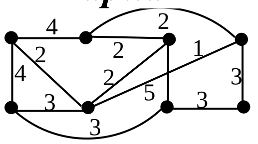
Вариант 14.



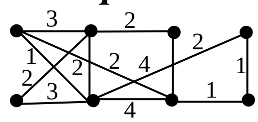
Вариант 15.



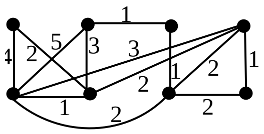
Вариант 16.



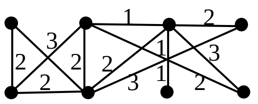
Вариант 17.



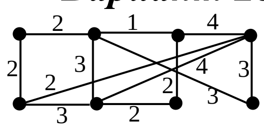
Вариант 18.



Вариант 19.



Вариант 20.



Задание 6.3. Для графа из Вашего варианта

1) постройте матрицу расстояний,

2) найдите радиус, диаметр, центр графа,

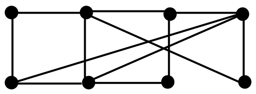
3) определите является ли граф Эйлеровым, если да, то постройте эйлеров цикл, используя алгоритм Флери.

4) определите является ли граф планарным, если да, то постройте его плоскую реализацию.

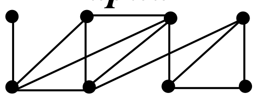
5) постройте остов методами поиска в ширину и в глубину,

6) найдите минимальную правильную раскраску вершин и ребер графа.

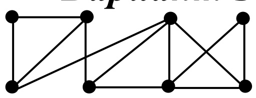
Вариант 1.



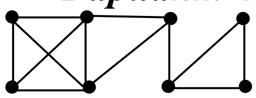
Вариант 2.



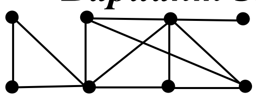
Вариант 3.



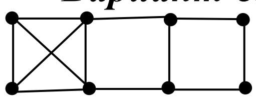
Вариант 4.



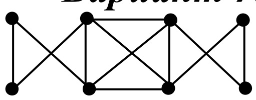
Вариант 5.



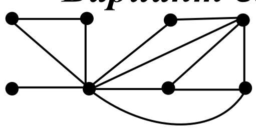
Вариант 6.



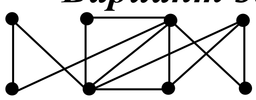
Вариант 7.



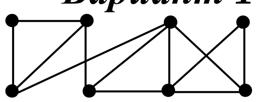
Вариант 8.



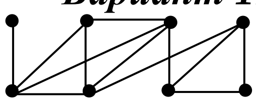
Вариант 9.



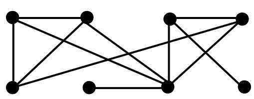
Вариант 10.



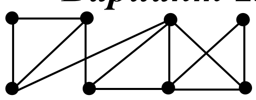
Вариант 11.



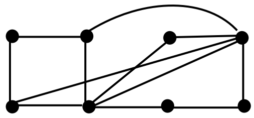
Вариант 12.



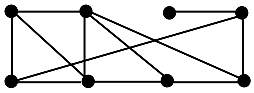
Вариант 13.



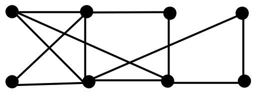
Вариант 14.



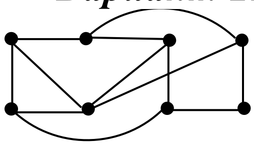
Вариант 15.



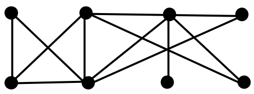
Вариант 16.



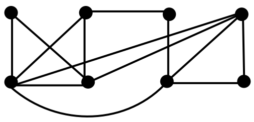
Вариант 17.



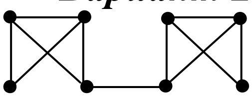
Вариант 18.



Вариант 19.



Вариант 20.



Задание 6.4. Дана матрица расстояний графа. Решить задачу коммивояжера методом ветвей и границ.

Вариант 1. $$W = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 4 & 7 \\ 5 & \infty & 5 & 4 & 5 & \infty & 5 & 4 \\ 6 & 5 & \infty & 6 & 6 & 5 & \infty & 5 \\ 4 & 4 & 5 & \infty & 5 & \infty & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 5 & \infty & 6 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 6 & 3 & \infty & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 6 & 6 & \infty & \infty & 6 \\ 4 & \infty & 5 & 7 & 5 & \infty & 5 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$\textbf{\textit{Вариант 2.}}\ W=\begin{bmatrix} \infty & 4 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 \\ 6 & \infty & 8 & 2 & 3 & \infty & 3 & 8 \\ 5 & 2 & \infty & 3 & 8 & 4 & 3 & 2 \\ \infty & 1 & 3 & \infty & 2 & 4 & \infty & 2 \\ 6 & 8 & 4 & 2 & \infty & \infty & 7 & 1 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & \infty & \infty & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 1 & 2 & \infty & 5 & \infty & 5 \\ 9 & 4 & \infty & 7 & 1 & \infty & 7 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$\textbf{\textit{Вариант 3.}}\ W=\begin{bmatrix} \infty & 1 & 3 & 6 & 4 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & \infty & 7 & 1 & \infty & \infty & 3 & 9 \\ 8 & 2 & \infty & 6 & 1 & 6 & 2 & \infty \\ 3 & 3 & 2 & \infty & 8 & 5 & \infty & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 2 & \infty & 9 & 8 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & \infty & 3 & \infty & 6 & 6 \\ 7 & 1 & 5 & 4 & 3 & \infty & \infty & 1 \\ 3 & \infty & 5 & 9 & 5 & \infty & 8 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$\textbf{\textit{Вариант 4.}}\ W=\begin{bmatrix} \infty & 2 & 4 & 5 & 4 & 6 & 4 & 7 \\ 5 & \infty & 5 & 4 & 5 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & \infty & 9 & 6 & 5 & \infty & 5 \\ 4 & 4 & \infty & \infty & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 6 & 5 & \infty & 6 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 6 & 3 & \infty & 5 & 5 \\ 9 & 5 & \infty & 6 & 6 & \infty & \infty & 6 \\ 4 & \infty & 5 & 7 & 5 & \infty & 5 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Вариант 5.}}\ W=\begin{bmatrix} \infty & 8 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 \\ 6 & \infty & 8 & 2 & 3 & 9 & \infty & 8 \\ 5 & 2 & \infty & 3 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ \infty & 5 & 3 & \infty & 2 & 3 & \infty & 2 \\ 6 & 8 & 4 & 2 & \infty & \infty & 7 & 1 \\ 7 & 7 & 3 & 2 & \infty & \infty & 1 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & \infty & 5 & \infty & 5 \\ 9 & 1 & \infty & 7 & 1 & \infty & 7 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Вариант 6.}}\ W=\begin{bmatrix} \infty & 1 & 3 & 6 & 4 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 5 & 9 \\ 8 & 6 & \infty & 6 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & \infty & 8 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & \infty & 9 & 8 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & \infty & 3 & \infty & 6 & 6 \\ 7 & 1 & 5 & 4 & 2 & \infty & \infty & 1 \\ 1 & \infty & 5 & 9 & 5 & \infty & 8 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Вариант 7.}}\ W=\begin{bmatrix} \infty & 7 & 4 & 5 & 4 & 6 & 4 & 7 \\ 5 & \infty & 5 & 4 & 5 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & \infty & 5 & 6 & 3 & \infty & 3 \\ 4 & 4 & \infty & \infty & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 5 & \infty & 6 & 5 & \infty & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 3 & \infty & 5 & 5 \\ 9 & 5 & 8 & 6 & 6 & \infty & \infty & 6 \\ 4 & \infty & 5 & 7 & 1 & \infty & 5 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Вариант 8.}}\ W = \begin{bmatrix} \infty & 8 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 \\ 6 & \infty & 2 & 2 & 3 & 5 & \infty & 8 \\ 5 & 2 & \infty & 3 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ \infty & 7 & 3 & \infty & 2 & 3 & \infty & 2 \\ 6 & 8 & 4 & 2 & \infty & 3 & 7 & 1 \\ 7 & \infty & 3 & 2 & \infty & \infty & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & \infty & 5 & \infty & 5 \\ 9 & 1 & \infty & 6 & 2 & \infty & 7 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Вариант 9.}}\ W = \begin{bmatrix} \infty & 1 & 3 & 6 & 4 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & \infty & 5 & 1 & \infty & \infty & 5 & 9 \\ 8 & 6 & \infty & 6 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & \infty & 8 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & \infty & 9 & 8 & 8 \\ 5 & 4 & 6 & \infty & 3 & \infty & 6 & 8 \\ 7 & 1 & 5 & 4 & 2 & \infty & \infty & 9 \\ 1 & \infty & 5 & 9 & 5 & \infty & 8 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Вариант 10.}}\ W = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 4 & 5 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & \infty & 3 & 4 & 5 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & \infty & 5 & 6 & 3 & \infty & 2 \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 5 & \infty & 7 & 5 & \infty & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 3 & \infty & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 9 & 6 & 1 & \infty & 6 \\ 4 & \infty & 5 & 7 & 4 & \infty & 5 & \infty \end{bmatrix}$$

Вариант 11. $W = \begin{bmatrix} \infty & 8 & 7 & 4 & 3 & 4 & 1 & 9 \\ 6 & \infty & 8 & 2 & 3 & 5 & \infty & 8 \\ 5 & 2 & \infty & 3 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ \infty & 7 & 3 & \infty & 5 & 3 & \infty & 2 \\ 6 & 8 & 9 & 2 & \infty & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & \infty & 5 & \infty & 5 \\ 9 & 3 & \infty & 6 & 2 & \infty & 7 & \infty \end{bmatrix}$

Вариант 12. $W = \begin{bmatrix} \infty & 1 & 3 & 6 & 4 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & \infty & 5 & 7 & \infty & \infty & 5 & 2 \\ 1 & 6 & \infty & 6 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & \infty & 8 & \infty & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 3 & 2 & \infty & 9 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 3 & \infty & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 9 & 4 & 2 & \infty & \infty & 9 \\ 1 & \infty & 5 & 9 & 5 & \infty & 8 & \infty \end{bmatrix}$

Вариант 13. $W = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 & 4 & 7 \\ 5 & \infty & 3 & 4 & 4 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & \infty & 9 & 6 & 5 & \infty & 2 \\ 1 & \infty & 4 & \infty & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & \infty & 7 & 5 & \infty & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & \infty & 4 & 3 & \infty & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 9 & 6 & 1 & \infty & 3 \\ 4 & \infty & 6 & 7 & 4 & \infty & 5 & \infty \end{bmatrix}$

$$\textbf{\textit{Вариант 14.}}\ W = \begin{bmatrix} \infty & 8 & 7 & 4 & 1 & 4 & 1 & 9 \\ 6 & \infty & 2 & 2 & 3 & 5 & \infty & 8 \\ 5 & 2 & \infty & 3 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ \infty & 7 & 4 & \infty & 5 & 3 & \infty & 2 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & \infty & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 6 & 1 & \infty & \infty & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 2 & \infty & 5 & \infty & 9 \\ 9 & \infty & \infty & 6 & 2 & \infty & 2 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Вариант 15.}}\ W = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 3 & 6 & 4 & 3 & 23 & 9 \\ 2 & \infty & 5 & 7 & \infty & 8 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & \infty & 6 & 1 & 6 & 6 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & \infty & 5 & \infty & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & \infty & 9 & 2 & 8 \\ 5 & 9 & 6 & 3 & 3 & \infty & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 2 & 4 & 2 & \infty & \infty & 9 \\ 1 & \infty & 5 & 9 & 5 & \infty & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Вариант 16.}}\ W = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 2 & 6 & 8 & 6 & 4 & 7 \\ 5 & \infty & 3 & 4 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & 7 & \infty & 9 & 6 & 5 & \infty & 2 \\ 1 & 4 & 4 & \infty & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & \infty & 7 & 1 & \infty & 6 & \infty & 4 \\ 7 & 1 & \infty & 4 & 6 & \infty & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 6 & 1 & \infty & 3 \\ 4 & \infty & 6 & 7 & 9 & \infty & 5 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Вариант 17.}}\ W = \begin{bmatrix} \infty & 8 & 7 & 4 & 1 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & \infty & 2 & 2 & 3 & 5 & \infty & 8 \\ 5 & 2 & \infty & 3 & 1 & 7 & \infty & 6 \\ \infty & 7 & 4 & \infty & 5 & 5 & \infty & 2 \\ 5 & 9 & 9 & 2 & \infty & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & \infty & \infty & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & \infty & 1 & \infty & 9 \\ 7 & \infty & 3 & 6 & 2 & \infty & 2 & \infty \end{bmatrix}$$

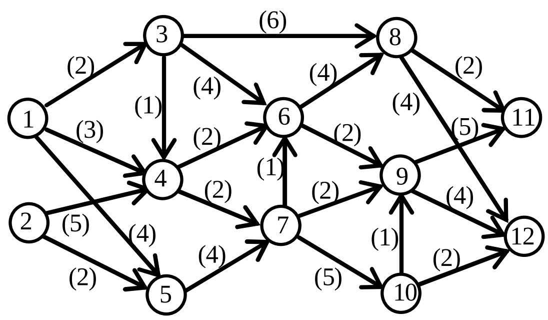
$$\textbf{\textit{Вариант 18.}}\ W = \begin{bmatrix} \infty & 4 & 3 & 6 & 4 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & \infty & 5 & 7 & \infty & 8 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & \infty & 9 & 1 & 6 & 6 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & \infty & 5 & \infty & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & \infty & 6 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 3 & 1 & 3 & \infty & 8 & 8 \\ 7 & 5 & 5 & 4 & 2 & 1 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 5 & 9 & 5 & \infty & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Вариант 19.}}\ W = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 2 & 6 & 8 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & \infty & 2 & 4 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & 7 & \infty & 3 & 6 & 5 & \infty & 2 \\ 1 & 4 & 5 & \infty & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 7 & 1 & \infty & 6 & \infty & 4 \\ 7 & 1 & \infty & \infty & 6 & \infty & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 6 & 1 & \infty & 5 \\ 4 & \infty & 6 & 6 & 9 & \infty & 5 & \infty \end{bmatrix}$$

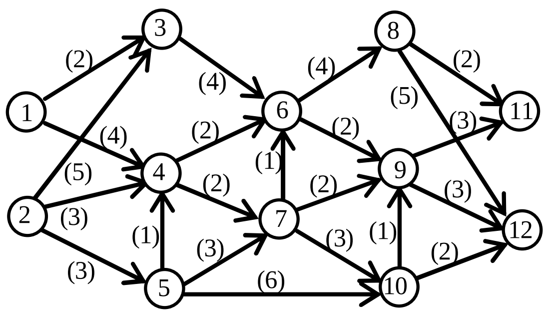
$$\textbf{\textit{Вариант 20.}}\ W = \begin{bmatrix} \infty & 8 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & \infty & 2 & 1 & 3 & 5 & \infty & 8 \\ 5 & 2 & \infty & 3 & 3 & 7 & \infty & 6 \\ \infty & 7 & 4 & \infty & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & \infty & 9 & 2 & \infty & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 5 & \infty & \infty & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 7 & 2 & \infty & 1 & \infty & 8 \\ 7 & \infty & 9 & 6 & 2 & \infty & 2 & \infty \end{bmatrix}$$

Задание 6.5. Вычислить кратчайший маршрут из 1 в 12, используя алгоритм Форда-Беллмана.

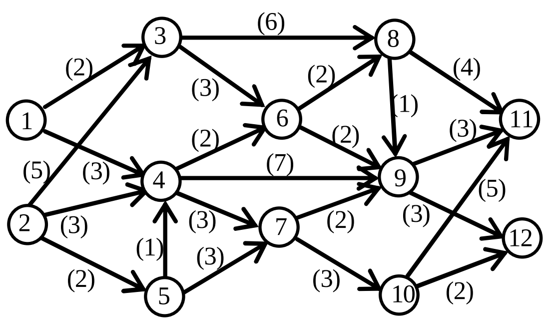
Вариант 1.



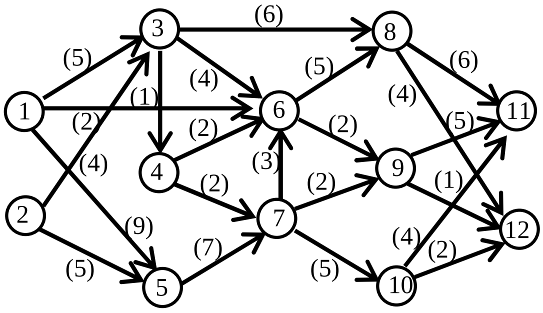
Вариант 2.



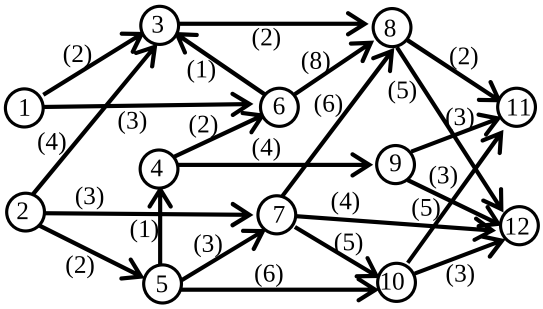
Вариант 3.



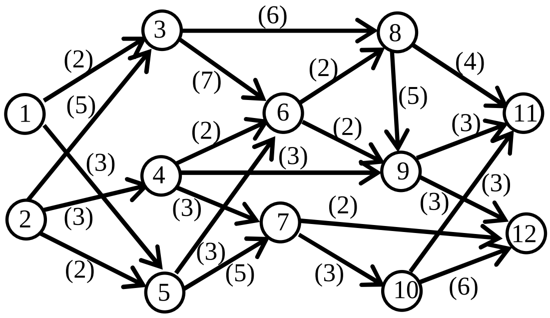
Вариант 4.



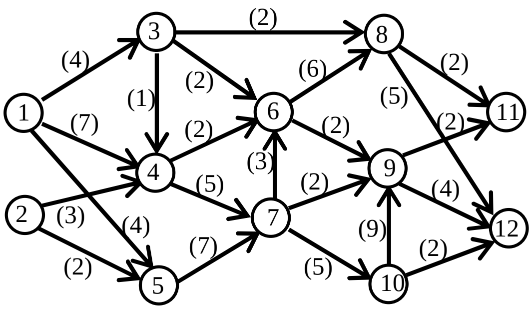
Вариант 5.



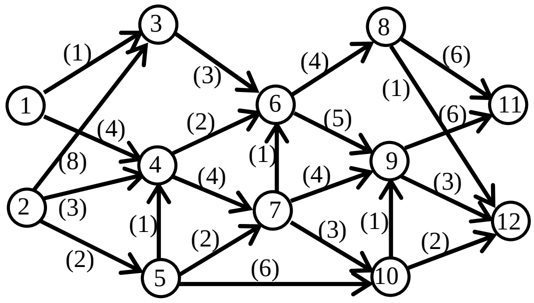
Вариант 6.



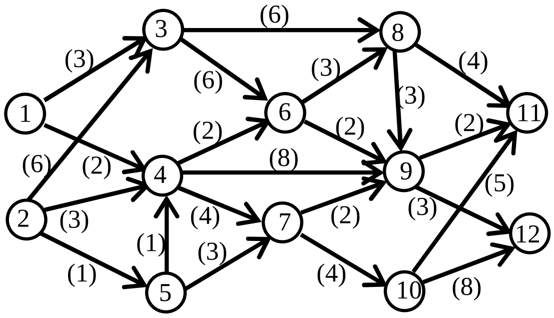
Вариант 7.



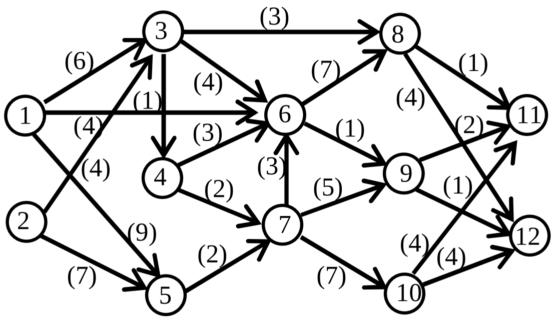
Вариант 8.



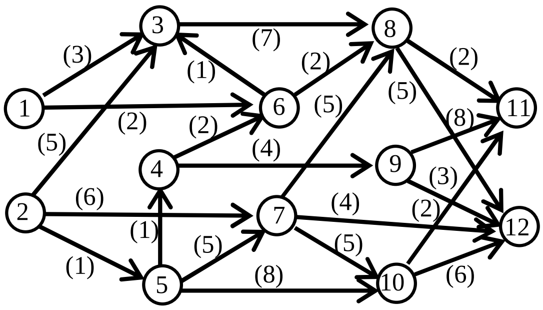
Вариант 9.



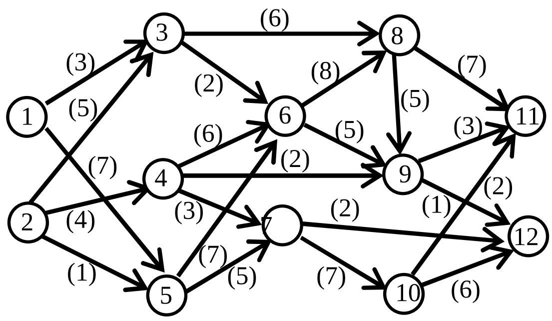
Вариант 10.



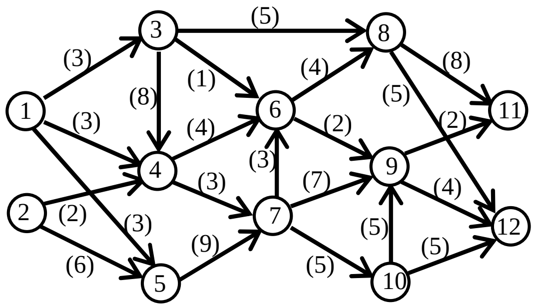
Вариант 11.



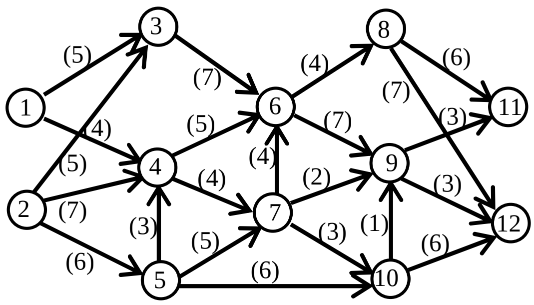
Вариант 12.



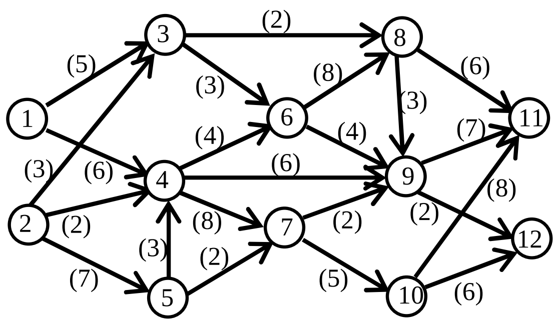
Вариант 13.



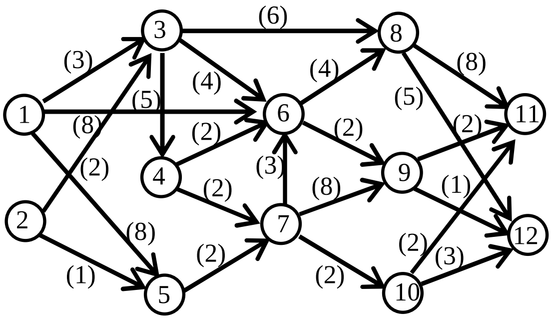
Вариант 14.



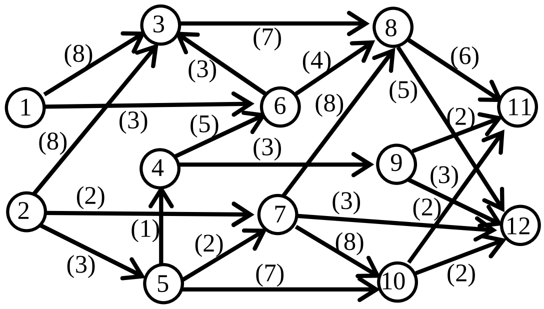
Вариант 15.



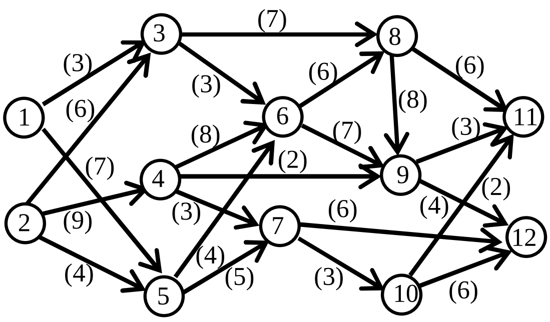
Вариант 16.



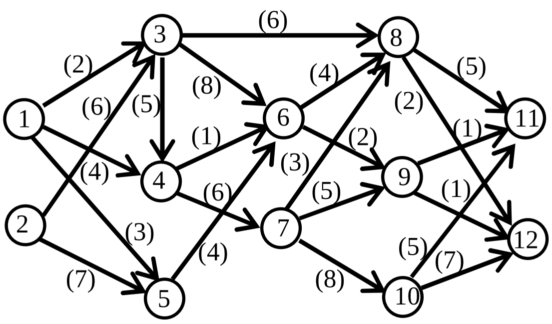
Вариант 17.



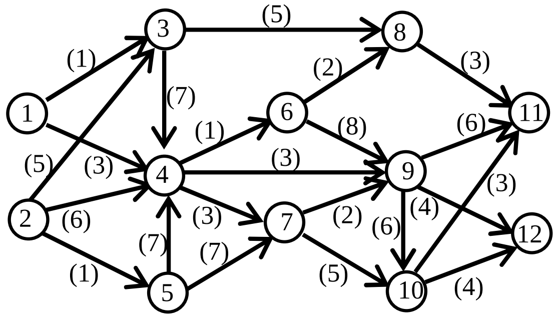
Вариант 18.



Вариант 19.

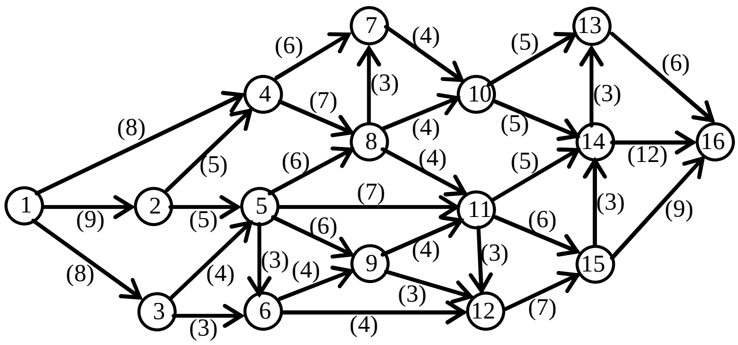


Вариант 20.

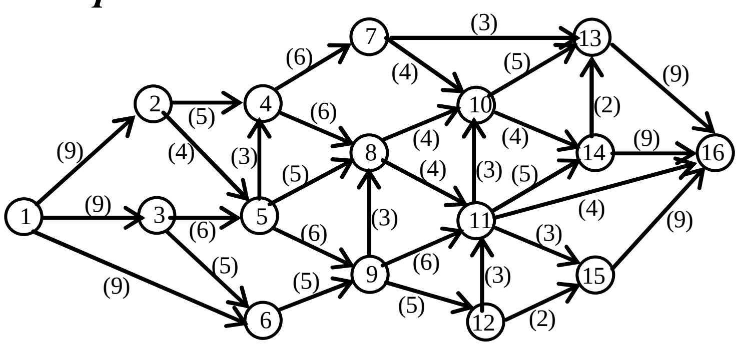


Задание 6.6. Вычислить максимальный поток, используя алгоритм Форда-Фалкерсона.

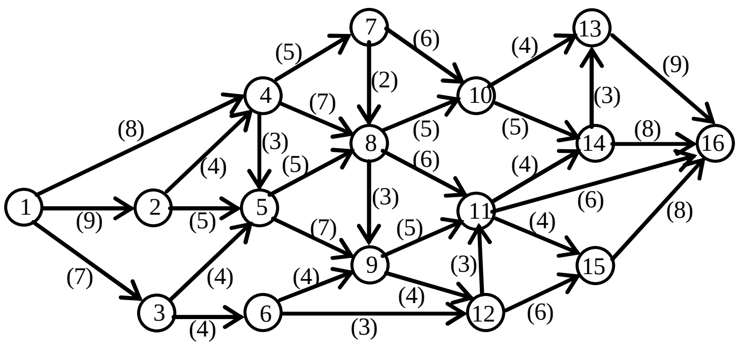
Вариант 1.



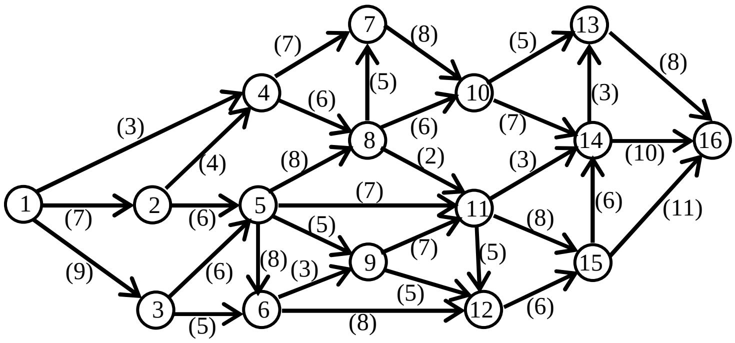
Вариант 2.



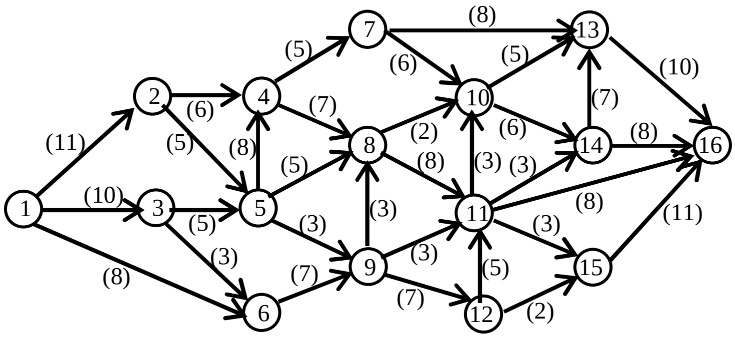
Вариант 3.



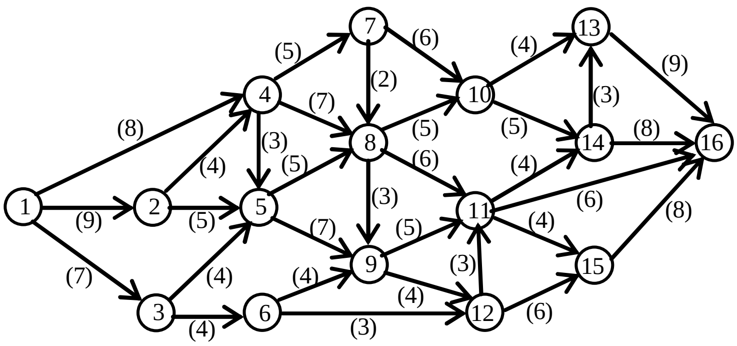
Вариант 4.



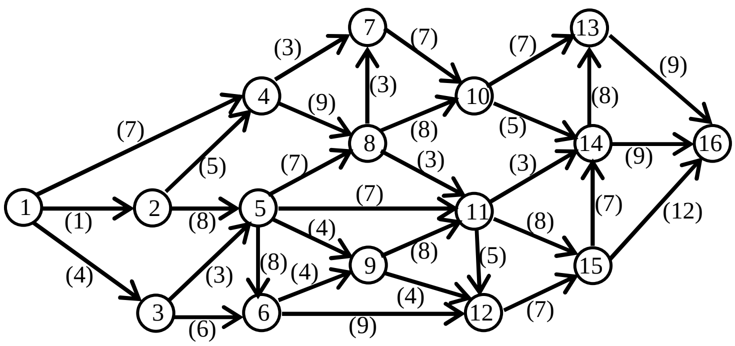
Вариант 5.



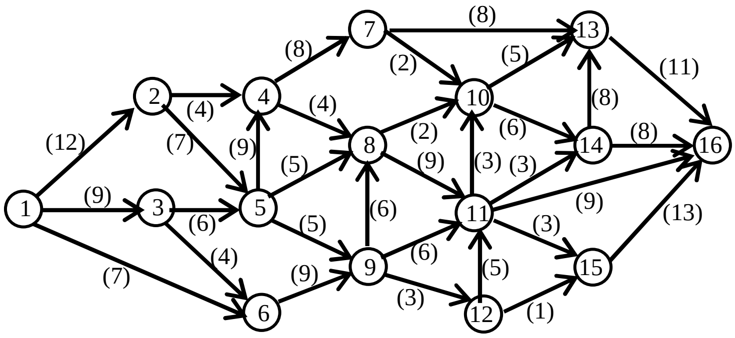
Вариант 6.



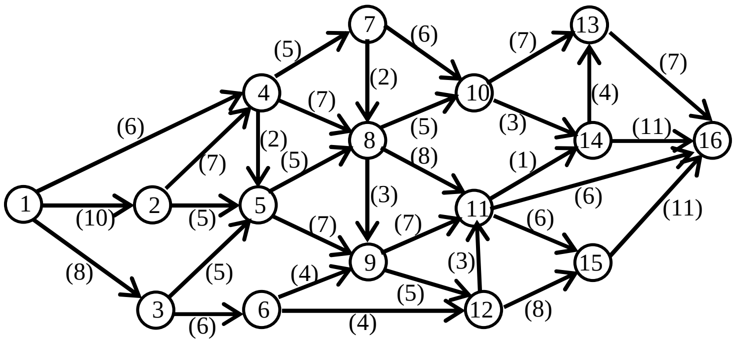
Вариант 7.



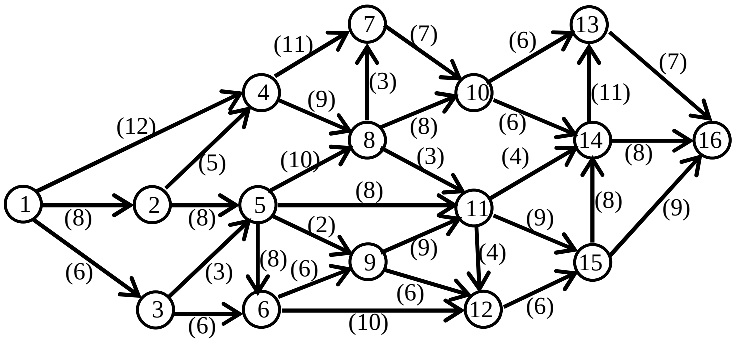
Вариант 8.



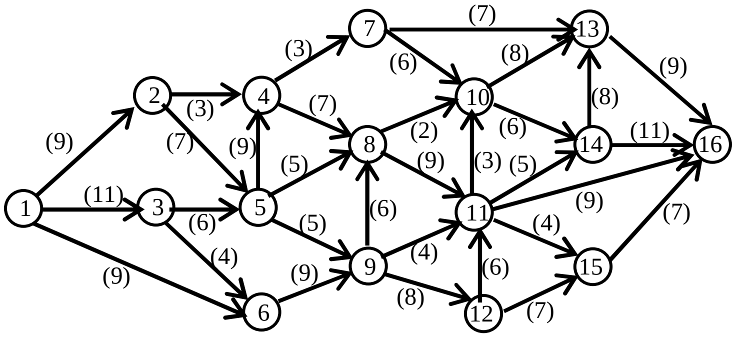
Вариант 9.



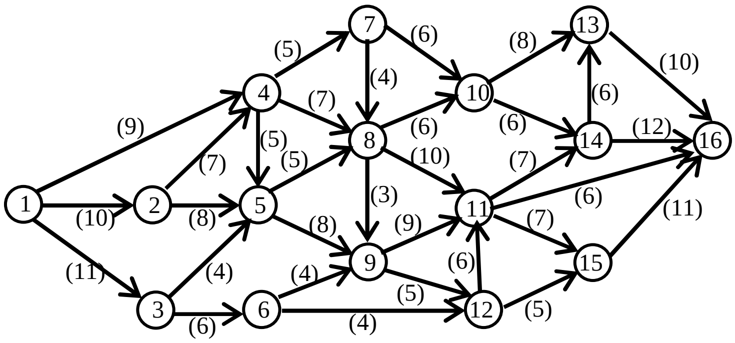
Вариант 10.



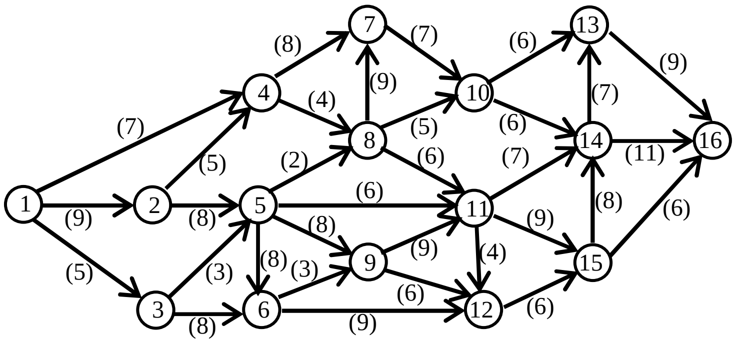
Вариант 11.



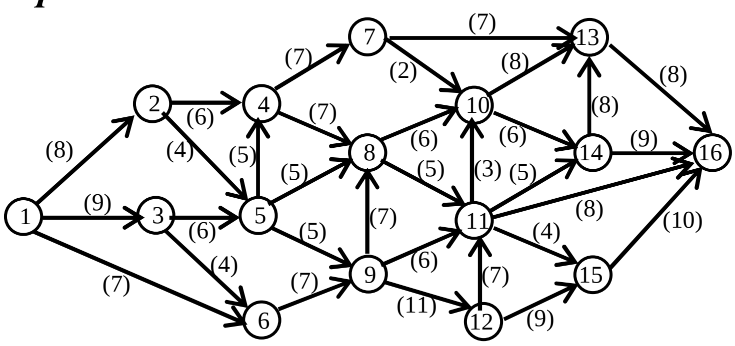
Вариант 12.



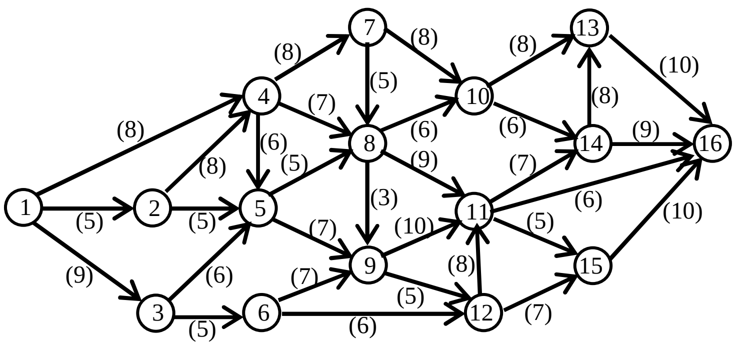
Вариант 13.



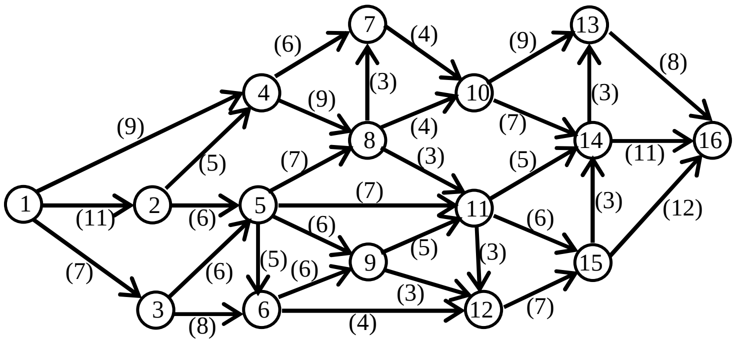
Вариант 14.



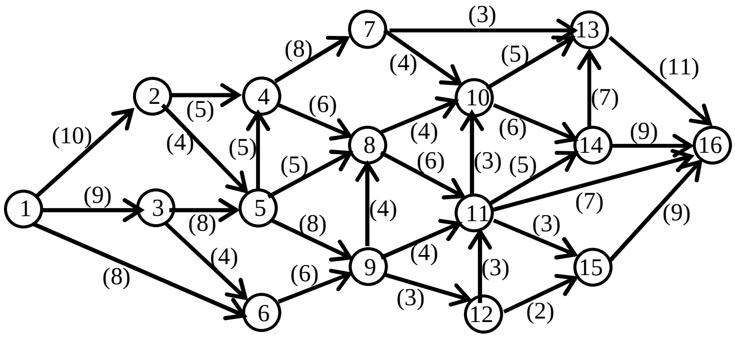
Вариант 15.



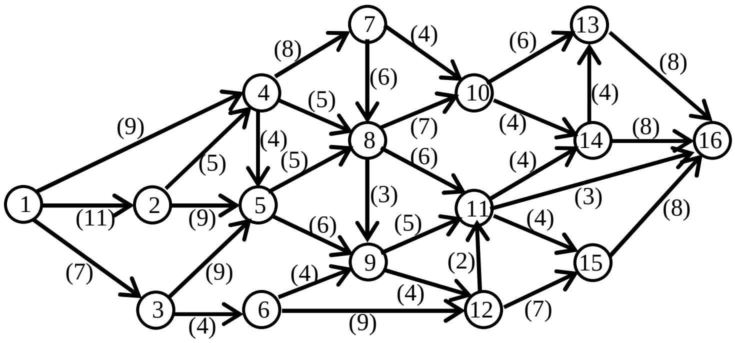
Вариант 16.



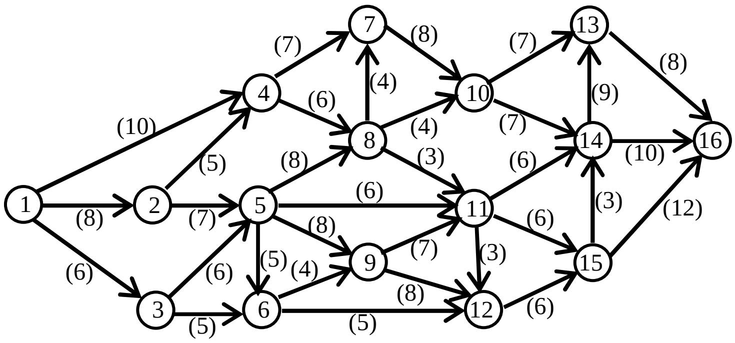
Вариант 17.



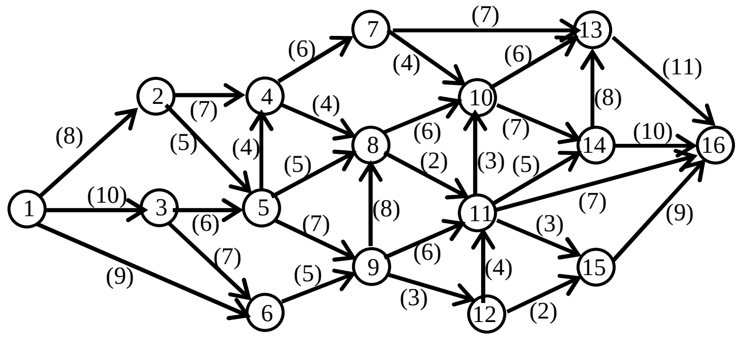
Вариант 18.



Вариант 19.

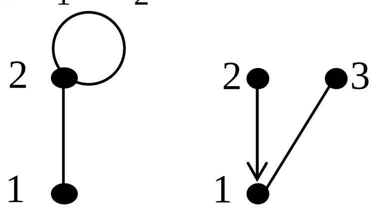


Вариант 20.



6.2 Методические указания к выполнению индивидуального задания № 6

Задание 6.1. Даны графы G_1 и G_2. Задайте их структурами смежности, матрицами смежности, матрицами инцидентности и списками ребер. Представьте в геометрической и матричных формах графы $G_1 \bigcup G_2$, $G_1 \bigcap G_2$, $G_1 \oplus G_2$, $G_1 \times G_2$.



G_1 $\qquad\qquad$ G_2

Решение.

Структуры смежности заданных графов:

$C_{G_1} =$

1	2
2	1 2

$C_{G_2} =$

1	2	3
3	1	1

Матрицы смежности заданных графов:

$$A_{G_1} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_{G_2} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Матрицы инцидентности заданных графов:

$$B_{G_1} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B_{G_2} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} (2,1) & (1,3) & (3,1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$r_{G_1} = (1, 2, 2)$ $\qquad\qquad$ $r_{G_2} = (2, 1, 3)$

$t_{G_1} = (2, 1, 2)$ $\qquad\qquad$ $t_{G_2} = (1, 3, 1)$

Выполним операции над графами:

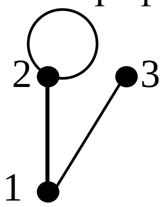
Для построения графа $G_1 \bigcup G_2$ объединяем множества вершин заданных графов:

$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) = \{1,2\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$ и множества ребер:

$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) = \{(1,2),(2,1),(2,2)\} \cup \{(1,3),(2,1),(3,1)\} =$

$= \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$

Геометрическая форма графа, соответствующего объединению заданных графов:

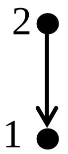


Для построения графа $G_1 \cap G_2$ пересекаем множества вершин заданных графов:

$V(G_1 \cap G_2) = V(G_1) \cap V(G_2) = \{1,2\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2\}$ и множества ребер:

$E(G_1 \cap G_2) = E(G_1) \cap E(G_2) = \{(1,2),(2,1),(2,2)\} \cap \{(1,3),(2,1),(3,1)\} = \{(2,1)\}$.

Геометрическая форма графа, соответствующего пересечению заданных графов:



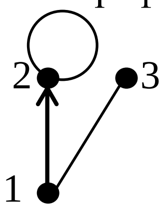
Для построения графа $G_1 \oplus G_2$ объединяем множества вершин заданных графов:

$V(G_1 \oplus G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) = \{1,2\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$, для множеств ребер составляем кольцевую сумму:

$E(G_1 \oplus G_2) = E(G_1) \oplus E(G_2) = \{(1,2),(2,1),(2,2)\} \oplus \{(1,3),(2,1),(3,1)\} =$

$= \{(1,2),(2,2),(1,3),(3,1)\}$

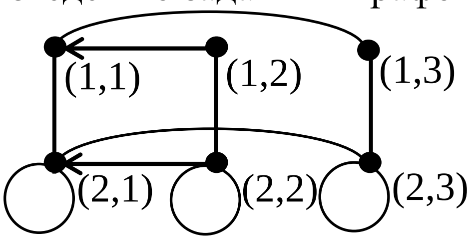
Геометрическая форма графа, соответствующего кольцевой сумме заданных графов:



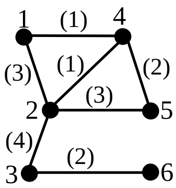
Для построения графа $G_1 \times G_2$ составляем прямое произведение множеств вершин заданных графов:

$V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2) = \{1,2\} \times \{1,2,3\} =$
$= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$,
множество ребер составляем по правилу:
$\left((a_i, b_j),(a_k, b_l)\right) \in E(G_1 \times G_2) \Leftrightarrow$
или $(a_i, a_k) \in E(G_1), b_j = b_l$ или $(b_j, b_l) \in E(G_2), a_i = a_k$.

Геометрическая форма графа, соответствующего прямому произведению заданных графов:



Задание 6.2. Найдите остов минимального веса для графа



используя алгоритм Краскала и алгоритм Прима.

Решение.

1) Применим алгоритм Краскала.

1.1) Вычислим число шагов алгоритма: число ребер m=9, вершин n=6, компонент связности c=1, тогда цикломатическое число графа $\nu(G) = m - n + c = 7 - 6 + 1 = 2$, то есть для получения остова нужно удалить два ребра. Следовательно, необходимо построить $k = m - \nu(G) = 7 - 2 = 5$ ребер.

Для удобства упорядочим ребра по возрастанию весов: {(1,4), (2,4), (4,5), (3,6), (1,2), (2,5), (2,3)}.

Строим граф $T_1(V,(1,4))$ (рисунок 6.1а).

1.2) К графу T_1 добавляем следующее по весу ребро (2,4). Получаем граф T_2 (рисунок 6.1б).

1.3-1.4) К графу T_2 добавляем последовательно ребра (4,5) и (3,6) получаем графы T_3 и T_4 (рисунки 6.1в,г).

1.5) Ребра (1,2) и (2,5) весом 3 добавить к графу T_4 нельзя, так как в результате образуются циклы. Поэтому добавляем ребро (2,3) и получаем граф T_5, который и является остовом наименьшего веса исходного графа (рисунок 6.1д). $\omega(T_5) = \omega(1,4) + \omega(2,4) + \omega(2,3) + \omega(4,5) + \omega(3,6) =$
$= 1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 10$.

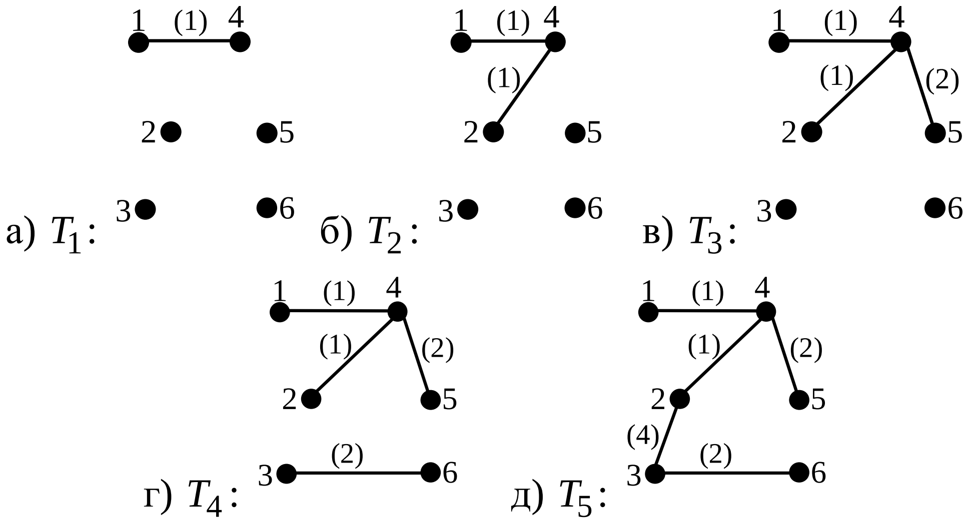


Рисунок 6.1 – Пошаговое применение алгоритма Краскала

2) Применим алгоритм Прима.

2.1) Как и в предыдущем случае необходимо построить 5 ребер. Все ребра упорядочим по возрастанию весов: {(1,4), (2,4), (4,5), (3,6), (1,2), (2,5), (2,3)}.

Строим граф $T_1\left(\{1,4\},(1,4)\right)$ (рисунок 6.2а).

2.2) Согласно алгоритму на этом шаге для построения нужно выбрать ребро наименьшего веса из множества ребер: {(2,4), (4,5), (1,2)}. Это ребро (2,4). Строим его и получаем граф T_2 (рисунок 6.2б).

2.3) К графу T_2 нужно добавить ребро наименьшего веса из множества ребер: {(4,5), (2,5), (2,3)}. Это ребро (4,5), его и получаем граф T_3 (рисунок 6.2в).

2.4) К графу T_3, аналогично рассуждая, добавляем ребро (2,3), получаем граф T_4 (рисунок 6.2г).

2.5) К графу T_4 добавляем ребро (3,6) и получаем граф T_5, который и является остовом наименьшего веса исходного графа (рисунок 6.2д). $\omega(T_5)$=10.

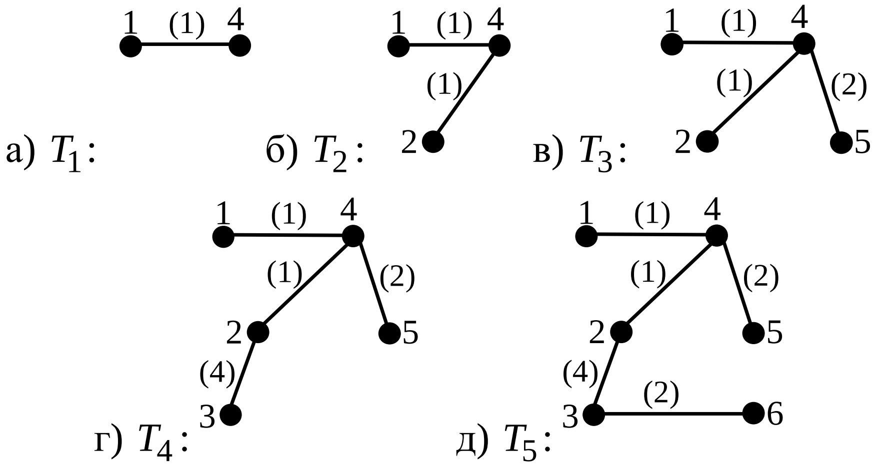
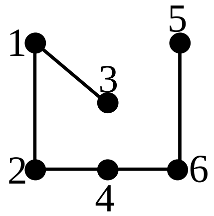


Рисунок 6.2 – Пошаговое применение алгоритма Прима

Задание 6.3.

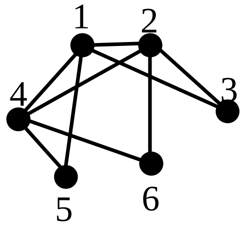
Для графа



1) постройте матрицу расстояний,

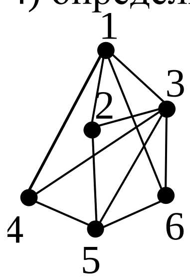
2) найдите радиус, диаметр, центр графа,

3) Определите является ли граф



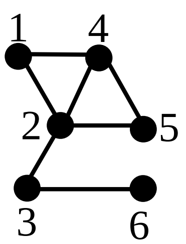
Эйлеровым, если да, то постройте эйлеров цикл, используя алгоритм Флери.

4) определите является ли граф планарным



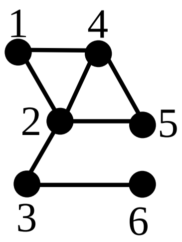
если да, то постройте его плоскую реализацию.

5) Для графа



постройте остов методами поиска в ширину и в глубину,

6) найдите минимальную правильную раскраску вершин и ребер графа



Решение.

1) Матрица расстояний графа $P_G = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}$

2) Для определения радиуса и диаметра вычислим эксцентриситеты вершин графа: $e(1) = 4$, $e(2) = 3$, $e(3) = 5$, $e(4) = 3$, $e(5) = 5$, $e(6) = 4$. Тогда $diam(G) = 5$, $r(G) = 3$. Центр графа G: {2,4}.

3) Граф является эйлеровым, так как степени всех его вершин четны.

Алгоритм Флёри построения эйлерова цикла:

- Выбираем произвольную вершину и произвольному ребру, ей инцидентному присваиваем номер 1 – считаем его пройденным.

- Находясь в очередной вершине не выбираем занумерованное ребро. Выбираем ребро, являющееся мостом (ребро, при удалении которого нарушается связность графа) или инцидентное начальной вершине, только если нет других возможностей.

Применим алгоритм:

- Начнем обход с вершины 1. Первым пройдем ребро (1,2). Удаляем его из графа, переходим к следующему шагу. Рисунок 6.3б.

- Находимся в вершине 2. Пройдем по ребру (2,3). Удаляем его из графа, переходим к следующему шагу. Рисунок 6.3в.

- Находимся в вершине 3. Существует единственный вариант дальнейшего обхода по ребру (3,1). Удаляем его из графа, переходим к следующему шагу. Рисунок 6.3г.

- Находимся в вершине 1. Пройдем по ребру (1,4). Удаляем его из графа, переходим к следующему шагу. Рисунок 6.3д.

- Находимся в вершине 4. Ребро (4,5) является мостом, поэтому пройдем по ребру (4,2). Удаляем его из графа, переходим к следующему шагу. Рисунок 6.3е.

- Находимся в вершине 2. Ребро (2,6) является мостом, но других вариантов нет. Удаляем его из графа, переходим к следующему шагу. Рисунок 6.3ж.

- Находимся в вершине 6. Далее все ребра в обходе будут мостами, но других вариантов не осталось. Удаляем из графа поочередно ребра (6,4), (4,5), (5,1).

Итак, все ребра пройдены. Эйлеров цикл:

(1,2), (2,3), (3,1), (1,4), (4,2), (2,6), (6,4), (4,5), (5,1).

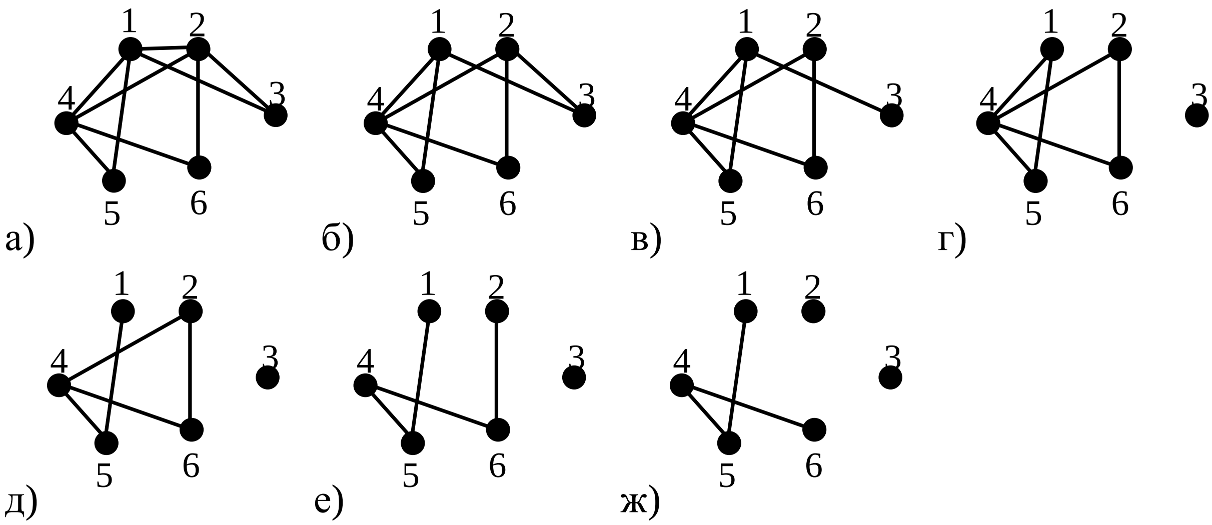


Рисунок 6.3 – Построение эйлерова цикла.

4) Граф является планарным. На рисунке 6.4 изображена его геометрическая реализация.

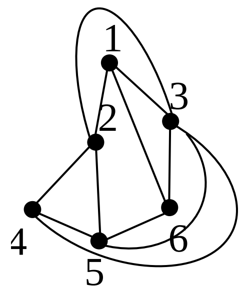


Рисунок 6.4 – Плоская геометрическая реализация графа.

5) Обходы удобно проводить, используя структуру смежности:

C=

1	2	3	4	5	6
2 4	1 3 4 5	2 6	1 2 5	2 4	3

5.1) Строим остов обходом в глубину:

5.1.1) В качестве начальной возьмем вершину 1 (рисунок 6.5а).

5.1.2) По структуре смежности выбираем вершину, смежную вершине 1 – это вершина 2 (рисунок 6.5б).

По структуре смежности выбираем вершину, смежную вершине 2 – это вершина 3 (рисунок 6.5б), и так далее (см. рисунки 6.5в,г).

Для вершины 6 не найдется еще не выбранной смежной вершины, поэтому возвращаемся последовательно сначала к вершине 3 – для нее так же не найдется еще не выбранной смежной вершины, а затем к вершине 2, из которой доступна вершина 5 (рисунок 6.5д).

Из вершины 5 переходим в смежную ей вершину 4.

5.1.3) Повторяя п.5.1.2) для вершины 6, возвращаемся в вершину 1 и заканчиваем обход.

Остов графа, полученный после обхода вершин в глубину, изображен на рисунке 6.5е).

5.2) Строим остов обходом в ширину.

5.2.1) В качестве начальной возьмем вершину 1 (рисунок 6.6а).

5.2.2) По структуре смежности выбираем все вершины, смежные вершине 1 – это вершины 2 и 4 (рисунок 6.6б).

Начинаем последовательно рассматривать эти вершины, выбирая все смежные для них. После обхода вершины 2 к дереву добавляются вершины 3 и 5 (рисунок 6.6в). Обход вершины 4 не добавляет к дереву никаких вершин, так как еще не рассмотренных смежных ей вершин не осталось.

Продолжаем рассматривать выбранные вершины. Обход вершины 3 добавляет к дереву смежную ей вершину 6 (рисунок 6.6г). Обход вершины 5, не добавляет к дереву никаких вершин, так как еще не рассмотренных смежных ей вершин не осталось.

На последнем этапе рассматриваем вершину 6 и ввиду отсутствия еще нерассмотренных смежных ей вершин заканчиваем работу алгоритма.

Остов графа, полученный после обхода вершин в ширину, изображен на рисунке 6.6г).

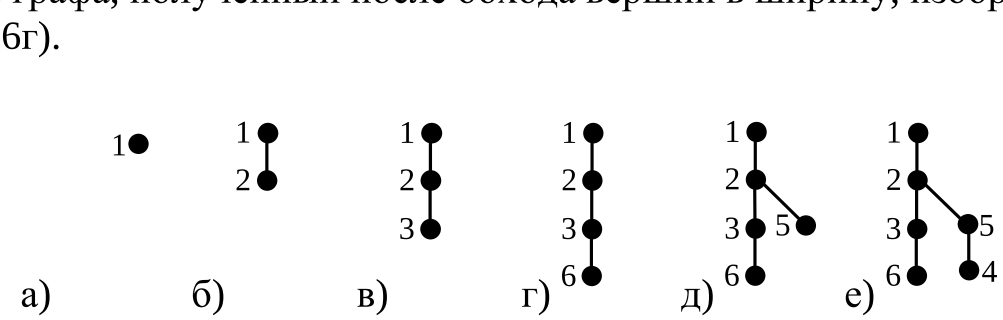


Рисунок 6.5 – пошаговое применение алгоритма поиска в глубину

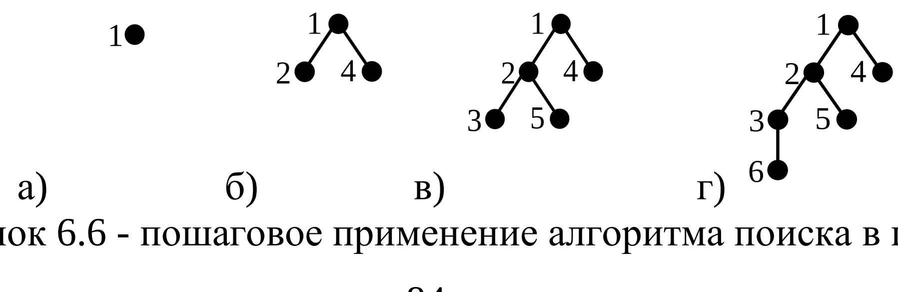


Рисунок 6.6 - пошаговое применение алгоритма поиска в ширину

6) Применим алгоритм последовательного раскрашивания.

6.1) Алгоритм для вершинной раскраски.

6.1.1.) упорядочим вершины графа по возрастанию их степеней: (2,4,1,5,3,6) и раскрасим вершину 2 в 1-ый цвет,

6.1.2) раскрасим вершину 4 в цвет номер 2 (цвет номер 1 использовать нельзя, так как вершина 2, смежная вершине 4, уже покрашена в цвет номер 1),

6.1.3) раскрасим вершину 1 в цвет номер 3 (цвета 1 и 2 уже использованы для раскраски смежных ей вершин),

6.1.4) вершину 5 раскрасим в цвет номер 3 (цвета 1 и 2 уже использованы для раскраски смежных ей вершин),

6.1.5) вершину 3 раскрасим в цвет номер 2, так как цвет номер 1 использован для смежной вершины,

6.1.6) вершину номер 6 раскрасим в цвет номер 1.

Итак, граф 3-раскрашиваем, то есть $\chi(G)$=3. Вершинная раскраска изображена на рисунке 6.7а).

6.2) Для построения реберной раскраски построим реберный граф, заменив ребра на вершины, а вершины на ребра. Вершины реберного графа раскрасим аналогично, используя алгоритм последовательного раскрашивания (рисунок 6.7б).

На рисунке 6.7в изображена раскраска ребер заданного графа.

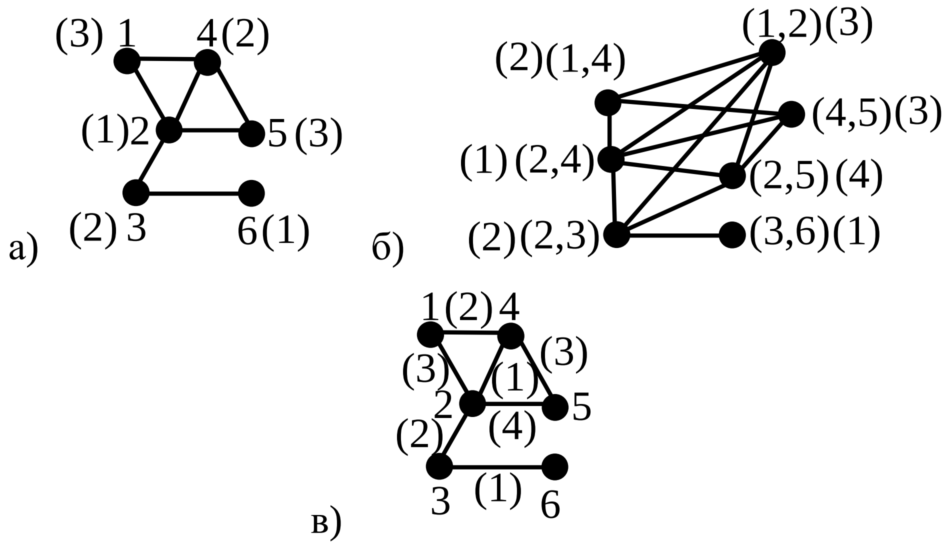


Рисунок 6.7 – Раскраска графа:
а) вершинная раскраска, б) реберный граф $L(G)$ и его вершинная раскраска, в) раскраска ребер графа G, соответствующая вершинной раскраске реберного графа $L(G)$.

Задание 6.4. Дана матрица расстояний графа.

$$
\begin{array}{c} \\ W = \end{array}
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\!\!\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\infty & 2 & 7 & 1 \\
3 & \infty & \infty & 4 \\
2 & 1 & \infty & 0 \\
4 & \infty & 8 & \infty
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Решить задачу коммивояжера методом ветвей и границ.

Решение.

Шаг 1) Рассчитываем нижнюю оценку весов всех гамильтоновых циклов графа. Минимальные элементы строк матрицы W: $w_{14}=1$, $w_{21}=3$, $w_{34}=0$, $w_{41}=4$. Из элементов каждой строки вычтем соответствующие минимальные элементы, получим матрицу:

$$
W^* = \begin{pmatrix}
\infty & 1 & 6 & 0 \\
0 & \infty & \infty & 1 \\
2 & 1 & \infty & 0 \\
0 & \infty & 4 & \infty
\end{pmatrix}.
$$

Минимальные элементы столбцов матрицы W^*: $w^*_{21}=0$, $w^*_{12}=1$, $w^*_{43}=4$, $w^*_{14}=0$. Из элементов каждого столбца матрицы W^* вычтем соответствующие минимальные элементы, получим матрицу:

$$
W^{**} = \begin{pmatrix}
\infty & 0 & 2 & 0 \\
0 & \infty & \infty & 1 \\
2 & 0 & \infty & 0 \\
0 & \infty & 0 & \infty
\end{pmatrix}.
$$

Итак, $H=1+3+0+4+0+1+4+0=13$.

Помещаем $H=13$ в вершину дерева решений (рисунок 6.8) и переходим к шагу 2).

Шаг 2) Будем строить решение из вершины 1. Выбираем ребро наименьшего веса (0 в первой строке матрицы W^{**}) – это ребро (1,2). Разобьем все множество гамильтоновых циклов на два подмножества: $C_{(1,2)}$ - содержащих ребро (1,2) и $C_{\neg(1,2)}$ - не содержащих это ребро (рисунок 6.8).

Для оценки веса подмножества $C_{(1,2)}$, исключаем из матрицы W^{**} строку 1 и столбец 2, на место первой строки помещаем вторую, а также заменяем элемент w^{**}_{21} на ∞, получаем:

$$W_1 = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & \infty & 1 \\ 2 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

Повторив **шаг 1)** для матрицы W_1, рассчитываем искомую оценку $h_1 = H + 1$=14 (так как в первой строке для получения нуля понадобилось вычесть из каждого элемента единицу). Приведенная матрица

$$W_1^{**} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 \\ 2 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для оценки веса подмножества $C_{\neg(1,2)}$ в матрице W^{**} заменим элемент w_{12}^{**} на ∞, получаем:

$$W_2 = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

Повторив **шаг 1)** для матрицы W_2, рассчитываем искомую оценку $h_1 = H$=13 (так как в каждой строке и в каждом столбце есть нули). Приведенная матрица $W_2^{**} = W_2$.

Следовательно, выбираем подмножество циклов $C_{\neg(1,2)}$. Переходим на шаг 2) с матрицей W_2^{**}.

Шаг 2) Выбираем ребро наименьшего веса (0 в первой строке матрицы W_2) – это ребро (1,4).

Разобьем все множество гамильтоновых циклов на два подмножества: $C_{(1,4)}$ и $C_{\neg(1,4)}$ (рисунок 6.8).

Для оценки веса подмножества $C_{(1,4)}$, исключаем из матрицы W_2^{**} строку 1 и столбец 4, на место первой строки помещаем четвертую, а также заменяем элемент w_{41}^{**} на ∞, получаем:

$$W_{11}=\begin{array}{c} \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

Повторив **шаг 1)** для матрицы W_1 , рассчитываем искомую оценку $h_1 = H$ =13 (так как в каждой строке и в каждом столбце есть нули). Приведенная матрица $W_{11}^{**} = W_{11}$.

Следовательно, выбираем подмножество циклов $C_{(1,4)}$. Проводить оценку циклов $C_{\neg(1,4)}$ нет смысла. Переходим на шаг 2) с матрицей W_{11}^{**}.

Шаг 2) Выбираем ребро наименьшего веса (0 в первой строке матрицы W_{11}^{**}) – это ребро (4,3).

Разобьем все множество гамильтоновых циклов на два подмножества: $C_{(1,4)(4,3)}$ и $C_{(1,4)\neg(4,3)}$ (рисунок 6.8).

Для оценки веса подмножества $C_{(1,4)(4,3)}$, исключаем из матрицы W_{11}^{**} строку 4 и столбец 3, на место первой строки помещаем третью, а также заменяем элемент w_{31}^{**} на ∞, получаем:

$$W_{111}=\begin{array}{c} \\ 3 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

Повторив **шаг 1)** для матрицы W_{111}, рассчитываем искомую оценку $h_{111} = h_{11} + 0 = 13$. Следовательно, выбираем подмножество циклов $C_{(1,4)(4,3)}$. Проводить оценку циклов $C_{(1,4)\neg(4,3)}$ нет смысла. Переходим на шаг 2) с матрицей $W_{111}^{**} = W_{111}$.

Очевидно, что последними ребрами цикла будут оставшиеся ребра (3,2) и (2,1).

Итак, гамильтонов цикл наименьшего веса $h = 13$ состоит из ребер {(1,4), (4,3), (3,2), (2,1)}.

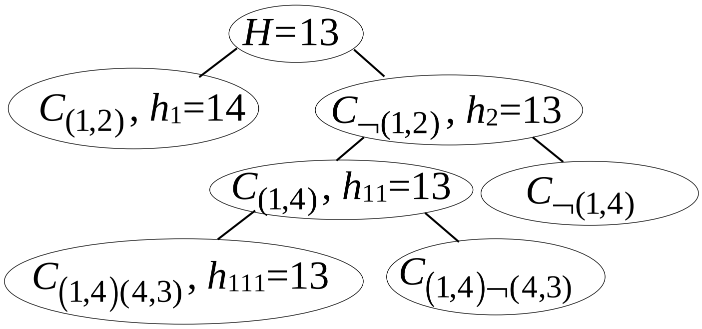
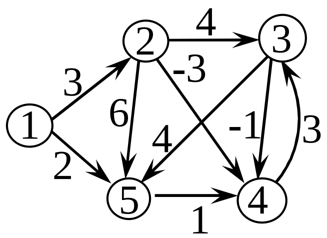


Рисунок 6.8 – Дерево решений задачи коммивояжера

Задание 6.5. Вычислить кратчайший маршрут из 1 в 12, используя алгоритм Форда-Беллмана в графе:



Решение.

Для применения алгоритма построим матрицу весов графа:

$$W = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 0 & 4 & -3 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & -1 & 4 \\ \infty & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Строка $D^{(1)} = (0, 3, \infty, \infty, 2)$ совпадает с первой строкой матрицы весов W.

2) Строим $D^{(2)}$, складывая поочередно столбцы матрицы весов W и $D^{(1)}$:

$d_1^{(2)} = \min\left\{d_1^{(1)}, d_j^{(1)} + w_{j1}\right\} = \min\{0, 0+0, 3+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, 2+\infty\} = 0$.

$d_2^{(2)} = \min\left\{d_2^{(1)}, d_j^{(1)} + w_{j2}\right\} = \min\{3, 0+3, 3+0, \infty+\infty, \infty+\infty, 2+\infty\} = 3$.

$d_3^{(2)} = \min\left\{d_3^{(1)}, d_j^{(1)} + w_{j3}\right\} = 7$, $d_4^{(2)} = \min\left\{d_4^{(1)}, d_j^{(1)} + w_{j4}\right\} = 0$,

$d_5^{(2)} = \min\left\{d_5^{(1)}, d_j^{(1)} + w_{j5}\right\} = 2$.

Итак, $D^{(2)} = (0, 3, 7, 0, 2)$.

3) Строим $D^{(3)}$, складывая поочередно столбцы матрицы весов W и $D^{(2)}$: $D^{(3)} = (0, 3, 3, 0, 2)$.

4) $D^{(4)} = (0,3,3,0,2)$.

$D^{(4)} = (0,3,3,0,2)$ содержит расстояния от 1 до каждой вершины графа:

$\rho_w(1,1) = 0$, $\rho_w(1,2) = 3$, $\rho_w(1,3) = 3$, $\rho_w(1,4) = 0$, $\rho_w(1,5) = 2$.

Найдем кратчайший (1,3)-маршрут. Его вес $\rho_w(1,3) = 3$.

(1,3)-маршрут состоит из (1,*k1*)-маршрута и ребра (k_1,3), подберем вершину k_1 из условия: $\rho_w(1,k_1) + w(k_1,3) = 3$:

$\rho_w(1,1) + w(1,3) = 0 + \infty \neq 3$,

$\rho_w(1,2) + w(2,3) = 3 + 4 \neq 3$,

$\rho_w(1,4) + w(4,3) = 0 + 3 = 3$, итак, k_1=4.

(1,4)-маршрут состоит из (1,k_2)-маршрута и ребра (k_2,4), подберем вершину k_2 из условия: $\rho_w(1,k_2) + w(k_2,4) = 0$:

$\rho_w(1,1) + w(1,4) = 0 + \infty \neq 0$,

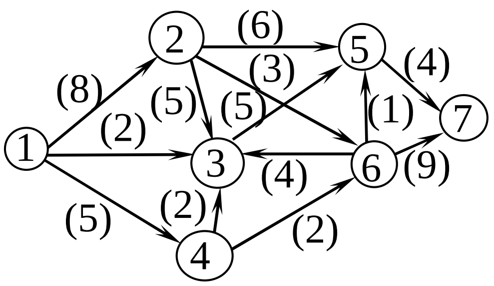
$\rho_w(1,2) + w(2,4) = 3 - 3 = 0$, итак k_2=2.

(1,2)-маршрут состоит из (1,k_3)-маршрута и ребра (k_3,2), подберем вершину k_3 из условия: $\rho_w(1,k_3) + w(k_3,2) = 3$:

$\rho_w(1,1) + w(1,2) = 0 + 3 = 3$, итак, k_3=1.

Составляем кратчайший (1,3)-маршрут: (1,2,4,3).

Задание 6.6. Вычислить максимальный поток, используя алгоритм Форда-Фалкерсона в графе:



Решение.

1 шаг. Построение полного потока.

1.1 За начальный поток возьмем поток равный нулю на всех дугах (нулевые значения потока указывать не будем).

1.2 Насыщаем пути из вершины 1 до вершины 7.

Рассмотрим первый такой путь: M_1: 1→4→6→3→5→7,
пропускные способности дуг этого пути: w: 5 2 4 5 4,
значения потока: φ: 0 0 0 0 0,
следовательно, поток на пути M_1 можно увеличить на 2 до насыщения дуги (4,6).

Новый поток с насыщенным путем M_1 изображен на рисунке 6.9а). Насыщенная дуга (4,6) удалена из графа (изображено пунктиром на рисунке

6.9а).

Рассматриваем новый ненасыщенный путь:

M_2: 1→3→5→7,

w: 2 5 4,

φ: 0 2 2,

Поток на пути M_2 можно увеличить на 2 до насыщения дуг (1,3) и (5,7). Новый поток с насыщенным путем M_2 изображен на рисунке 6.9б). Насыщенные дуги (1,3) и (5,7) удалены из графа (изображены пунктиром на рисунке 6.9б).

Рассматриваем следующий ненасыщенный путь:

M_3: 1→2→6→7,

w: 8 3 9,

φ: 0 0 0,

Поток на пути M_3 можно увеличить на 3 до насыщения дуги (2,6). Новый поток с насыщенным путем M_3 изображен на рисунке 6.9в). Насыщенная дуга (2,6) удалена из графа (изображена пунктиром на рисунке 6.9в).

Больше ненасыщенных путей из вершины 1 до вершины 7 нет. Построен полный поток.

2 шаг. Перераспределение потока.

Помечаем вершины сети:

2.1 вершину 1 помечаем меткой «+»;

2.2 помечаем вершину 4 меткой «+1», так как дуга (1,4) ненасыщена, далее помечаем вершину 3 меткой «+4», так как дуга (4,3) ненасыщена, помечаем вершину 6 меткой «-3», так как поток на дуге (6,3) равен 2>0, и, наконец, помечаем вершину 7 меткой «+6», так как дуга (6,7) ненасыщена.

Итак, образовалась последовательность помеченных вершин от 1 до 7 (рисунок 6.9г). Следовательно, построенный полный поток не максимальный. Перераспределяем его на дугах этой последовательности P_1: 1→4(+1)→3(+4)←6(-3)→7(+6),

пропускные способности дуг: w: 5 2 4 9,

значения потока: φ: 2 0 2 3,

следовательно, поток на последовательности P_1 можно перераспределить на 2 единицы, причем на дугах (1,4), (4,3) и (6,7) он увеличится на 2, а на дуге (6,3) - уменьшится на 2.

После перераспределения дуга (4,3) станет насыщенной и удаляется из графа (рисунок 6.9д).

Повторяем пометку вершин.

2.1 Вершину 1 помечаем меткой «+»;

2.2 помечаем вершину 4 меткой «+1». Из вершины 4 двигаться некуда, так как дуги (4,3) и (4,6) насыщены (см. рисунок 6.9д).

Возвращаемся в вершину 1 и помечаем вершину 2 меткой «+1», затем вершину 3 помечаем меткой «+2», далее вершину 5 помечаем как «+3». Из вершины 5 двигаться некуда, так как дуга (5,7) насыщена, а на дугах (2,5) и (6,5) поток равен 0 (см. рисунок 6.9д).

Возвращаемся снова в вершину 1, помечаем вершину 2 меткой «+1», затем вершину 5 помечаем меткой «+2», далее вершину 3 помечаем как «-5». Из вершины 3 двигаться некуда (см. рисунок 6.9д).

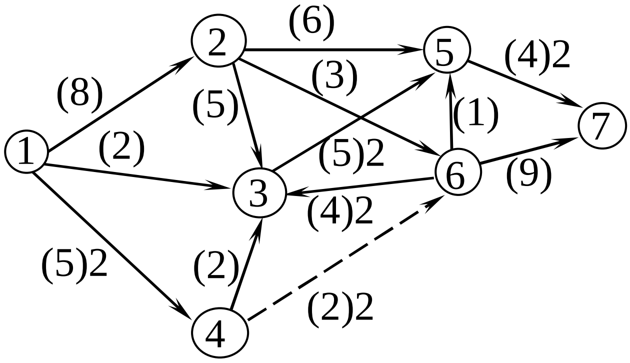
Таким образом, пометить вершину 7 не удалось, следовательно, построенный поток максимальный.

Его величина $\varphi_0 = \sum_k \varphi(1,k) = \varphi(1,2) + \varphi(1,3) + \varphi(1,4) = 3+2+4 = 9$, или

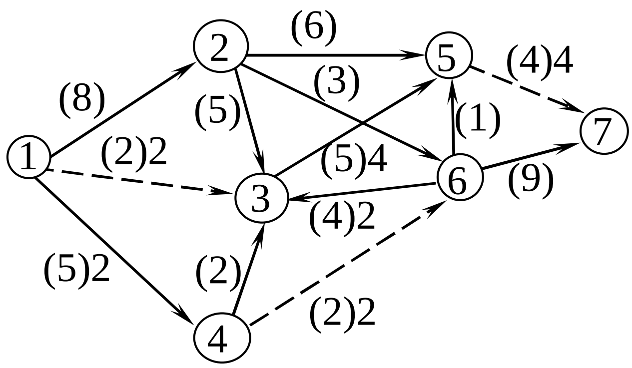
$$\varphi_0 = \sum_k \varphi(k,7) = \varphi(5,7) + \varphi(6,7) = 4+5 = 9.$$

3 шаг. Построим разрез по множеству непомеченных вершин $A = \{6,7\}$: $R_A = \{(5,7),(2,6),(4,6)\}$ (см. рисунок 6.9е), его пропускная способность равна максимальному потоку:

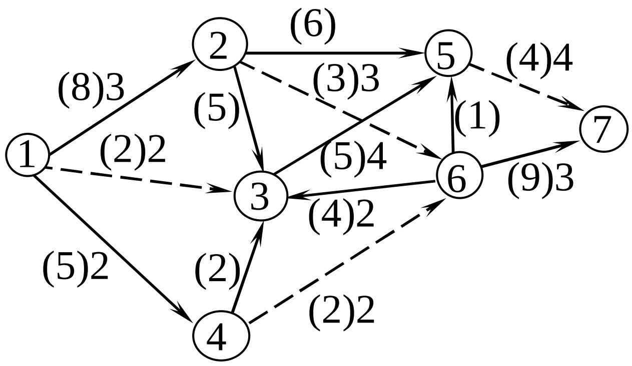
$$w(R_A) = w(5,7) + w(2,6) + w(4,6) = 4+3+2 = 9.$$



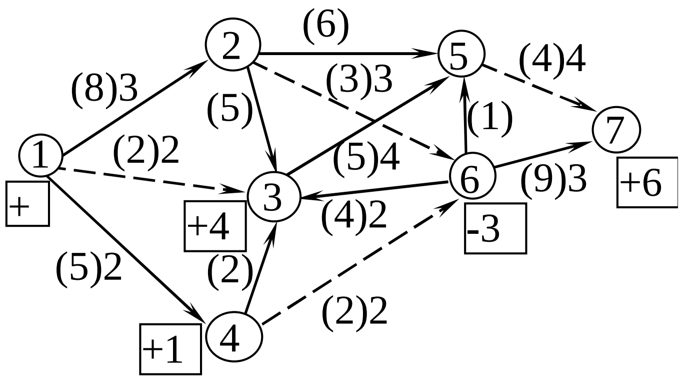
а)



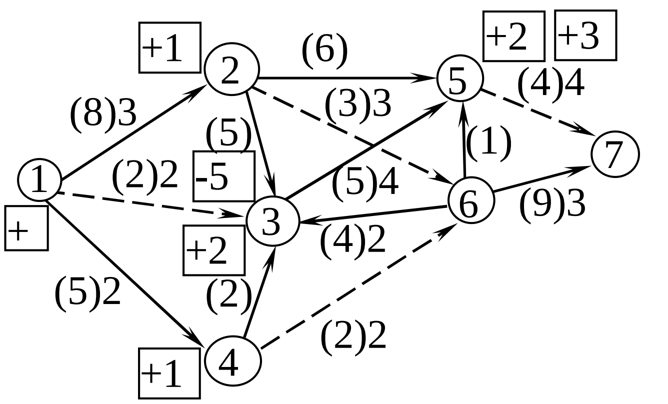
б)



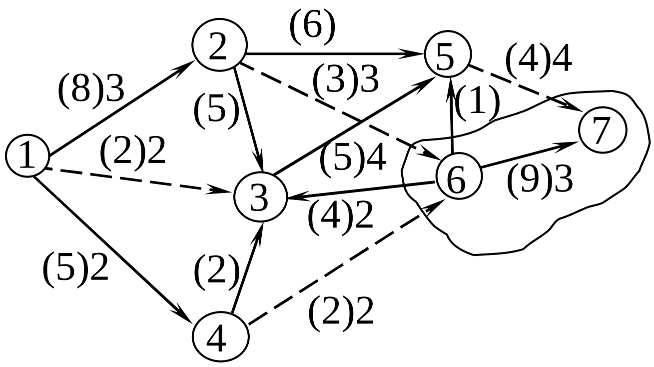
в)



г)



д)



е)

Рисунок 6.9 – реализация алгоритма Форда-Фалкерсона - поиска максимального потока в сети.

6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Судоплатов, С.В. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова – 4-е изд. - Электрон. текстовые дан. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. – 280 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=135675

2. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера [Электронный ресурс] / О.П. Кузнецов - Электрон. текстовые дан. - 6-е изд., стер. - Санкт-Петербург - Лань, 2009. – 400 с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/reader/book/220/#1/

3. Дискретная математика [Электронный ресурс] : в 2 ч. : учебное пособие для студентов вузов. Ч. 1 / Е. В. Решетникова ; Кемеровский гос. ун-т, Новокузнецкий ин-т (фил.). - Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2018 - 160 с. - Библиогр.: с. 146-147. – Режим доступа: https://icdlib.nspu.ru/view/icdlib/7262/read.php.

Дополнительная литература

1. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов [Электронный ресурс]: пер.с англ.: учебное пособие / Р.Хаггарти – изд 2-е, исправленное - Электрон. текстовые дан. – Москва: Техносфера, 2012. – 400 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=89024

2. Редькин, Н.П. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебник / Н.П. Редькин – Электрон. текстовые дан. - Москва: Физматлит, 2009. – 264 с. – Гриф «Рекомендовано» УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки 010100 «Математика», 010200 «Математика. Прикладная математика», 011000 «Механика. Прикладная математика». – Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/2293/
http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=75709

3. Куликов В.В. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебн. пособие / В.В. Куликов. - Электрон. текстовые дан. - Москва: РИОР, 2007. - 174 с.- Режим доступа: http://znanium.com/bookread.php?book=126799

4. Шевелев, Ю.П. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебн. пособие / Ю.П. Шевелев. - Электрон. текстовые дан. – Санкт-Петербург : «Лань», 2008. - 592 с.- Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/437/