Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кемеровский государственный университет» Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики

Кафедра математики, физики и математического моделирования

В.Б. Гридчина

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по выполнению контрольной работы для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки 38.03.01 Экономика

Новокузнецк

2020

Гридчина В.Б.

Высшая математика: Методические рекомендации по выполнению контрольной работы для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата) / В.Б. Гридчина. - Новокузнецк ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2020. – 34 с. - Текст: непосредственный.

В настоящих методических материалах для студентов представлены краткие теоретические сведения, задания для выполнения на контрольной работе и методические указания по подготовке и выполнению контрольной работы для студентов заочной формы обучения.

Рекомендовано
на заседании кафедры
математики, физики и математического
моделирования
22 октября 2020г.
Заведующий кафедрой

______________ / Е.В. Решетникова

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы обучающимся, получающим квалификацию бакалавр по направлению подготовки 38.03.01 Экономика и направлены на оказание помощи студентам заочной формы обучения по выполнению контрольной работы по темам: "Матрицы и определители" , "Системы линейных уравнений", "Аналитическая геометрия на плоскости", "Предел функции", "Приложение производной" дисциплины "Высшая математика".

Основной целью данных методических рекомендаций является методическое обеспечение реализации федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по указанному направлению в части освоения студентами дисциплины "Высшая математика" в соответствии с рабочей программой.

В методические рекомендации включены: основные теоретические сведения по темам: "Матрицы и определители", "Системы линейных уравнений", "Аналитическая геометрия на плоскости", "Предел функции", "Приложение производной"; указания студентам по выполнению контрольной работы; варианты контрольной работы; образец ее решения; список основной и дополнительной литературы.

Данные методические материалы позволяют студенту подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам и успешно выполнить контрольную работу.

1. Матрицы и определители

1.1. Основные сведения о матрицах

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Размерность такой матрицы обозначается m×n.

Если число строк матрицы равно числу столбцов (m=n), то матрица называется квадратной.

Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется единичной матрицей.

Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется диагональной матрицей.

1.2. Операции над матрицами

1. Сложение матриц

Суммой матриц A и B называется матрица C, каждый элемент которой находится по формуле: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Можно складывать только матрицы одинаковой размерности.

2. Умножение матрицы на число

Операция умножения матрицы на действительное число сводится к умножению каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Умножения матриц

Произведением матрицы А размерности m×n и матрицы В размерности n×p называется матрица С размерности m×p, каждый элемент которой находится по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} .$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, число столбцов первой из которых равно числу строк второй.

Матрицу A^T называют транспонированной к матрице А, если элементы каждой строки матрицы А записать в том же порядке в столбцы матрицы A^T.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

1.3. Определители

Определение. Определителем квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k} , \quad \text{где}$$

$M_{1к}$ – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

1.4. Свойства определителей

1. $\det A = \det A^T$;
2. $\det (AB) = \det A \cdot \det B$

3. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

4. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

5. Столбцы (строки) матрицы называются линейно зависимыми, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

6. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю.

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число.

<u>Разложение определителя по элементам ряда</u>.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, получающийся из данного вычеркиванием *i*-той строки и *j*-того столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Теорема Лапласа. Определитель равен сумме произведений элементов какого-либо ряда на их алгебраические дополнения.

1.5. Обратная матрица

Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.
Для нахождении обратной матрицы применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji}- минор элемента a_{ji} матрицы A.

2. Системы линейных уравнений

2.1. Основные понятия

Система n уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. Если система не имеет ни одного решения, то она называется несовместной.

Система называется определенной, если она имеет только одно решение и неопределенной, если более одного.

Если b_1, b_2, …,b_m = 0, то система называется однородной. Однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

2.2. Метод обратной матрицы

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

2.3.Метод Крамера

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Теорема. Система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

Δ = det A, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.4. Метод Гаусса

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + ... + d_{2n}x_n = d_2 \\ .... \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + ... + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \quad \text{где } d_{1j} = a_{1j}/a_{11},\ j = 2, 3, ..., n+1.$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \qquad i = 2, 3, ... , n; \qquad j = 2, 3, ... , n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

3. Аналитическая геометрия на плоскости

3.1. Прямая на плоскости

Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений коэффициентов A, B и C возможны следующие частные случаи:

- $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ { $By + C = 0$}- прямая параллельна оси Ox
- $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ { $Ax + C = 0$} – прямая параллельна оси Oy
- $B = C = 0$, $A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy
- $A = C = 0$, $B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k;\quad -\frac{C}{B} = b;\quad т.е.\quad y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k.**

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на –C, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где}$$

$$a = -\frac{C}{A};\quad b = -\frac{C}{B}$$

Это уравнение называется **уравнением прямой в отрезках на осях.**

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ (уравнение пучка прямых) имеет вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$

3.2. Угол между прямыми

Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

3.3. Расстояние от точки до прямой

Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

4. Предел функции

4.1. Предел функции в точке

Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Определение. Число A называется пределом функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется пределом функции f(x) в точке x = a слева, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется пределом функции f(x) в точке x = a справа.

Пределы A_1 и A_2 называются также односторонними пределами функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – конечный предел функции f(x).

4.2. Предел функции в бесконечности

Определение. Число A называется пределом функции f(x) при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, $|x|>M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

4.3. Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x \to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

4.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция f(x) называется бесконечно малой при x→a, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Свойства бесконечно малых функций:

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.
2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.
3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при x→a.
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Определение. Функция называется бесконечно большой при x→a, где a – чосли или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. *Если f(x)→0 при x→a (если x→∞) и не обращается в ноль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

4.5. Замечательные пределы

Первый замечательный предел. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

5. Приложения производной

5.1. Возрастание и убывание функций

Теорема.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на промежутке (a, b).

Аналогично можно сделать вывод о том, что если $f'(x)<0$ на промежутке (a, b), то $f(x)$ убывает на промежутке (a, b).

5.2. Экстремум функции

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

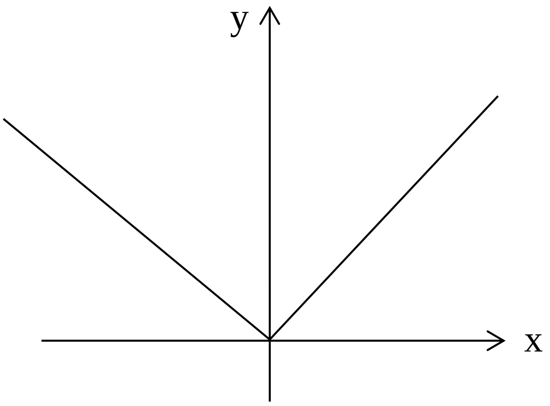
Теорема. (необходимое условие существования экстремума) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

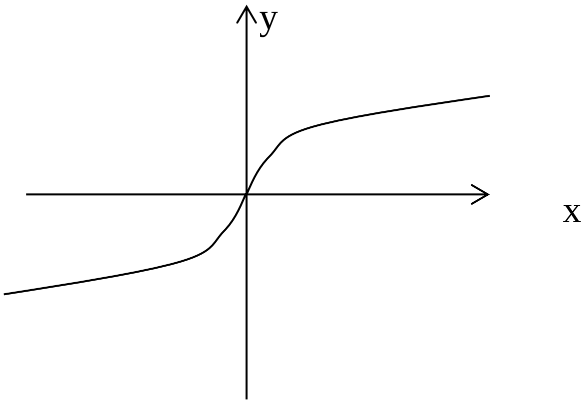
Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример: $f(x) = |x|$



В точке x = 0 функция имеет минимум, но имеет производной.

Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке x = 0 функция не не имеет экстремума.

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

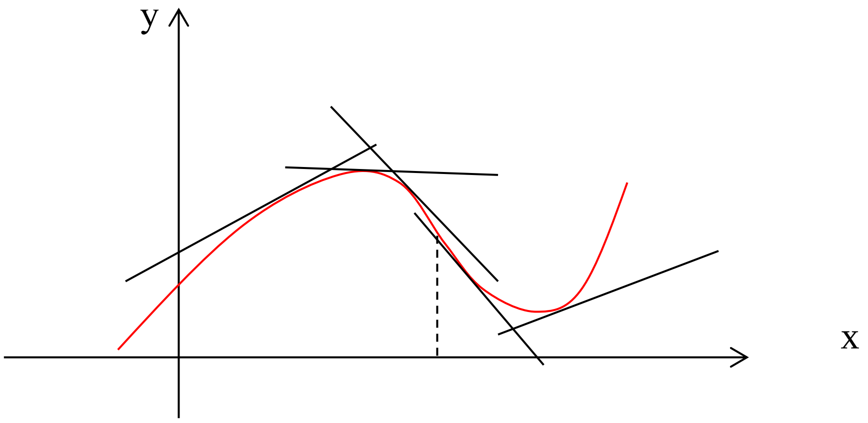
1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.

3) Найти значения функции на концах отрезка.

4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

5.3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Определение. Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется вогнутой.



Теорема. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема. Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку x = a $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.

5.4. Асимптоты

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть вертикальными и наклонными. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке.

Вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая x = a – асимптота кривой y = f(x).

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту
y = kx + b.

Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Т.к. x→∞, то $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$, т.к. b = const, то $\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0;\quad \lim_{x\to\infty} k = k$.

Тогда $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]-\lim\limits_{x\to\infty} b=0$, следовательно,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

5.5. Общая схема исследования функции

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо найти:

1) Область определения функции.
2) Четность, нечетность.
3) Точки разрыва. Асимптоты.
4) Точки пересечения графика функции с осями координат.
5) Интервалы возрастания и убывания. Точки максимума и минимума.
6) Интервалы выпуклости и вогнутости. Точки перегиба.

6. Контрольная работа

6.1. Указания студентам по выполнению контрольной работы

Номер варианта студента совпадает с последней цифрой его зачетной книжки.

Требования к оформлению контрольных работ следующие: работы выполняются в тетрадях; на первой странице указываются номер группы, фамилия и имя студента, номер варианта; текст каждого из заданий переписывается; решение оформляется достаточно кратко, но корректно; математические символы воспроизводятся без искажений. К каждой задаче записывается ответ. Защита контрольной работы состоит в том, что студент должен ответить на все вопросы, связанные с обоснованием решения задач из контрольной работы.

6.2. Варианты контрольной работы

1-10 Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

1. $\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_3 = 5, \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 1, \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 9, \\ 2X_1 + 5X_2 - 3X_3 = 4, \\ 5X_1 + 6X_2 - 2X_3 = 18. \end{cases}$

3. $\begin{cases} X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 6, \\ 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 20, \\ 3X_1 - 2X_2 - 5X_3 = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = -1, \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 = -4, \\ 4X_1 + X_2 + 4X_3 = -2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2X_1 - X_2 - X_3 = 4, \\ 3X_1 + 4X_2 - 2X_3 = 11, \\ 3X_1 - 2X_2 + 4X_3 = 11. \end{cases}$

6. $\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 1, \\ 8X_1 + 3X_2 - 6X_3 = 2, \\ 4X_1 + X_2 - 3X_3 = 3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7X_1 - 5X_2 = 31, \\ 4X_1 + 11X_3 = -43, \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = -20. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 = 8, \\ 2X_1 - X_2 - 3X_3 = -4, \\ X_1 + 5X_2 + X_3 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} X_1 - 4X_2 - 2X_3 = -3, \\ 3X_1 + X_2 + X_3 = 5, \\ 3X_1 - 5X_2 - 6X_3 = -9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 31, \\ 5X_1 + X_2 + 2X_3 = 20, \\ 3X_1 - X_2 + X_3 = 9. \end{cases}$

11-20 В треугольнике с вершинами ABC найти:
а) уравнение стороны АС;
б) уравнение высоты ВД;
в) уравнение медианы АЕ
в) длину высоты ВД.
г) угол АВС

11. A(4, 2), B(0, 7), C(2, 7).
12. A(4, 10), B(10, 2), C(2,
13. A(4, 6), B(9, 4), C(2, 10).
14. A(3, 5), B(7, 4), C(5, 4).
15. A(10, 6), B(-2, 8), C(8, 9).
16. A(1, 8), B(5, 2), C(5, 7).
17. A(6, 5), B(4, 3), C(4, 6).
18. A(7, 2), B(5, 7), C(3, 1).
19. A(8, 6), B(-5, 5), C (1, 8).
20. A(-2, 3), B(6, 5), C(-3, 8).

21-30. Найти пределы:

21. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x}{1-3x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{5x^3+5x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x}{1-3x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3x^2}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x1}{4x^3-4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{x+1})^x$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-1}{3x^2-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{5x^3-x^2+4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{2x^2-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx-\dfrac{1}{\sin x})$.

28. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x^2+9x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+8x}-3}{\sqrt{4x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^2-1+n^{-2}}{n^2+1+n^{-2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+3}{x+2})^x$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^3+n^2+n+1}{n^3-n^2+n+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 2x}$.

31-40. Исследовать методами дифференциального исчисления следующие функции и, используя результаты исследования, построить их графики:

№ 31

1. $y = \dfrac{x}{1-x^2}$

2. $y = e^{-x^2}$

№ 32

1. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$

2. $y = x + arctgx$

№ 33

1. $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

2. $y = e^{2x-x^2}$

№ 34

1. $y = \dfrac{4x^3-x^4}{8}$

2. $y = x + arctgx$

№ 35

1. $y = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

2. $y = \dfrac{e^x}{x}$

№ 36

1. $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$

2. $y = e^{\frac{1}{1-x}}$

№ 37

1. $y = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

2. $y = x^2 \cdot e^x$

№ 38

1. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$

2. $y = \ln(1-\dfrac{1}{x^2})$

№ 339

1. $y = \dfrac{x^2}{(x+2)^2}$

2. $y = e^{arctgx}$

№ 40

1. $y = x^3 \cdot e^{-x}$

2. $y = x \cdot \sqrt{x+3}$

7. Образец решения варианта контрольной работы

1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 6, \\ 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 20, \\ 3X_1 - 2X_2 - 5X_3 = 6. \end{cases}$:

а) методом Крамера;

б) при помощи обратной матрицы;
в) методом Гаусса

а) Решение системы методом Крамера.

Вычислим основной определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot(-5) + (-2)\cdot(-4)\cdot3 + 3\cdot2\cdot(-2) - 3\cdot3\cdot3 - 1\cdot(-4)\cdot(-2) - (-2)\cdot2\cdot(-5) =$$

$$= -15 + 24 - 12 - 27 - 8 - 20 = -58 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение.

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 6\cdot3\cdot(-5) + (-2)\cdot(-4)\cdot6 + 3\cdot20\cdot(-2) - 3\cdot3\cdot6 - 6\cdot(-4)\cdot(-2) -$$

$$-(-2)\cdot20\cdot(-5) = -90 + 48 - 120 - 54 - 48 - 200 = -464$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot20\cdot(-5) + 6\cdot(-4)\cdot3 + 3\cdot2\cdot6 - 3\cdot20\cdot3 - 1\cdot(-4)\cdot6 - 6\cdot2\cdot(-5) =$$

$$= -100 - 72 + 36 - 180 + 24 + 60 = -232$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot6 + (-2)\cdot20\cdot3 + 6\cdot2\cdot(-2) - 6\cdot3\cdot3 - 1\cdot20\cdot(-2) - (-2)\cdot2\cdot6 =$$

$$= 18 - 120 - 24 - 54 + 40 + 24 = -116$$

Находим решение системы, используя формулы Крамера:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-464}{-58} = 8, \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-232}{-58} = 4, \quad X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-116}{-58} = 2.$$

Таким образом, решение системы: $X_1 = 8, \quad X_2 = 4, \quad X_3 = 2.$

б) Решение системы матричным способом.

Запишем систему уравнений в матричной форме: $A \times X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Матрица-решение имеет вид: $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем матрицу A^{-1} по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения, соответствующие элементам a_{ij}.

Вычислим определитель матрицы А. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0.$

Найдем алгебраические дополнения A_{ij} матрицы А.

$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23.$

$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 + 12) = -2.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13.$

$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -(10 + 6) = -16.$

$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 9 = -14.$

$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 6) = -4.$

$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1.$

$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 6) = 10.$

$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7.$

Тогда A^{-1} примет вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{58}\cdot\begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{58}\cdot\begin{pmatrix} 23 & 16 & 1 \\ 2 & 14 & -10 \\ 13 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу Х:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{58} \cdot \begin{pmatrix} 23 & 16 & 1 \\ 2 & 14 & -10 \\ 13 & 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{58} \cdot \begin{pmatrix} 23 \cdot 6 + 16 \cdot 20 + 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 6 + 14 \cdot 20 - 10 \cdot 6 \\ 13 \cdot 6 + 4 \cdot 20 - 7 \cdot 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{58} \cdot \begin{pmatrix} 138 + 320 + 6 \\ 12 + 280 - 60 \\ 78 + 80 - 42 \end{pmatrix} = \frac{1}{58} \cdot \begin{pmatrix} 464 \\ 232 \\ 116 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $X_1 = 8, \quad X_2 = 4, \quad X_3 = 2.$

Ответ. $X_1 = 8, \quad X_2 = 4, \quad X_3 = 2.$

в) <u>Решение системы методом Гаусса</u>.

Все элементарные преобразования, связанные с последовательным исключением будем проводить с расширенной матрицей системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + I \cdot (-2) \\ III + I \cdot (-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II \cdot \frac{1}{7} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + I \cdot (-4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{58}{7} & -\frac{116}{7} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III \cdot \left(-\frac{7}{58}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 6, \\ X_2 - \frac{10}{7} X_3 = \frac{8}{7}, \\ X_3 = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = 2X_2 - 3X_3 + 6, \\ X_2 = \frac{10}{7} X_3 + \frac{8}{7}, \\ X_3 = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = 2X_2 - 3X_3 + 6, \\ X_2 = \frac{10}{7} \cdot 2 + \frac{8}{7} = \frac{28}{7} = 4, \\ X_3 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 6 = 8, \\ X_2 = 4, \\ X_3 = 2. \end{cases}$$

Таким образом, $X_1 = 8, \quad X_2 = 4, \quad X_3 = 2.$

2. В треугольнике с вершинами A(0, 1), B(-3, 4), C(2, 5).
найти:

а) уравнение стороны AC;

б) уравнение высоты ВД;

в) уравнение медианы BE

г) длину высоты ВД.

д) угол BAC

Решение:

а) Составим уравнение прямой AC (уравнение прямой, проходящей через две точки).

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad AC: \quad \frac{x-0}{2-0}=\frac{y-1}{5-1}; \qquad \frac{x}{2}=\frac{y-1}{4}: \quad y=2x+1$$

Угловой коэффициент прямой AC равен 2.

б) Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку B $y-4=k(x+3)$ Выберем из пучка прямую, перпендикулярную прямой AC.

Так как угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1=-\frac{1}{k_2}$, то $k_{BD}=-\frac{1}{k_{AC}}=-\frac{1}{2}$. Получим уравнение прямой BD:

$$y-4=-\frac{1}{2}(x+3); \quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}.$$

в) Так как точка E-середина отрезка AC, то координаты точки E находятся по формуле $\left(\frac{0+2}{2};\frac{1+5}{2}\right)$. Получим E (1; 3). Запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки B и E.

$$BE: \quad \frac{x-1}{-3-1}=\frac{y-3}{4-3}; \qquad \frac{x-1}{-4}=\frac{y-3}{1}: \quad x+4y-13=0.$$

г) Длину высоты BD найдем по формуле $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ - расстояние от точки B до прямой AC. Получим, $d=\frac{|2\cdot(-3)+(-1)\cdot 4+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$.

д) угол BAC найдем по формуле $tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$. Угловой коэффициент прямой AC известен и равен $k_{AC} = 2.$. Найдем угловой коэффициент прямой AB по формуле $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Получим, $k_{AB} = -1$. $tg\alpha = \left|\frac{-1-2}{1+2\cdot(-1)}\right| = 3$. Тогда $\alpha = arctg3$.

3. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2 + 5x - 1}{3x^2 - 2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(4 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}\right)x^2}{\left(3 - \frac{2}{x^2}\right)x^2} = \frac{4}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = \{1^\infty\} = \left|\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{3}{x}\cdot\frac{x}{3}\cdot 2x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x}} = e^6$.

4. Исследовать методами дифференциального исчисления следующие функции и, используя результаты исследования, построить их графики:

а) $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$;

1) Область определения функции. $D(y): x \neq 0$.

2) Четность или нечетность функции.

$$y(-x) = -\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$$

y(-x) = -y(x), нечетная функция

3) Точки разрыва. Асимптоты.

Уравнения наклонной асимптоты $y = kx + b$.

Находим коэффициент k:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 \cdot x^2 - 1}{x^4} = 0$$

Находим коэффициент b:

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - k \cdot x$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} - 0 \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{3 \cdot x^2 - 1}{x^3} = 0$$

Получаем уравнение горизонтальной асимптоты: $y = 0$

Найдем вертикальные асимптоты.

Для этого определим точки разрыва: x = 0

Находим переделы в точке x=0

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{3 \cdot x^2 - 1}{x^3} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{3 \cdot x^2 - 1}{x^3} = -\infty$$

$x = 0$ - точка разрыва II рода и является вертикальной асимптотой.

4) Точки пересечения графика функции с осями координат.

Пересечение с осью 0Y

Нет пересечений.

Пересечение с осью 0X

y=0

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = 0$$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5) Интервалы возрастания и убывания. Точки максимума и минимума.

Находим первую производную.

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^4}$$

или

$$f'(x) = \frac{-3 \cdot x^2 + 3}{x^4}$$

Находим критические точки. Для этого приравниваем производную к нулю

$-3\cdot x^2+3 = 0$

Откуда: $x_1 = -1$ $x_2 = 1$

(-∞ ;-1)	(-1; 0)	(0; 0)	(0; 1)	(1; +∞)
f '(x) < 0	f '(x) > 0		f '(x) > 0	f '(x) < 0
функция убывает	функция возрастает		функция возрастает	функция убывает

В окрестности точки x = -1 производная функции меняет знак с (-) на (+). Следовательно, точка x = -1 - точка минимума. В окрестности точки x = 1 производная функции меняет знак с (+) на (-). Следовательно, точка x = 1 - точка максимума.

6) Интервалы выпуклости и вогнутости. Точки перегиба

Найдем вторую производную.

$$f''(x) = -\frac{6}{x^3} - \frac{4(-3\cdot x^2+3)}{x^5}$$

или

$$f''(x) = \frac{6\cdot x^2 - 12}{x^5}$$

Находим корни уравнения. Для этого полученную функцию приравняем к нулю.

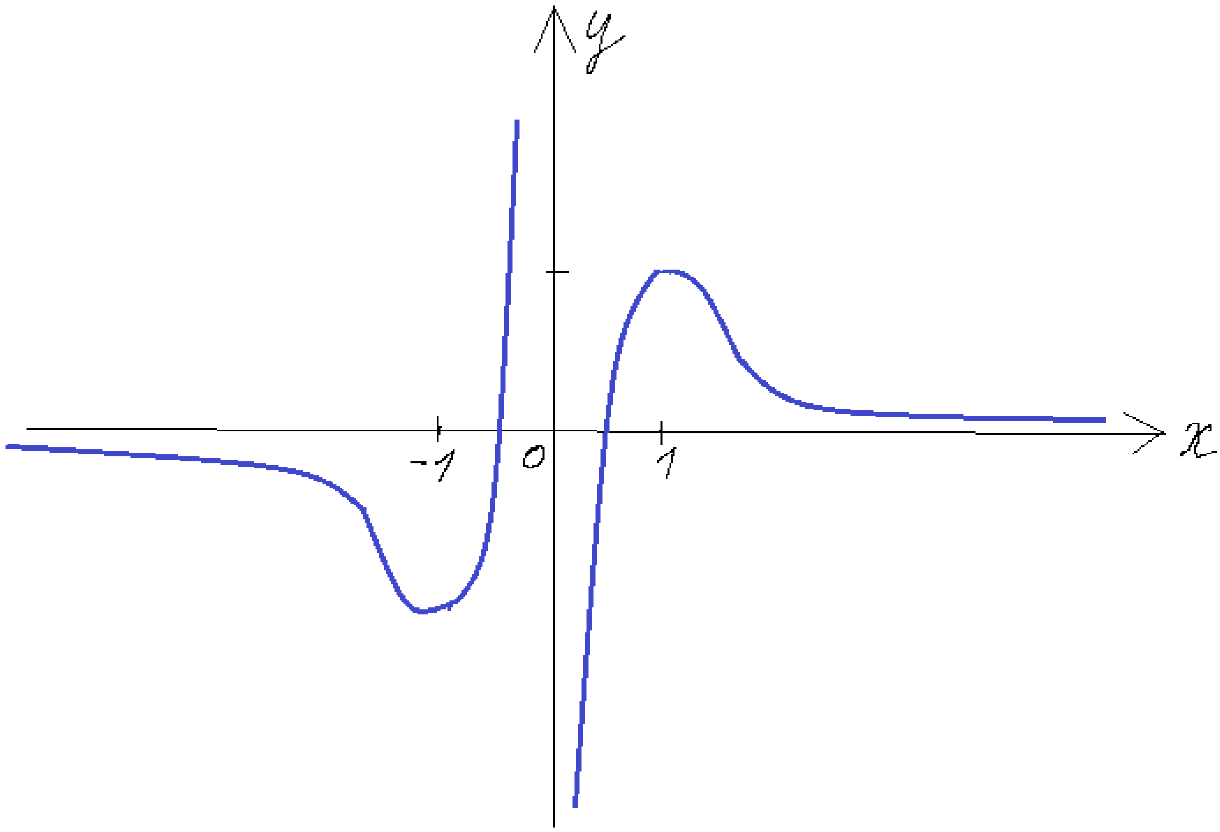
$$\frac{6\cdot x^2 - 12}{x^5} = 0$$

Откуда точки перегиба:

$$x_1 = -\sqrt{2}$$
$$x_2 = \sqrt{2}$$

$(-\infty\ ;-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2};\ 0)$	$(0;\ \sqrt{2})$	$(\sqrt{2};\ +\infty)$
f ''(x) < 0	f ''(x) > 0	f ''(x) < 0	f ''(x) > 0
функция выпукла	функция вогнута	функция выпукла	функция вогнута

Построим график функции.



б) $y = \ln(1 - \frac{1}{x^2})$.

1) Область определения функции. $D(y): 1 - \frac{1}{x^2} > 0, x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

2) Четность или нечетность функции.

$$y(-x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

y(-x) = *y(x),* четная функция

3) Точки разрыва. Асимптоты кривой.

Уравнение наклонной асимптоты *y* = *kx* + *b.*

Находим коэффициент *k*:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

Находим коэффициент *b*:

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - k\cdot x$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) - 0\cdot x = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Получаем уравнение горизонтальной асимптоты: $y = 0$

4) Точки пересечения графика с осями координат.

Пересечение с осью 0Y

Нет пересечений.

Пересечение с осью 0X

y=0

$$\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Нет пересечений.

5) Интервалы возрастания и убывания. Точки максимума и минимума.

Найдем первую производную.

$$f'(x) = \frac{2}{x^3(1-\frac{1}{x^2})}$$

или

$$f'(x) = \frac{2}{x(x^2-1)}$$

Находим критические точки. Для этого приравниваем производную к нулю. Получим:$1 \neq 0$.

Данное уравнение корней не имеет.

6) Интервалы выпуклости и вогнутости. Точки перегиба

Найдем вторую производную.

$$f''(x) = -\frac{4}{(x^2-1)^2} - \frac{2}{x^2(x^2-1)}$$

или

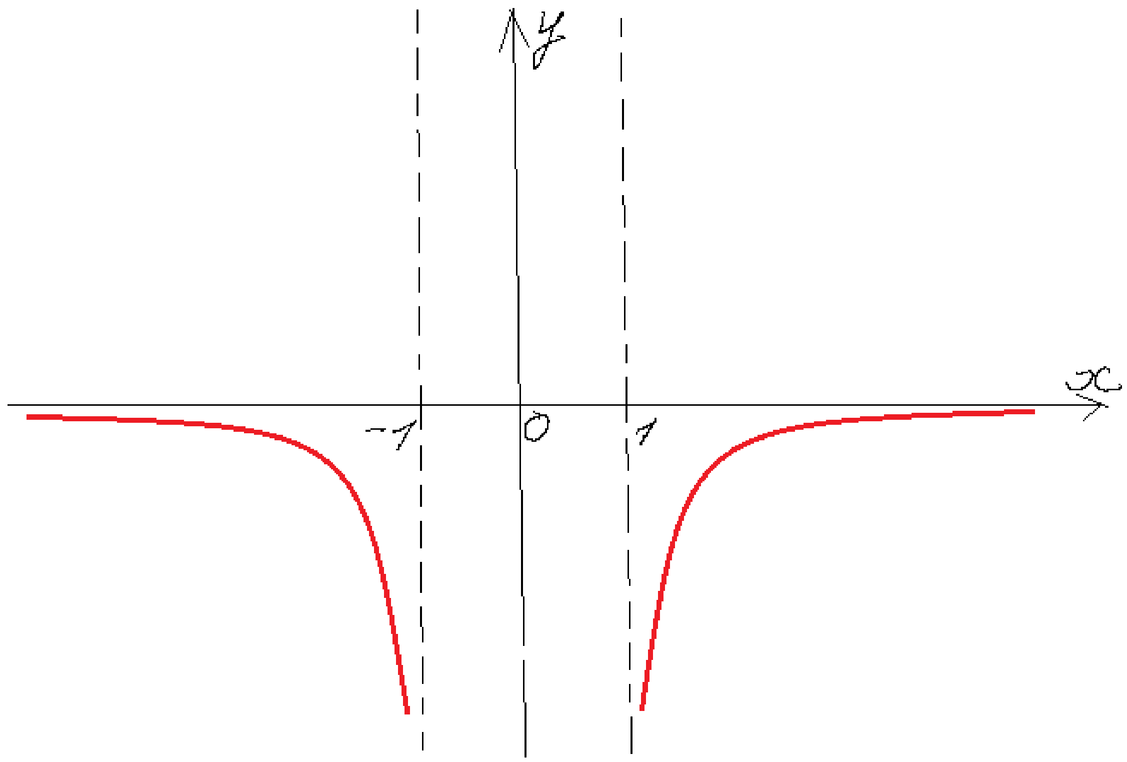
$$f''(x) = \frac{-6\cdot x^2+2}{x^2(x^2-1)^2}$$

Находим корни уравнения. Для этого полученную функцию приравняем к нулю.

$$\frac{-6 \cdot x^2 + 2}{x^2(x^2-1)^2} = 0$$

Точек перегиба нет.

Построим график функции.



8. Рекомендуемая литература:

Основная учебная литература

1. Рудык, Б.М. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебн. пособие / Б.М. Рудык – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2013. – 318 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=363158

2. Гурьянова, К.Н. Математический анализ [Электронный ресурс] : учебн. пособие / К.Н. Гурьянова, У.А. Алексеева, В.В. Бояршинов - Электрон.текстовые дан. – Екатеринбург : Изд-во Уральского университета, 2014. – 330 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=275708

Дополнительная учебная литература

1. Шершнев, В.Г. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии [Электронный ресурс]: учебн. пособие / В.Г. Шершнев – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2014. – 168 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=318084
2. Шершнев В.Г. Математический анализ [Электронный ресурс]: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. . - Электрон.текстовые дан. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 288 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=342089
3. Шершнев В.Г. Математический анализ [Электронный ресурс]: сборник задач с решениями: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - Электрон.текстовые дан - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 164 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=342088
4. Индивидуальные задания по высшей математике: [Электронный ресурс]: учебн. пособие. В 4 ч. Ч. 1 Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А.П. Рябушко – 7-е изд. - Электрон. текстовые дан. – Минск : Выш. шк., 2013. – 304 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=508859
5. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум [Электронный ресурс]: учебн. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2015. – 352 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=476097
6. Ячменёв, Л. Т. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебник / Л. Т. Ячменёв. - Электронные текстовые данные. - Москва : РИОР : Инфра-М, 2013. – 752 с. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=344777
7. Зимина, О. В. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / О. В. Зимина, А. И. Кириллов, Т. А. Сальникова ; под ред. А. И. Кириллова. — Электронные текстовые данные. – Москва : Физматлит, 2006. – 368 с. - Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59344