Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Кафедра математики, физики и математического моделирования

Л.А. Осипова

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Сравнения

Методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе (в форме индивидуальных заданий) для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика»

Новокузнецк

2019

УДК 511(072)
ББК 22.13я73
О 74

Осипова Л.А.

О 74 Теория чисел. Сравнения: методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе (в форме индивидуальных заданий) для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика») / Л.А. Осипова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2019 – 58 с.

В работе изложены методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе студентов по дисциплине «Теория чисел» раздел «Сравнения», включающий темы «Числовые сравнения». «Классы вычетов», «Сравнения с переменной»: основные теоретические факты по данным темам, примеры решения типовых задач, варианты индивидуальной самостоятельной работы и методические рекомендации по ее решению и оформлению, оценивание работы в балльной системе, список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика»

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 11 от 17.06.2019

Заведующий каф. МФММ
_________/ Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 10 от 27.06.2019

Председатель методической комиссии ФИМЭ
_________/ Г.Н. Бойченко

УДК 511(072)
ББК 22.13я73
О 74

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика») и направлены на оказание помощи студентам в выполнении внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий) по темам «Числовые сравнения». «Классы вычетов», «Сравнения с переменной» дисциплины «Теория чисел».

Целью изучения дисциплины «Теория чисел» является подготовка к обучению математике, научной работе в области теории чисел и учебно-методической работе в общеобразовательных учреждениях.

Теория сравнений является одним из основных разделов теории чисел, ее содержание базируется на основных понятиях делимости целых чисел (делимое, делитель, частное и остаток), теории колец (идеал кольца, фактор-кольцо, обратимый элемент кольца) и многочленов (степень, корень многочлена, деление многочленов с остатком, теорема Безу и схема Горнера).

Целью методических рекомендаций является содействие в организации процесса самостоятельной работы студентов в ходе изучения теории сравнений, которая является следствием правильно организованной учебной деятельности на аудиторных занятиях. Для этого преподавателю необходимо целенаправленно формировать у студентов план учебных действий, как некоторую схему освоения учебного предмета. Придерживаясь этого подхода к трактовке понятия самостоятельной работы, мы рассматриваем ее не только как самостоятельную работу студента над заданиями преподавателя к следующему занятию, но и любую другую внеаудиторную работу по предмету.

Отличительная особенность понимаемой таким образом внеаудиторной самостоятельной работы студентов, в отличие от самостоятельной работы по подготовке к очередному аудиторному занятию, состоит еще и в том, что в ее основе всегда лежат новые для студента познавательные задачи, в ходе решения которых он узнает или осваивает что-то новое, неизвестное, но нужное и важное для себя, для овладения избранной специальностью. Это обстоятельство предполагает предварительную, целенаправленную работу преподавателя по созданию у студента предпосылок такой потребности, по повышению его учебной мотивации, формированию установки на самодисциплину и ответственность, на напряженный и творческий труд.

В методические рекомендации включено:

1) справочный материал (основные понятия, свойства, теоремы, формулы);
2) примеры решения основных типовых задач;
3) вопросы для самопроверки;
4) особенности оценивания самостоятельной работы;
5) варианты внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий);
6) требования к выполнению и оформлению самостоятельной работы;
7) список рекомендуемой литературы.

Теоретические сведения об основных фактах теории сравнений представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям, выполнения домашних, индивидуальных и контрольных заданий.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает классические и современные источники; указана литература основная и дополнительная.

Таким образом, данные методические материалы позволяют получить студенту целостное представление о содержании тем “Числовые сравнения» «Классы вычетов», «Сравнения с переменной» и логике их развертывания, эффективно подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам, успешно выполнить индивидуальную самостоятельную работу. Кроме того, пособие может оказаться полезным при написании курсовых и выпускных квалификационных работ, а также при прохождении производственной (педагогической) практики в старших классах.

ЧИСЛОВЫЕ СРАВНЕНИЯ

Определение

Пусть число m натуральное число, больше единицы. Целые числа a и b называют сравнимыми по модулю m, если при делении на m они дают одинаковые остатки. $a \equiv b \pmod{m}$.

Критерий сравнения. Пусть a и b целые числа, m – модуль. Следующие условия эквивалентны

1) $a \equiv b \pmod{m}$.

2) разность чисел a и b делится на m.

3) существует число t такое, что $a=b+mt$.

Теорема. Отношение сравнения по модулю m является отношением эквивалентности на множестве целых чисел.

Свойства сравнений

1. Сравнения по общему модулю можно почленно сложить и вычесть:

$a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a+c \equiv b+d \pmod{m}$, $a-c \equiv b-d \pmod{m}$.

2. Слагаемое, стоящее в какой-либо части сравнения, можно переносить в другую часть, изменив его знак на противоположный.

3. К обеим частям сравнения можно прибавить (вычесть) одно и тоже число, кратное модулю.

4. Сравнения по общему модулю можно почленно перемножить:

$a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$.

5. Обе части сравнения можно умножить на любое число:

$a \equiv b \pmod{m}$, то $\forall c$: $ac \equiv bc \pmod{m}$.

6. Обе части сравнения можно разделить на одно и тоже число, взаимно простое с modm.

7. Обе части сравнения можно возводить в одну и ту же степень.

8. Обе части сравнения и его модуль можно умножить на одно и то же целое положительное число или разделить на их общий делитель.

9. Если сравнение $a \equiv b$ имеет место по нескольким разным модулям, то оно имеет место и по модулю, равному наименьшему общему кратному этих модулей.

10. Если сравнение имеет место по модулю m, то оно имеет место и по модулю d, равному любому делителю числа m.

Пример.

Найти остаток от деления 1277^{261} на 28.

Решение: Известно, что $1277^{261} \equiv r \ (mod\ 28)$, где $0 \le r < 28$. Найдем такое целое число, удовлетворяющее одновременно эти двум условиям.

Так как $1277 \equiv 17 (mod\ 28)$, то $1277^{261} \equiv 17^{261}\ (mod\ 28)$.

Получили $1277^{261} \equiv r(\mathrm{mod}\ 28)$. Используя свойства сравнений, найдем r.

$17^{261} \equiv r(\mathrm{mod}\ 28)$,

$17^{2} \equiv 289 \equiv 9(\mathrm{mod}\ 28)$, (1)

$17^{4} \equiv 81 \equiv -3(\mathrm{mod}\ 28)$, (2)

$17^{12} \equiv -27 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 28)$, (3)

$17^{252} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 28)$, (4)

Умножим сравнение (4) дважды на сравнение (2) почленно, получим

$17^{260} \equiv 9(\mathrm{mod}\ 28)$, (5)

$17^{261} \equiv 153 \equiv 13(\mathrm{mod}\ 28)$, (6)

Замечаем, что 13 искомое число, т.е. искомый остаток равен 13.

КЛАССЫ ВЫЧЕТОВ. ТЕОРЕМЫ ЭЙЛЕРА И ФЕРМА

Отношение сравнимости по модулю m на множестве целых чисел является отношением эквивалентности и разбивает множество Z на классы эквивалентности, которые обозначаются $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}$.

Множество всех классов эквивалентности по модулю m обозначаются Z_m.

$\overline{a} = \{x \epsilon Z, x \equiv a(modm)\}$ – класс вычетов по модулю m.

Пример. В кольце Z_6 классов вычетов по модулю 6:

Решить уравнения: $\overline{2} + \overline{x} = \overline{1}$; $\overline{5} \cdot \overline{x} = \overline{2}$; $\overline{2} \cdot \overline{x} = \overline{5}$.

Найти элементы противоположные классам $\overline{5}, \overline{4}, \overline{1}$.

Найти делители нуля.

Найти обратимые элементы.

Решение. $Z_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$.

Используя таблицы операций сложения и умножения классов вычетов по модулю 6, получаем: $\overline{x} = \overline{5}, \overline{x} = \overline{4}$, третье уравнение не имеет решения.

Используя таблицу операции сложения классов вычетов по модулю 6, получаем: -$\overline{5} = \overline{1}$, -$\overline{4} = \overline{2}$, -$\overline{1} = \overline{5}$.

Используя таблицу операции умножения классов вычетов по модулю 6, находим классы вычетов, произведение которых есть класс $\overline{0}$. Получаем $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$.

Используя таблицу операции умножения классов вычетов по модулю 6, находим классы вычетов произведение которых есть класс $\overline{1}$. Получаем $\overline{1}$, $\overline{5}$

Определение

Любое число из класса вычетов по модулю m называется вычетом по модулю m.

Определение

Совокупность чисел, взятых по одному из каждого класса вычетов по модулю m называется полной системой вычетов по модулю m.

В полной системе вычетов, таким образом, всего m чисел. Непосредственно сами Остатки при делении на m называются наименьшими неотрицательными вычетами и, конечно, образуют полную систему вычетов по модулю m.

Вычет ρ называется абсолютно наименьшим, если $|\rho|$ наименьший среди модулей вычетов данного класса.

Пример: Пусть m= 5. Тогда: 0, 1, 2, 3, 4 - наименьшие неотрицательные вычеты; -2, -1, 0, 1, 2 – абсолютно наименьшие вычеты. Обе приведенные совокупности чисел образуют полные системы вычетов по модулю 5.

Определение

Приведенной системой вычетов по модулю m называется совокупность всех вычетов из полной системы, взаимно простых с модулем m.

Приведенную систему обычно выбирают из наименьших неотрицательных вычетов. Ясно, что приведенная система вычетов по модулю m содержит φ(m) вычетов, где

φ (m) – функция Эйлера – количество чисел, меньших m и взаимно простых с m.

Пример. Пусть m = 42. Тогда приведенная система вычетов имеет вид:

1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41.

Теорема Эйлера.

Пусть m>1, (a,m)=1, φ(m) – функция Эйлера. Тогда $a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod m)$.

Теорема Ферма.

Пусть p – простое число, (a, p)=1. Тогда $a^{p-1} \equiv 1(mod p)$.

Следствие 1.

Без всяких ограничений на a ∈ Z, $a^p \equiv a(mod p)$.

Следствие 2.$(a + b)^p \equiv a^p + b^p (mod p)$.

Пример. Девятая степень однозначного числа оканчивается на 7. Найти это число.

Решение.$a^9 \equiv 7\ (mod\ 10)$ – это дано. Кроме того, очевидно, что (7, 10)=1 и (a, 10)=1. По теореме Эйлера $a^{\varphi(10)} \equiv 1(mod\ 10)$, следовательно, $a^4 \equiv 1(mod\ 10)$и после возведения в квадрат $a^8 \equiv 1(mod\ 10)$. Поделим почленно $a^9 \equiv 7(mod\ 10)$ на $a^8 \equiv 1(mod\ 10)$ и получим a$\equiv 7(mod\ 10)$. Это означает, что a=7.

Пример.

Доказать, $1^{18} + 2^{18} + 3^{18} + 4^{18} + 5^{18} + 6^{18} \equiv -1\ (mod\ 7)$.

Доказательство. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 взаимно просты с 7. По теореме Ферма имеем

$1^6 \equiv 1\ (mod\ 7)$,

$2^6 \equiv 1\ (mod\ 7)$,

$6^6 \equiv 1\ (mod\ 7)$,

Возведем эти сравнения в куб и сложим:

$1^{18} + 2^{18} + 3^{18} + 4^{18} + 5^{18} + 6^{18} \equiv 6\ (mod\ 7) \equiv -1(mod\ 7)$.

Пример. Найти остаток от деления 7^{402} на 101.

Решение. Число 101 – простое, (7, 101)=1, следовательно, по теореме Ферма: $7^{100} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 101)$. Возведем это сравнение в четвертую степень:

$7^{400} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 101)$, умножим обе части полученного сравнения на 49, получим $7^{402} \equiv 49 (\mathrm{mod}\ 101)$. Значит, искомый остаток от деления равен 49.

Пример. Найти две последние цифры числа 6^{20}.

Пример. Найти две последние цифры числа 6^{20}.

Решение: В десятичной системе счисления две последние цифры в записи числа совпадают с остатком при делении на 100. Решение задачи сводится к нахождению остатка от деления числа 6^{20} на 100.

$6^{20} \equiv r\ (mod\ 100)$, где $0 \le r < 100$. Найдем такое целое число, удовлетворяющее одновременно эти двум условиям. Так как (6^{20}, 100)=4, разделим обе части сравнения и модуль на 4.

$9 \cdot 6^{18} \equiv \frac{r}{4} (mod\ 25)$,

Так как (6, 25)=1, и $\varphi(25) = 20$, воспользуемся теоремой Эйлера

$6^{20} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 25)$,

$6^{20} \equiv -24 (\mathrm{mod}\ 25)$,

$6^{19} \equiv -4 (\mathrm{mod}\ 25)$,

$6^{19} \equiv -54 (\mathrm{mod}\ 25)$,

$6^{18} \equiv -9 (\mathrm{mod}\ 25)$,

$9 \cdot 6^{18} \equiv -81 \equiv 19 (\mathrm{mod}\ 25)$, значит $\frac{r}{4} = 19$, r=76. Возвращаемся к исходной задаче и получаем, что число 6^{20} оканчивается на 7 и 6.

Вопросы для текущего самоконтроля

1. Какие два целых числа называют сравнимыми по модулю m?

2. Сформулируйте необходимый и достаточный признак сравнимых по модулю m целых чисел.

3. Пусть $a = bq + r$. Как связаны между собой остаток и делитель?

4. Запишите на языке сравнений утверждение: «Целое число а при делении на m дает остаток r».

5. Какие основные свойства сравнений используют при нахождении остатка от деления целого числа а на некоторое натуральное число m?

6. Какие основные идеи используют при доказательстве свойств сравнений?

7. Как от отношения делимости в кольце Z перейти к отношению сравнимости?

8. Какие основные приемы используют при доказательстве истинности сравнений?

9. Что называют классом вычетов по модулю m?

10. Как узнать, в каком классе по модулю m находится некоторое число?

11. Какие числа попадают в один и тот же класс по модулю m?

12. Что называют суммой (произведением) классов вычетов по модулю m?

13. Какие элементы называют обратными (противоположными) для данного элемента?

14. Какую систему вычетов по модулю *m* называют полной (приведенной)?

15. Сформулируйте признак полной (приведенной) системы вычетов.

16. Как найти наименьший неотрицательный (положительный, по абсолютной величине, по абсолютной величине неположительный) вычет по модулю *m*?

17. Сформулируйте определение функции Эйлера.

18. Какие практические применения функции Эйлера вам известны?

19. Как вычислить $\varphi(p), \varphi(p^{\alpha}), \varphi(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k})$?

20. Сформулируйте теоремы Эйлера и Ферма. Где применяются эти теоремы?

Индивидуальная работа 1

Числовые сравнения и их свойства. Классы вычетов.

Цель работы:

1. Проверить, сформировано ли, умение применять свойства сравнений и правил операций над классами вычетов при решении задач.
2. Проверить, сформировано ли, умение применять теорию основных алгебраических систем при установлении структуры заданного множества классов вычетов по модулю m.

Вариант 1

1. Найдите m, если $41 \equiv 2 \pmod{m}$.

2. Найдите остаток от деления 109^{345} *на* 14.

3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:

Если $a \equiv b \pmod{m}$ *и* $c \equiv d \pmod{m}$, *то* $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ и докажите его.

4. Докажите, что если $\frac{a-5b}{19} \in Z$, *то* $\frac{10a+7b}{19} \in Z$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_{12} – множество классов вычетов по mod12, Z_{12}^{*} - подмножество $Z_{12,}$ состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.

а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod12;

б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{2}$ *и* $\bar{3}$;

в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_{12}. Найдите f(32) и f(-23);

г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z_{12}^{*} циклической.

Вариант 2

1. Найдите m, если $26 \equiv 6 \pmod{m}$.

2. Найдите остаток от деления 293^{275} *на* 48.

3. Приведите словесную формулировку следующего свойства

Если $a \equiv b \pmod{m}$ *и* $c \equiv d \pmod{m}$, *то* $ac \equiv bd \pmod{m}$ и докажите его.

4. Докажите, что если $16a - 11b + c \equiv 0 \pmod{21}$, *то* $11a - b + 2c \equiv 0 \pmod{21}$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_7 – множество классов вычетов по mod 7, Z_7^{*} - подмножество $Z_{7,}$ состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.

а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 7;

б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{2}$ *и* $\bar{3}$;

в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_7. Найдите f(32) и f(-23);

г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z_7^{*} циклической.

Вариант 3

1. Найдите m, если $17 \equiv -7 \pmod{m}$.

2. Найдите остаток от деления 22^{2342} *на* 14.

3. Приведите словесную формулировку следующего свойства

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a \vdots x \text{ и } m \vdots x \Leftrightarrow b \vdots x \text{ и } m \vdots x)$ и докажите его.

4. Докажите, что если $\frac{a-5b}{17} \in Z$, *то* $\frac{2a+7b}{17} \in Z$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_5 – множество классов вычетов по mod 5, Z_5^{*} - подмножество $Z_{5,}$ состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.

а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 5;

б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\overline{4}$ *и* $\overline{3}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_5. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z_5^* циклической.

Вариант 4

1. Найдите m, если $4 \equiv -7 \pmod{m}$.
2. Найдите остаток от деления 34^{3741} *на* 26.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
Если $a \equiv b \pmod{m}$, *то* $a \equiv b + ms \pmod{m}$ и докажите его.
4. Докажите, что если $\frac{12a - 7b}{16} \in Z$, *то* $\frac{4a + 23b}{16} \in Z$.
5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_8 – множество классов вычетов по mod 8, Z_8^* - подмножество Z_8, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 8;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\overline{5}$ *и* $\overline{6}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_8. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z_8^* циклической.

Вариант 5

1. Найдите m, если $3 \equiv 19 \pmod{m}$.
2. Найдите остаток от деления 383^{175} *на* 45.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
$m = [m_1, m_2] \Rightarrow (a \equiv b \pmod{m_1}$ *и* $a \equiv b \pmod{m_2} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m})$ и докажите его.
4. Докажите, что если $\frac{11a + 2b}{19} \in Z$, *то* $\frac{18a + 5b}{19} \in Z$.
5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_5 – множество классов вычетов по mod 5, Z_5^* - подмножество Z_5, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 5;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\overline{2}$ *и* $\overline{3}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_5. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z_5^* циклической.

Вариант 6

1. Найдите m, если $-5 \equiv 14 \pmod{m}$.
2. Найдите остаток от деления 439^{291} *на* 60.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
Если $a + b \equiv c \pmod{m}$, *то* $a \equiv -b + c \pmod{m}$ и докажите его.

4. Докажите, что если $\frac{3a+4b}{5}\in Z$, *то* $\frac{2a-29b}{5}\in Z$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_7 – множество классов вычетов по mod 7, Z_7^*- подмножество Z_7, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 7;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{4}$ *и* $\bar{5}$;
в) Оределите гомоморфизм f кольца Z на Z_7. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z_7^* циклической.

Вариант 7

1. Найдите m, если $21\equiv 13(\mathrm{mod}\, m)$.
2. Найдите остаток от деления 246^{351} *на* 39.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
Для $n\in N \quad a\equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow a^n\equiv b^n(\mathrm{mod}\, m)$ и докажите его.
4. Докажите, что если $100a+10b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\, 21)$, *то* $a-2b+4c\equiv 0(\mathrm{mod}\, 21)$
5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_9 – множество классов вычетов по mod 9, Z_9^* - подмножество Z_9, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 9;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{5}$ *и* $\bar{6}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_9. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z_9^* циклической.

Вариант 8

1. Найдите m, если $17\equiv 5(\mathrm{mod}\, m)$
2. Найдите остаток от деления 345^{275} *на* 13.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства $(c,m)=1 \Rightarrow (ac\equiv bc(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow a\equiv b(\mathrm{mod}\, m))$ и докажите его.
4. Докажите, что если $\frac{7a+3b}{11}\in Z$ *то* $\frac{5a-b}{11}\in Z$

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_6 – множество классов вычетов по mod 6, Z_6^*- подмножество Z_6, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 6;
б) Найдите элементы обратные и противоположные для $\bar{4}$ *и* $\bar{5}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_6. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли группа Z_6^* циклической.

Вариант 9

1. Найдите m, если $37 \equiv -8 (\bmod m)$.
2. Найдите остаток от деления 162^{578} *на* 25.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
$m \vdots c$ *и* $c \in \mathrm{N} \Rightarrow (a \equiv b (\bmod m) \Rightarrow a \equiv b (\bmod c))$ и докажите его.
4. Докажите, что если $\frac{a+4b}{13} \in \mathrm{Z}$, *то* $\frac{2a-5b}{13} \in \mathrm{Z}$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_7 – множество классов вычетов по mod 7, Z^*_7 - подмножество Z_7, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 7;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{5}$ *и* $\bar{6}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_7. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z^*_7 циклической.

Вариант 10

1. Найдите m, если $6 \equiv -3 (\bmod m)$.
2. Найдите остаток от деления 178^{2741} *на* 22.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
Для $c \in \mathrm{N}$ $a \equiv b (\bmod m) \Leftrightarrow ac \equiv bc (\bmod m)$ и докажите его.
4. Докажите, что если $\frac{a+18b}{37} \in \mathrm{Z}$, *то* $\frac{7a+15b}{37} \in \mathrm{Z}$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_9 – множество классов вычетов по mod 9, Z^*_9 - подмножество Z_9, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 9;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{3}$ *и* $\bar{7}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_9. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z^*_9 циклической.

Вариант 11

1. Найдите m, если $-1 \equiv 58 (\bmod m)$.
2. Найдите остаток от деления 15^{231} *на* 14.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
Если $a \equiv b (\bmod m)$ *и* $c \equiv d (\bmod m)$, *то* $a + c \equiv b + d (\bmod m)$ и докажите его.
4. Докажите, что если $\frac{12a-7b}{16} \in \mathrm{Z}$, *то* $\frac{4a+23b}{16} \in \mathrm{Z}$.
5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_6 – множество классов вычетов по od 6, Z^*_6 - подмножество Z_6, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 6;
б) Найдите элементы обратные и противоположные для $\bar{2}$ *и* $\bar{3}$;

в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_6. Найдите f(32) и f(-23);

г) Проверьте, будет ли группа Z^*_6 циклической.

Вариант 12

1. Найдите m, если $48 \equiv -1(\mathrm{mod}\, m)$.
2. Найдите остаток от деления 2^{15783} *на* 25.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:

Если $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, *то* $a \equiv b + ms(\mathrm{mod}\, m)$ и докажите его.

4. Докажите, что если $\frac{3a+4b}{5} \in Z$, *то* $\frac{2a-29b}{5} \in Z$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_8 – множество классов вычетов по mod 8, Z^*_8 - подмножество Z_8, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.

а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 8;

б) Найдите элементы обратные и противоположные для $\bar{4}$ *и* $\bar{7}$;

в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_8. Найдите f(32) и f(-23);

г) Проверьте, будет ли группа Z^*_8 циклической.

Вариант 13

1. Найдите m, если $11 \equiv -5(\mathrm{mod}\, m)$.
2. Найдите остаток от деления 383^{175} *на* 45.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:

$\forall c \in N \quad a \equiv b(\mathrm{mod} m) \quad \Leftrightarrow \quad ac \equiv bc(\mathrm{mod} m)$ и докажите его.

4. Докажите, что если $\frac{11a+2b}{19} \in Z$, *то* $\frac{18a+5b}{19} \in Z$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_{10} – множество классов вычетов по mod10, Z^*_{10} - подмножество Z_{10}, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.

а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod10;

б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{6}$ *и* $\bar{9}$;

в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_{10}. Найдите f(32) и f(-23);

г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z^*_{10} циклической.

Вариант 14

1. Найдите m, если $21 \equiv -7(\mathrm{mod}\, m)$.
2. Найдите остаток от деления 15^{231} *на* 14.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:

Если $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, *то* $(a,m) = (b,m)$ и докажите его.

4. Докажите, что $\left(1+16^{3n+1}+48^{3n+1}\right) \vdots 13$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_6 – множество классов вычетов по mod 6, Z^*_6 - подмножество Z_6, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 6;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{3}$ *и* $\bar{4}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_6. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z^*_6 циклической.

Вариант 15

1. Найдите m, если $2 \equiv -42 \pmod{m}$.
2. Найдите остаток от деления 10^{2732} *на* 22.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
$a \equiv b \pmod m \;\Rightarrow\; (a \vdots x \text{ и } m \vdots x \;\Leftrightarrow\; b \vdots x \text{ и } m \vdots x)$ и докажите его.
4. Докажите, что если $\frac{a-5b}{17} \in Z,$ *то* $\frac{2a+7b}{17} \in Z$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_8 – множество классов вычетов по mod 8, Z^*_8 - подмножество Z_8, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 8;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{3}$ *и* $\bar{7}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_8. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z^*_8 циклической.

Вариант 16

1. Найдите m, если $5 \equiv -2 \pmod m$.
2. Найдите остаток от деления 439^{291} *на* 60.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
$\forall n \in N \quad a \equiv b \pmod m \;\Rightarrow\; a^n \equiv b^n \pmod m$ и докажите его.
4. Докажите, что если $\frac{a+4b}{13} \in Z,$ *то* $\frac{2a-5b}{13} \in Z$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_{10} – множество классов вычетов по mod10, Z^*_{10} - подмножество Z_{10}, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod10;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{5}$ *и* $\bar{7}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_{10}. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z^*_{10} циклической.

Вариант 17

1. Найдите m, если $-3 \equiv 28 \pmod m$.

2. Найдите остаток от деления 246^{351} *на* 39.

3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
$(c,m)=1 \;\Rightarrow\; (ac\equiv bc(\mathrm{mod}\,m) \;\Leftrightarrow\; a\equiv b(\mathrm{mod}\,m))$ и докажите его.

4. Докажите, что если $\dfrac{7a+3b}{11}\in Z,\;\; \text{то}\;\; \dfrac{5a-b}{11}\in Z$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_6 – множество классов вычетов по mod 6, Z^*_6- подмножество Z_6, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 6;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{3}$ *и* $\bar{5}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_6. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z^*_6 циклической.

Вариант 18

1. Найдите m, если $1\equiv -9(\mathrm{mod}\,m)$.

2. Найдите остаток от деления 162^{578} *на* 24.

3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
$m \vdots c \;\; и \;\; c\in N \;\Rightarrow\; (a\equiv b(\mathrm{mod}\,m) \;\Rightarrow\; a\equiv b(\mathrm{mod}\,c))$ и докажите его.

4. Докажите, что если $16a-11b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\,21),\;\; \text{то}\;\; 11a-b+2c\equiv 0(\mathrm{mod}\,21)$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_7 – множество классов вычетов по mod 7, Z^*_7- подмножество Z_7, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 7;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{3}$ *и* $\bar{4}$;
в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_7. Найдите f(32) и f(-23);
г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z^*_7 циклической.

Вариант 19

1. Найдите m, если $18\equiv 2(\mathrm{mod}\,m)$.

2. Найдите остаток от деления 22^{2342} *на* 14.

3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:
$m=[m_1,m_2] \;\Rightarrow (a\equiv b(\mathrm{mod}\,m_1) \;\; и \;\; a\equiv b(\mathrm{mod}\,m_2) \;\Leftrightarrow\; a\equiv b(\mathrm{mod}\,m))$ и докажите его.

4. Докажите, что если $\dfrac{a+18d}{37}\in Z,\;\; \text{то}\;\; \dfrac{7a+8b}{37}\in Z$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_9 – множество классов вычетов по mod 9, Z^*_9- подмножество Z_9, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.
а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod 9;
б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\bar{2}$ *и* $\bar{5}$;

в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_9. Найдите f(32) и f(-23);

г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z^*_9 циклической.

Вариант 20

1. Найдите m, если $22 \equiv 10(\operatorname{mod} m)$.
2. Найдите остаток от деления 3^{79821} *на* 17.
3. Приведите словесную формулировку следующего свойства:

$\forall c \in \mathrm{N} \quad a \equiv b(\operatorname{mod} m) \quad \Leftrightarrow \quad ac \equiv bc(\operatorname{mod} m)$ и докажите его.

4. Докажите, что если $\frac{a-5b}{19} \in \mathrm{Z},\ \text{то}\ \frac{10a+7b}{19} \in \mathrm{Z}$.

5. Пусть Z - кольцо целых чисел, Z_{11} – множество классов вычетов по mod11, Z^*_{11} - подмножество Z_{11}, состоящее из классов вычетов взаимно-простых с модулем.

а) Составьте таблицы операций $\oplus$ *и* $\otimes$ классов вычетов по mod11;

б) Найдите элементы, обратные и противоположные для $\overline{2}$ *и* $\overline{3}$;

в) Определите гомоморфизм f кольца Z на Z_{12}. Найдите f(32) и f(-23);

г) Проверьте, будет ли мультипликативная группа Z^*_{11} циклической.

Индивидуальная работа 2

Полная и приведенная системы вычетов. Функция Эйлера. Теоремы Эйлера и Ферма.

Цель работы:

1. Проверить сформировано ли умение, составлять полные и приведенные системы вычетов.
2. Проверить сформировано ли умение, применять функцию Эйлера, теоремы Эйлера и Ферма к решению задач.

Вариант 1

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 9.
2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими по абсолютной величине неположительными вычетами по модулю 16 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.
3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 200?
4. Дано $\varphi(n) = 1959552$. Найдите n,если $n = 2^{\alpha}3^{\beta}7^{\gamma}$.
5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 63^{50}.
6. Найдите остаток от деления $\left(152^{341} \cdot 23^{47} - 342^{527}\right)^{100}$ на 9.
7. Тринадцатая степень некоторого однозначного числа имеет цифрой единиц 7. Найдите это однозначное число.

Вариант 2

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 15.

2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими по абсолютной величине неположительными вычетами по модулю 11 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.

3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 315?

4. Дано $\varphi(n) = 16740$. Найдите n,если $n = 3^{\alpha}31^{\beta}$.

5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 59^{100}.

6. Найдите остаток от деления $5^{101} + 11^{101}$ на 18.

7. Докажите, что при любых *x* имеет место сравнение $x^{561} \equiv x \pmod{11}$

Вариант 3

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 12.

2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими по абсолютной величине неположительными вычетами по модулю 19 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.

3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 1000?

4. Дано $\varphi(n) = 1959552$. Найдите n,если $n = 2^{\alpha}3^{\beta}7^{\gamma}$.

5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 41^{82}.

6. Найдите остаток от деления $\left(152^{341} \cdot 23^{47} - 342^{527}\right)^{100}$ на 9.

7. Тринадцатая степень некоторого однозначного числа имеет цифрой единиц 7. Найдите это однозначное число.

Вариант 4

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 8.

2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими по абсолютной величине неположительными вычетами по модулю 13 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.

3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 2320?

4. Дано $\varphi(n) = 220$. Найдите n,если $n = 3^{\alpha}11^{\beta}$.

5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 13^{100}.

6. Найдите остаток от деления $\left(3^{132} \cdot 5^{75} + 8^{81}\right)^{102}$ на 21.

7. Докажите, что при $n \geq 3 \quad \varphi(n) - \text{\textit{четное}}$.

Вариант 5

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 13.

2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими положительными вычетами по модулю 25 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.

3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 3600?

4. Дано $\varphi(n) = 5120$. Найдите n,если $n = 2^{\alpha}11^{\beta}$.

5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 73^{81}.

6. Найдите остаток от деления $\left(12371^{56} + 34\right)^{28}$ на 11.

7. Докажите, что при любом x имеет место сравнение $x^{13} \equiv x \pmod{2730}$.

Вариант 6

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 12.

2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими положительными вычетами по модулю 21 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.

3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 1285?

4. Дано $\varphi(n) = 11000$. Найдите n,если $n = 5^{\alpha}11^{\beta}$.

5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 19^{126}.

6. Найдите остаток от деления $\left(152^{341} \cdot 23^{47} - 342^{527}\right)^{100}$ на 9.

7. Докажите, что сотая степень любого целого числа либо делится на 125, либо при делении на 125 дает в остатке 1.

Вариант 7

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 10.

2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими положительными вычетами по модулю 21 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.

3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 2752?

4. Дано $\varphi(n) = 40560$. Найдите n,если $n = 2^{\alpha}5^{\beta}13^{\gamma}$.

5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 11^{105}.

6. Найдите остаток от деления $\left(137^{153} - 81^{91}\right)^{134}$ на 13.

7. Девятая степень некоторого однозначного числа имеет цифрой единиц 7. Найдите это однозначное число.

Вариант 8

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 7.
2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими положительными вычетами по модулю 17 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.
3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 3825?
4. Дано $\varphi(n) = 216$. Найдите n,если $n = 3^{\alpha}13^{\beta}$.
5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 13^{110}.
6. Найдите остаток от деления $9^{1972} - 7^{1972}$ на 10.
7.Докажите, что при любом x имеет место сравнение $x^{560} \equiv 1 \pmod{561}$, *где* $(x,561)=1$.

Вариант 9

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 11.
2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наибольшими отрицательными вычетами по модулю 11 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.
3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 1314?
4. Дано $\varphi(n) = 5440$. Найдите n,если $n = 2^{\alpha}5^{\beta}17^{\gamma}$.
5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 17^{56}.
6. Найдите остаток от деления $2222^{5555} + 5555^{2222}$ на 7.
7. Докажите, что при любом a имеет место сравнение $a^7 \equiv a \pmod{42}$, $a \in \mathrm{Z}$.

Вариант 10

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 14.
2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наибольшими отрицательными вычетами по модулю 12 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.
3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 1240?
4. Дано $\varphi(n)=1560$. Найдите n,если $n = 2^{\alpha}11^{\beta}13^{\gamma}$.
5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 13^{54}.
6. Найдите остаток от деления $66^{17} \cdot 25^{32} + 652^{343}$ на 8.

7. При каком натуральном n имеет место равенство $\varphi(n) = \frac{1}{2}n$?

Вариант 11

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 6.
2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наибольшими отрицательными вычетами по модулю 20 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.
3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 4850?
4. Дано $\varphi(n) = 634933$. Найдите n,если $n = 13^{\alpha}17^{\beta}$.
5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 19^{82}.
6. Найдите остаток от деления $\left(20^{16} - 7^{35} - 81^{91}\right)^{134}$ на 13.
7. При каком натуральном n имеет место равенство $\varphi(n) = \frac{1}{3}n$?

Вариант 12

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 9.
2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наибольшими отрицательными вычетами по модулю 17 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.
3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 375?
4. Дано $\varphi(n) = 54450000$. Найдите n,если $n = 5^{\alpha}33^{\beta}$.
5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 803^{1254}.
6. Найдите остаток от деления $\left(137^{153} - 81^{91}\right)^{134}$ на 13.
7. Докажите, что $\varphi(2m)$ может быть равно либо $\varphi(m)$, либо $2\varphi(m)$. Найдите критерии для каждого из этих случаев.

Вариант 13

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 15.
2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 абсолютно наименьшими вычетами по модулю 7 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.
3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 1320?
4. Дано $\varphi(n) = 1792$. Найдите n,если $n = 2^{\alpha}5^{\beta}113^{\gamma}$.
5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 289^{289}.

6. Найдите остаток от деления $(81^{100}+31^{100})^{243}$ на 15.

7. Покажите, что для натурального *n* равенство $\varphi(n)=\frac{1}{4}n$ невозможно.

Вариант 14

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 12.
2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650абсолютно наименьшими вычетами по модулю 13 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.
3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 1245?
4. Дано $\varphi(n)=705894$. Найдите n,если $n=7^{\alpha}$.
5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 11^{203}.
6. Найдите остаток от деления $(7^{77}+4^{444})^{114}$ на 10.
7. Тринадцатая степень некоторого однозначного числа имеет цифрой единиц 7. Найдите это однозначное число.

Вариант 15

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов модулю 11.
2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 абсолютно наименьшими вычетами по модулю 24 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.
3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 3840?
4. Дано $\varphi(n)=42000$. Найдите n,если $n=5^{\alpha}7^{\beta}11^{\gamma}$.
5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 19^{79} .
6. Найдите остаток от деления $3^{5k}+4^{5l+2}+5^{5m+1}$, $k,l,m\in \mathrm{Z}$ на 11.
7. Найдите $x\in \mathrm{N}$ такое, что $\varphi(5x)=\varphi(7x)$.

Вариант 16

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 10.
2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 абсолютно наименьшими вычетами по модулю 18 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.
3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 1836?
4. Дано $\varphi(n)=5120$. Найдите n,если $n=2^{\alpha}11^{\beta}$.

5. Дано $\varphi(n) = 120$. Найдите n,если $n = p^{\alpha} q^{\beta}$, p, q -различные простые числа.

6. Найдите остаток от деления $17^{1993} - 5 \cdot 47^{1993}$ на 36.

7. Докажите, что если $n = mp$, $(m, p) = p$ *и* $p - простое число$, то $\varphi(n) = \varphi(m)p$.

Вариант 17

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 14.

2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими неотрицательными вычетами по модулю 13 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.

3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 1936?

4. Дано $\varphi(n) = 294$. Найдите n,если $n = 7^{\alpha}$.

5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 13^{219}.

6. Найдите остаток от деления $\left(12371^{56} + 34\right)^{28}$ на 24.

7. Найти *x*, если $\varphi(x) = \frac{2}{3}x$.

Вариант 18

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 13.

2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими неотрицательными вычетами по модулю 23 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.

3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 4350?

4. Дано $\varphi(n) = 13310$. Найдите n,если $n = 11^{\alpha}$.

5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 473^{1971} .

6. Найдите остаток от деления $776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ на 3.

7. Докажите, что $\varphi(4n) = 2\varphi(2n)$ и $\varphi(4n + 2) = \varphi(2n + 1)$

Вариант 19

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 8.

2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими неотрицательными вычетами по модулю 14 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.

3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 2640?

4. Дано $\varphi(n) = 1959552$. Найдите n,если $n = 2^{\alpha}3^{\beta}7^{\gamma}$.

5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 37^{201}.

6. Найдите остаток от деления $13^{1054} - 23 \cdot 16^{285} + 22^{17}$ на 15.

7. Докажите, что при любом x имеет место сравнение $x^{561} \equiv x \pmod{11}$.

Вариант 20

1. Запишите три различных вида как полной, так и приведенной систем вычетов по модулю 8.
2. Замените числа -4226, -583, -37, -11,-9, 181,1866, 9650 наименьшими неотрицательными вычетами по модулю 15 и дополните их до соответствующей полной системы вычетов.
3. Сколько существует положительных правильных несократимых дробей со знаменателем 1312?
4. Дано $\varphi(n) = 96$. Найдите n,если $n = 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$.
5. Найдите две последние цифры в десятичном представлении числа 17^{500}.
6. Найдите остаток от деления $13^{16} - 2^{25}5^{12}$ на 3.
7. Докажите, что $a^{n(p-1)+1} \equiv a \pmod{p}$, где p-простое число, $n \in \mathrm{N}$, $a \in \mathrm{Z}$, $(a, p) = 1$.

СРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ

Основные понятия

Определение

Сравнение вида f(x)≡0(mod m) (1), где f(x)=$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$– многочлен с целыми коэффициентами, называется сравнением с неизвестной величиной.

Если m не делит a_0, то говорят, что n – степень сравнения (1).

Определение.

Целое число x, удовлетворяет сравнению f(x)≡0(mod m), если при подстановке оно обращает его в верное числовое сравнение.

Несложно показать, что если какое-нибудь число x удовлетворяет сравнению (1), то любое другое число, сравнимое с x по mod m, также будет удовлетворять этому сравнению.

Определение.

Решением сравнения (1) является класс вычетов по модулю m, удовлетворяющий этому сравнению.

Для нахождения решения сравнения (1) нужно: 1) выписать полную систему вычетов по модулю m; 2) путем испытаний проверить какие вычеты удовлетворяют сравнению; 3) записать ответ.

Пример. Найти все решения сравнения $2x^2 + 2x + 11 \equiv 0(mod\ 5)$.

Решение: Выписываем полную систему вычетов по модулю 5: 0,1,2,3,4.

x=0: $11 \equiv 0(mod\ 5)$ не верно,

x=1: $15 \equiv 0(mod\ 5)$ верно,

x=2: $23 \equiv 0(mod\ 5)$ не верно,

x=3: $35 \equiv 0(mod\ 5)$ верно,

x=4: $51 \equiv 0(mod\ 5)$ не верно,

Запишем решение сравнения в виде x $\equiv 1; 3(mod\ 5)$.

Определение.

Два сравнения с неизвестной называют равносильными если множества целых чисел удовлетворяющих каждому из них совпадают.

Свойства равносильных сравнений.

1. Если в сравнении (1) коэффициенты при переменной заменить сравнимыми по модулю числами, то получится сравнение равносильное данному.
2. Если обе части сравнения (1) умножить на число взаимно простое с модулем, то получится сравнение равносильное данному.
3. Если обе части и модуль сравнения (1) умножить на целое положительное число, то получится сравнение равносильное данному.

Линейные сравнения и их системы

Определение.

Сравнение вида а$x \equiv b(mod\ \mathrm{m})\ (2)$, называется линейным сравнением (сравнением первой степени).

Выделяют три случая в решении линейных сравнений:

1) Если (a, m)=1, то сравнение (2) имеет единственное решение;
2) Если (a, m)=d, b$\not\vdots$d, то сравнение (2) не имеет решений;
3) Если (a, m)=d, b$\vdots$d, то сравнение (2) имеет d решений.

Для решения сравнения (2) применяют следующие способы: способ испытания полной системы вычетов, способ Эйлера, способ преобразования коэффициентов.

Пример. Решить сравнение $5x \equiv 7(mod\ 12)$.

Решение.

1 способ. (5,12)=1, значит сравнение имеет единственное решение. Данное сравнение решим способом Эйлера: $x \equiv b \cdot a^{\varphi(m)-1}$

$x \equiv 7 \cdot 5^{\varphi(12)-1} \equiv 7 \cdot 5^3 \equiv 875 \equiv -1(mod\ 12)$.

2 способ. $5x \equiv 7(mod\ 12)$, отнимем от правой части сравнения 12, получаем $5x \equiv -5\ (mod\ 12)$, разделим обе части сравнения на 5, получаем $x \equiv -1(mod\ 12)$.

Пример. Решить сравнение $10x \equiv 25\ (mod\ 35)$.

Решение. (10, 35)=5 и 25$\vdots$ 5, значит сравнение имеет 5 решений. Перейдем к равносильному сравнению, разделив обе части сравнения и модуль на 5.

$2x \equiv 5(\mathrm{mod}\,7)$,

$2x \equiv -2(\mathrm{mod}\,7)$,

$x \equiv -1(\mathrm{mod}\,7)$.

Вернемся к исходному модулю 35,

$x \equiv -1{,}6{,}13{,}20{,}27\ (mod\ 35)$.

Пример. Решить в целых числах уравнение$53x + 47y = 11$.

Решение. Данное уравнение равносильно сравнению $53x \equiv 11\ (mod\ 47)$. Решим это сравнение способом преобразования коэффициентов.

$6x \equiv -36(\mathrm{mod}\,47)$,

$x \equiv -6(\mathrm{mod}\,47)$,

$x = -6 + 47t$,

$$y = \frac{11 - 53x}{47} = \frac{11 - 53(-6 + 47t)}{47} = \frac{329 - 2491t}{47} = 7 - 53t.$$

Итак, $\begin{cases} x = -6 + 47t, \\ y = 7 - 53t. \end{cases}$

Определение.

Систему вида $\begin{cases} a_1 x \equiv b_1 (\operatorname{mod} m_1), \\ a_2 x \equiv b_2 (\operatorname{mod} m_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_k x \equiv b_k (\operatorname{mod} m_k). \end{cases}$ называют системой линейных сравнений с одной неизвестной. Решением данной системы называется множество чисел удовлетворяющих каждому сравнению системы.

Пример. Решить систему сравнений $\begin{cases} 3x \equiv 1(\operatorname{mod} 5), \\ 5x \equiv 4(\operatorname{mod} 7), \\ 2x \equiv 5(\operatorname{mod} 3). \end{cases}$

Решение. Так как каждое сравнение имеет единственное решение и модули сравнений попарно взаимно просты, то система имеет решение.

Решим первое сравнение способом преобразования коэффициентов.

$3x \equiv 1(\operatorname{mod} 5),$

$3x \equiv 6(\operatorname{mod} 5),$

$x \equiv 2(\operatorname{mod} 5), x = 2 + 5t.$

Подставим во второе сравнение системы полученное выражение вместо переменной.

$5(2 + 5t) \equiv 4(\operatorname{mod} 7),$

$25t \equiv -6(\operatorname{mod} 7),$

$-3t \equiv -6(\operatorname{mod} 7),$

$t \equiv 2(\operatorname{mod} 7), t = 2 + 7k, x = 2 + 5(2 + 7k) = 12 + 35k.$

Подставим в третье сравнение системы полученное выражение вместо переменной.

$2(12+35k)\equiv 5(\mathrm{mod}\,3),$
$70k\equiv -19(\mathrm{mod}\,3),$
$k\equiv -1(\mathrm{mod}\,3),\ k=-1+3s,\ x=12+35(-1+3s)=-23+105s,$
$x\equiv -23(\mathrm{mod}\,105).$

Сравнения n-ой степени

Определение.

Сравнение вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$, (3) $a_0\not\equiv 0(\mathrm{mod}p)$ ир-простое число, называется сравнением n-ой степени по простому модулю.

Теорема 1. Число решений сравнения (3) не превосходит n.

*Теорема 2.*Сравнение (3) равносильно сравнению, степень которого не превосходит p.

Следствие. $x^n\equiv x^{r+q}(\mathrm{mod}\,p)$, где r-остаток, а q– неполное частное от деления показателя степени n на модуль p.

Теорема 3. Если сравнение (3) имеет более n различных решений, то все его коэффициенты кратны p.

Теорема (Вильсона). Сравнение $(p-1)!+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ выполняется тогда и только тогда, когда p-простое число.

Пример. Решить сравнение $2x^8+6x^7-x^6+2x^5+3x^4-x^3+4x^2+8x-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,5).$

Решение. Перейдем к равносильному сравнению, заменив коэффициенты сравнимыми по модулю 5 числами и понизив степени, используя следствие из теоремы 2.

$2x^8\equiv 2x^4,\quad 6x^7\equiv x^3,\quad x^6\equiv x^2,\quad 2x^5\equiv 2x,\quad 4\equiv -1,\quad 8\equiv 3$. Получаем сравнение

$2x^4+x^3-x^2+2x+3x^4-x^3-x^2+3x-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,5).$
$5x^4-2x^2+5x-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,5),$
$5x^4\equiv 0,\quad 5x\equiv 0,$
$-2x^2-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,5).$

Решим полученное сравнение путем испытания полной системы вычетов. Замечаем, что ни одно из чисел -2,-1,0,1,2 полной системы вычетов по модулю 5, не удовлетворяет полученному сравнению, значит сравнение не имеет решений.

Пример. Решить сравнение $4x^3-5x^2+7x+10\equiv 0(\bmod 27)$.

Решение. Так как $27=3^3$, то решение этого сравнения сводится к последовательному решению сравнений по модулям 3, 3^2 и 3^3.

1 шаг. $4x^3-5x^2+7x+10\equiv 0(\bmod 3)$, заменим коэффициенты, сравнимыми по модулю 3 числами.

$x^3+x^2+x+1\equiv 0(\bmod 3)$, понизим степень сравнения $x^3\equiv x(\bmod 3)$, получим

$x^2+2x+1\equiv 0(\bmod 3)$, решаем методом испытания полной системы вычетов.

$x\equiv -1(\bmod 3)$, $x=-1+3t$, $x+1=3t$.

2 шаг. $4x^3-5x^2+7x+10\equiv 0(\bmod 9)$, заменим коэффициенты, сравнимыми по модулю 9 числами.

$4x^3+4x^2-2x+1\equiv 0(\bmod 9)$.

Разложим многочлен левой части сравнения по степеням ($x+1$) по схеме Горнера и выполним замену. Для дальнейшего решения сравнения нам достаточно найти только первые два коэффициента, так как все остальные слагаемые после замены $x+1=3t$, будут сравнимы с нулем по модулю 9.

	4	4	-2	1
-1	4	0	-2	**3**
-1	4	-4	**2**	

$3+2\cdot 3t\equiv 0(\bmod 9)$,

$6t\equiv -3(\bmod 9)$,

$6t\equiv 6(\bmod 9)$,

$2t\equiv 2(\bmod 3)$,

$t\equiv 1(\bmod 3)$.

$t=1+3k$, $x=-1+3(1+3k)=2+9k$.

$x - 2 = 9k$.

3 шаг. $4x^3 - 5x^2 + 7x + 10 \equiv 0(\bmod 27)$.

Разложим многочлен левой части сравнения по степеням ($x - 2$) по схеме Горнера и выполним замену. Для дальнейшего решения сравнения нам достаточно найти только первые два коэффициента, так как все остальные слагаемые после замены $x - 2 = 9k$, будут сравнимы с нулем по модулю 9.

	4	-3	7	10
2	4	3	13	**36**
2	4	11	**35**	

$$36 + 35 \cdot 9k \equiv 0(\bmod 27),$$
$$4 + 35k \equiv 0(\bmod 3),$$
$$35k \equiv -4(\bmod 3),$$
$$2k \equiv 2(\bmod 3),$$
$$k \equiv 1(\bmod 3).$$

$k = 1 + 3s$, $x = 2 + 9(1 + 3s) = 11 + 27s$.

Получили решение исходного сравнения $x \equiv 11(\bmod 27)$.

Теорема. Если числа m_1, m_2, …, m_k попарно взаимно просты, то сравнение $f(x) \equiv 0(\bmod m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k)$ равносильно системе сравнений

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0(\bmod m_1), \\ f(x) \equiv 0(\bmod m_2), \\ .... \\ f(x) \equiv 0(\bmod m_k). \end{cases}.$$

Пример. Решить сравнение $3x^3 + 6x^2 + x + 10 \equiv 0(\bmod 15)$.

Решение. Так как $15 = 3 \cdot 5$, получаем систему $\begin{cases} 3x^3 + 6x^2 + x + 10 \equiv 0(\bmod 3), \\ 3x^3 + 6x^2 + x + 10 \equiv 0(\bmod 5). \end{cases}$

После преобразования коэффициентов, получаем

$$\begin{cases} x+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3), \\ -2x^3+x^2+x\equiv 0(\mathrm{mod}\,5). \end{cases}$$

Первое сравнение системы уже решено, решаем второе сравнение способом испытания полной системы вычетов по модулю 5, получаем $x\equiv 0,1,2(\mathrm{mod}\,5)$. Переходим к решению совокупности трех систем линейных сравнений.

1. $\begin{cases} x\equiv -1(\mathrm{mod}\,3), \\ x\equiv 0(\mathrm{mod}\,5). \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x\equiv -1(\mathrm{mod}\,3), \\ x\equiv 1(\mathrm{mod}\,5). \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x\equiv -1(\mathrm{mod}\,3), \\ x\equiv 2(\mathrm{mod}\,5). \end{cases}$

Решая каждую из систем, получаем $x\equiv -4,2,5(\mathrm{mod}\,15)$.

Вопросы для текущего самоконтроля

1. Как называется сравнение $ax\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ (1)?

2. Сколько решений может иметь сравнение (1)?

3. Как решить сравнение (1) способом Эйлера?

4. Как решить сравнение (1) способом преобразования коэффициентов?

5. Если система сравнений первой степени по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_k$ с одним неизвестным имеет решение, то класс вычетов по какому модулю будет являться этим решением?

6. В чем состоит идея решения сравнений первой степени с одним неизвестным?

7. Каковы условия разрешимости неопределенного уравнения $ax+by=c$(2)?

8. Как найти общее решение уравнения (2) в целых числах, зная какое-либо его частное решение?

9. Как найти решение уравнения (2) в целых положительных числах?

10. Что называется решением сравнения $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\,m)$.

11. Какие сравнения с неизвестной величиной называют равносильными?

12. Что называется сравнением n-ой степени с неизвестной величиной?

13. Дано сравнение $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\,m)$. Получим ли равносильное сравнение, если:

1) умножим обе части сравнения на натуральное число;

2) разделим обе части сравнения и модуль на натуральное число;

3) прибавим к одной части сравнения число, кратное модулю;

4) заменим коэффициент при переменной на сравнимое по модулю число;

5) разделим обе части сравнения на число, взаимно простое с модулем?

14. В чем состоит идея решения сравнений n-ой степени с неизвестной величиной по модулю p (p^{α}, $m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_к^{\alpha_к}$), где p-простое число?

Индивидуальная работа 3

Цель работы:

Проверить, сформировано ли умение, решать сравнения и системы сравнений с неизвестной величиной, а также применять полученные умения к решению прикладных задач.

Вариант 1

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $92x \equiv 20 \pmod{284}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{13}, \\ 5x \equiv 11 \pmod{16}, \\ 5x \equiv 2 \pmod{9}. \end{cases}$

3. Сколько потребуется сосудов емкостью 0,5 и 0,8 л для разлива 12 л жидкости так, чтобы все взятые сосуды были наполнены?

4. Решите сравнения: а) $28x^9 + 29x^8 - 26x^7 + 20x^4 - 17x + 23 \equiv 0 \pmod{3}$,

б) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x - 10 \equiv 0 \pmod{343}$,

в) $x^4 - 33x^3 + 8x - 26 \equiv 0 \pmod{35}$.

5. Припишите справа к числу 523 такие три цифры, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8, 9.

Вариант 2

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $14x \equiv 50 \pmod{62}$.

2.Решите систему $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{14}, \\ 5x \equiv 1 \pmod{9}, \\ 7x \equiv 2 \pmod{25}. \end{cases}$

3.На обработку детали типа А токарь затрачивает 43 мин., а типа Б – 12,5 мин. Сколько деталей типа А и Б обработает токарь за 7 часов?

4. Решите сравнения: а) $34x^{10} - 29x^7 + 43x^4 - 19x + 37 \equiv 0 \pmod{5}$

б) $9x^2 + 29x + 62 \equiv 0 \pmod{64}$,

в) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 9x^2 + 4x - 12 \equiv 0 \pmod{42}$.

5. Припишите справа к числу 32 такие две цифры, чтобы полученное шестизначное число делилось на 3 и 7.

Вариант 3

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $14x \equiv 9 \pmod{37}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 2x \equiv 5 \pmod{21}, \\ 5x \equiv 22 \pmod{31}, \\ 4x \equiv 5 \pmod{29}. \end{cases}$

3. Товарный вагон с грузом типа А весит 27 т, а с грузом типа Б – 43 т. Сколько вагонов, груженых товарами Аи Б потребуется для формирования состава весом 1800т?

4. Решите сравнения: а) $16x^{12} - 27x^7 + 6x^3 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$,

б) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x - 10 \equiv 0 \pmod{343}$,

в) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x - 10 \equiv 0 \pmod{135}$.

5. Зная, что число 13xy45z делится на 792, найдите x, y, z.

Вариант 4

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $23x \equiv 5 \pmod{71}$.
1. Решите систему $\begin{cases} 3x \equiv 8 \pmod{20}, \\ 5x \equiv 8 \pmod{9}, \\ 4x \equiv 1 \pmod{21}. \end{cases}$
2. Дистанцию в 6,7 км для эстафеты требуется разделить на участки по 175 м и 300м для женщин и мужчин соответственно. Из какого количества спортсменов мужчин и женщин должны состоять команды?

4. Решите сравнения: а) $x^{101} + 3x^{15} + x^{11} - 3x^5 + 9x^2 + 10x - 5 \equiv 0 \pmod{11}$,

б) $6x^3 - 7x - 11 \equiv 0 \pmod{125}$,

в $x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 2x - 2 \equiv 0 \pmod{50}$.

5. Число, записываемое в десятичной системе счисления как 4x87y6, делится на 56. Найдите это число.

Вариант 5

2. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $73x \equiv 39 \pmod{28}$.

3. Решите систему $\begin{cases} 8x \equiv 1 \pmod{13}, \\ 5x \equiv 7 \pmod{18}, \\ 2x \equiv 1 \pmod{9}. \end{cases}$

4. Сколько можно купить стульев по 370 рублей и табуреток по 140 рублей на 3300 рублей ?

5. Решите сравнения: а) $2x^{35}-17x^{15}+13x^{8}-3x^{5}+12x+5\equiv 0\pmod{11}$,

б) $x^3+3x^2-5x+16\equiv 0\pmod{125}$,

в) $x^5-5x^4-5x^3+25x^2+4x-20\equiv 0\pmod{147}$.

5. Между 200 и 500 найдите все целые числа, которые при делении на 4,5 и 7 дают соответственно остатки 3,4 и 5

Вариант 6

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $15x\equiv 21\pmod{18}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 5x\equiv 9\pmod 4, \\ 6x\equiv 13\pmod 5, \\ 8x\equiv 9\pmod 7. \end{cases}$

3. Сколько комплектов шахмат по 46 рублей и шашек по 19 рублей можно купить на 620 рублей?

4. Решите сравнения: а) $16x^{12}-27x^{7}+6x^{3}+1\equiv 0\pmod 5$,

б) $x^4+4x^3+2x^2+x+12\equiv 0\pmod{625}$,

в) $x^5+3x^4-7x^3+4x^2+4x-10\equiv 0\pmod{175}$.

5. Найдите целые точки прямых 4x-7y=9, 2x+9y=15 и 5x-13y=12, лежащие на одном перпендикуляре к оси абсцисс.

Вариант 7

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $14x\equiv 9\pmod{37}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 31x\equiv 23\pmod{15}, \\ 14x\equiv 22\pmod{13}, \\ x\equiv 5\pmod{14}. \end{cases}$

3. Сколько потребуется автобусов по 26 мест и автомашин по 6 мест, чтобы вывезти на экскурсию 310 туристов?

4. Решите сравнения: а) $6x^8-17x^7+18x^6+x^5-12x^2-x-8\equiv 0\pmod 5$,

б) $x^4-5x^3+2x^2-6x-21\equiv 0\pmod{27}$,

в) $x^4-4x^3+2x^2+x+6\equiv 0\pmod{135}$.

5. Найдите все числа вида $\overline{xy9z}$, делящиеся на 132.

Вариант 8

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $82x\equiv 14\pmod{202}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 14x \equiv -1 \pmod{13}, \\ 12x \equiv 32 \pmod{11}, \\ 13x \equiv 5 \pmod{12}. \end{cases}$

3. Сколько потребуется грузовых машин грузоподъемностью 3,5 т и 4,5 т, чтобы перевезти груз массой 53 т ?

4. Решите сравнения: а) $27x^{18} + 22x^{13} + 12x + 19 \equiv 0 \pmod{13}$,

б) $4x^3 - 10x^2 + 16x - 35 \equiv 0 \pmod{125}$,

в) $2x^6 + 6x^4 - 7x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{24}$.

5. Найдите все пары чисел вида $\overline{1xy2}$ и $\overline{x12y}$, такие, чтобы оба числа делились на 7.

Вариант 9

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $14x \equiv 50 \pmod{62}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{13}, \\ 2x \equiv 17 \pmod{21}, \\ 5x \equiv 31 \pmod{32}. \end{cases}$

3. Сколько потребуется труб длиной 9 и 13 м, чтобы проложить газопровод длиной 150 м? Резать трубы не разрешается.

4. Решите сравнения: а) $23x^{12} - 11x^{11} + 20x + 32 \equiv 0 \pmod{11}$,

б) $5x^3 - 4x^2 + 16x - 2 \equiv 0 \pmod{27}$,

в) $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 18x + 2 \equiv 0 \pmod{30}$.

5. Найдите число, кратное семи и дающее остаток 1 от деления на 2, 3, 4, 5, 6.

Вариант 10

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $15x \equiv 21 \pmod{14}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 7x \equiv 4 \pmod{15}, \\ 3x \equiv 23 \pmod{28}, \\ 5x \equiv 8 \pmod{11}. \end{cases}$

3. Сколько билетов стоимостью 30 рублей и 50 рублей можно купить на 1490 рублей?

4. Решите сравнения: а) $x^8 - x^4 + 2x - 18 \equiv 0 \pmod{5}$,

б) $4x^4 - 2x^3 + 15x^2 - x - 18 \equiv 0 \pmod{64}$,

в) $31x^4 + 57x^3 + 96x + 191 \equiv 0 \pmod{15}$.

5. Припишите справа к числу 79 такое двузначное число, чтобы полученное четырехзначное число при делении на 11 и 13 дало бы соответственно остатки 3 и

Вариант 11

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $80x \equiv 4 \pmod{126}$.

2.Решите систему $\begin{cases} 2x \equiv 5 \pmod{21}, \\ 5x \equiv 22 \pmod{31}, \\ 4x \equiv 5 \pmod{29}. \end{cases}$

3. Сколько почтовых марок по 3 рубля и 4 рубля можно купить на 50 рублей?

4.Решите сравнения: а) $28x^9 + 29x^8 - 26x^7 + 20x^4 - 17x + 23 \equiv 0 \pmod 3$,

б) $9x^2 + 29x + 62 \equiv 0 \pmod{64}$,

в) $2x^6 + 6x^4 - 7x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{24}$.

5. Припишите справа к числу 523 такие три цифры, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8, 9.

Вариант 12

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $19x \equiv 4 \pmod{25}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{14}, \\ 5x \equiv 1 \pmod{9}, \\ 7x \equiv 2 \pmod{25}. \end{cases}$

3. Определите день рождения, зная сумму S произведений числа месяца на 12 и номера месяца на 31, если S=436.

4. Решите сравнения: а) $2x^{35} - 17x^{15} + 13x^8 - 3x^5 + 12x + 5 \equiv 0 \pmod{11}$,

б) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x - 10 \equiv 0 \pmod{343}$,

в) $2x^6 + 6x^4 - 7x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{24}$.

5. Припишите справа к числу 32 такие две цифры, чтобы полученное шестизначное число делилось на 3 и 7.

Вариант 13

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $92x \equiv 20 \pmod{284}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 3x \equiv 8 \pmod{20}, \\ 5x \equiv 8 \pmod{9}, \\ 4x \equiv 1 \pmod{21}. \end{cases}$

3. Разложите число 150 на два положительных слагаемых, одно из которых кратно 11, а второе – 17.

4. Решите сравнения: а) $75x^{13} - 62x^{12} - 53x^{11} - 24x^6 + 13x - 27 \equiv 0 \pmod 7$,

б) $x^3 + 3x^2 - 5x + 16 \equiv 0 \pmod{125}$, в) $x^4 - 33x^3 + 8x - 26 \equiv 0 \pmod{35}$.

5. Зная, что число 13xy45z делится на 792, найдите x, y, z.

Вариант 14

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $75x \equiv 54 \pmod{21}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{13}, \\ 5x \equiv 11 \pmod{16}, \\ 5x \equiv 2 \pmod{9}. \end{cases}$

3. Из имеющихся резисторов сопротивлением по 1,2 и 1,7 Ом требуется составить последовательным соединением цепь сопротивлением 11,1 Ом. Сколько резисторов того и другого типа потребуется?

4. Решите сравнения: а) $23x^{12} - 11x^{11} + 20x + 32 \equiv 0 \pmod{11}$,

б) $9x^2 + 29x + 62 \equiv 0 \pmod{64}$,

в) $x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 4x - 20 \equiv 0 \pmod{147}$.

5. Число, записываемое в десятичной системе счисления как 4x87y6, делится на 56. Найдите это число.

Вариант 15

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $27x \equiv 11 \pmod{106}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 7x \equiv 4 \pmod{15}, \\ 3x \equiv 23 \pmod{28}, \\ 5x \equiv 8 \pmod{11}. \end{cases}$

3. Требуется найти два натуральных числа, каждое из которых не превышает 200, причем таких, что разность между ними равна 11, уменьшаемое кратно 9, а вычитаемое кратно 17.

4. Решите сравнения: а) $x^{101} + 3x^{15} + x^{11} - 3x^5 + 9x^2 + 10x - 5 \equiv 0 \pmod{11}$,

б) $5x^3 - 4x^2 + 16x - 2 \equiv 0 \pmod{27}$,

в) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 \equiv 0 \pmod{135}$.

5. Между 200 и 500 найдите все целые числа, которые при делении на 4,5 и 7 дают соответственно остатки 3,4 и 5

Вариант 16

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $14x \equiv 50 \pmod{62}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 8x \equiv 1 \pmod{13}, \\ 5x \equiv 7 \pmod{18}, \\ 2x \equiv 1 \pmod{9}. \end{cases}$

3. Сколько потребуется сосудов емкостью 0,5 и 0,8 л для разлива 12 л жидкости так, чтобы все взятые сосуды были наполнены?

4. Решите сравнения: а) $34x^{10} - 29x^{7} + 43x^{4} - 19x + 37 \equiv 0 \pmod{5}$,

б) $6x^{3} - 7x - 11 \equiv 0 \pmod{125}$,

в) $x^{4} - 3x^{3} + 6x^{2} - 18x + 2 \equiv 0 \pmod{30}$.

5. Найдите целые точки прямых 4x-7y=9, 2x+9y=15 и 5x-13y=12, лежащие на одном перпендикуляре к оси абсцисс.

Вариант 17

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $113x \equiv 89 \pmod{311}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{13}, \\ 2x \equiv 17 \pmod{21}, \\ 5x \equiv 31 \pmod{32}. \end{cases}$

3. На обработку детали типа А токарь затрачивает 43 мин., а типа Б – 12,5 мин. Сколько деталей типа А и Б обработает токарь за 7 часов?

4. Решите сравнения: а) $16x^{12} - 27x^{7} + 6x^{3} + 1 \equiv 0 \pmod{5}$,

б) $9x^{2} + 29x + 62 \equiv 0 \pmod{64}$,

в) $x^{4} - 3x^{3} - 4x^{2} - 2x - 2 \equiv 0 \pmod{50}$.

5. Найдите все числа вида $\overline{xy9z}$, делящиеся на 132.

Вариант 18

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $39x \equiv 5 \pmod{11}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 3x \equiv 8 \pmod{20}, \\ 5x \equiv 8 \pmod{9}, \\ 4x \equiv 1 \pmod{21}. \end{cases}$

3. Сколько потребуется труб длиной 9 и 13 м, чтобы проложить газопровод длиной 150 м? Резать трубы не разрешается.

4. Решите сравнения: а) $27x^{18} + 22x^{13} + 12x + 19 \equiv 0 \pmod{13}$,

б) $x^{4} + 4x^{3} + 2x^{2} + x + 12 \equiv 0 \pmod{625}$,

в) $x^{5} - 3x^{4} + 5x^{3} + 9x^{2} + 4x - 12 \equiv 0 \pmod{42}$.

5. Найдите все пары чисел вида $\overline{1xy2}$ и $\overline{x12y}$, такие, чтобы оба числа делились на 7.

Вариант 19

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $21x \equiv 10 \pmod{25}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{14}, \\ 5x \equiv 1 \pmod{9}, \\ 7x \equiv 2 \pmod{25}. \end{cases}$

3. Сколько можно купить стульев по 370 рублей и табуреток по 140 рублей на 3300 рублей ?

4. Решите сравнения: а) $x^8 - x^4 + 2x - 18 \equiv 0 \pmod{5}$,

б) $4x^3 - 10x^2 + 16x - 35 \equiv 0 \pmod{125}$,

в) $x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 4x - 10 \equiv 0 \pmod{175}$.

5. Найдите число, кратное семи и дающее остаток 1 от деления на 2, 3, 4, 5, 6

Вариант 20

1. Решите сравнение двумя способами: способом Эйлера и способом преобразование коэффициентов $15x \equiv 21 \pmod{14}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 31x \equiv 23 \pmod{15}, \\ 14x \equiv 22 \pmod{13}, \\ x \equiv 5 \pmod{14}. \end{cases}$

3. Сколько потребуется сосудов емкостью 0,5 и 0,8 л для разлива 12 л жидкости так, чтобы все взятые сосуды были наполнены?

4. Решите сравнения: а) $2x^{35} - 17x^{15} + 13x^8 - 3x^5 + 12x + 5 \equiv 0 \pmod{11}$,

б) $4x^4 - 2x^3 + 15x^2 - x - 18 \equiv 0 \pmod{64}$,

в) $x^4 - 33x^3 + 8x - 26 \equiv 0 \pmod{35}$.

5. Припишите справа к числу 79 такое двузначное число, чтобы полученное четырехзначное число при делении на 11 и 13 дало бы соответственно остатки 3 и

СИСТЕМА ОЦЕНИВАНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общепрофессиональных и профессиональных компетенций, научноисследовательской деятельности, подготовки к практическим занятиям, семинарам, сдаче зачетов и экзаменов.

Самостоятельная работа по теории чисел направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий;
- приобретение дополнительных знаний и умений по темам **«**Числовые сравнения», «Классы вычетов**», «**Сравнения с переменной**»;**
- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

В работе представлено 20 вариантов заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними.

Индивидуальная работа 1 (10 баллов)

Критерии усвоения. Диагноз.

Задания построены так, чтобы охватить основное содержание темы. Можно считать, что материал студентами усвоен, если они владеют следующими учебно-познавательными и специальными действиями на уровне применения отношения сравнимости двух чисел по некоторому модулю и свойств сравнений, понятия классов вычетов и операций над ними.

1 задание (1 балл)

Найти модуль сравнения, используя определение и признак сравнимости двух целых чисел.

2 задание (2 балла)

Дать словесную формулировку свойства и доказать его, используя определение сравнения и свойства отношения делимости.

3 задание (2 балла)

Найти остаток от деления, используя соответствующую теорему($a \equiv r \pmod{b}$, *где* $a = bq + r$) и свойства сравнений.

4 задание. (2 балла)

Перевести задачу на язык сравнений и применить свойства сравнений для ее решения.

5 задание. (3 балла)

Использовать понятия «класс вычетов», «кольцо классов вычетов», правила выполнения операций сложения и умножения классов в кольце вычетов, применять теорию основных алгебраических структур к установлению свойств некоторых подмножеств кольца вычетов по данному модулю.

Задания 1 и 2 направлены на проверку сформированности понятия сравнения.

Задания 3 и 4 направлены на проверку умения применять полученные знания о сравнениях и их свойствах в прикладных целях.

Задание 5 направлено на проверку сформированности понятия «классов вычетов» и правил выполнения операций над классами, а также на установление взаимосвязи между классами вычетов по некоторому модулю и основными алгебраическими системами (группами, кольцами, полями).

Индивидуальная работа 2 (10 баллов)

Критерии усвоения. Диагноз.

Задания построены так, чтобы охватить основное содержание темы. Можно считать, что материал студентами усвоен, если они владеют следующими учебно-познавательными и специальными действиями на уровне умения составлять различные системы вычетов и применять функции Эйлера, теоремы Эйлера и Ферма к решению задач.

1 задание (1 балл)

Составить полные и приведенные системы вычетов по заданному модулю.

2 задание (1 балл)

Заменить целые числа различными вычетами по заданному модулю.

3 задание (1 балл)

Находить число положительных правильных несократимых дробей, используя функцию Эйлера.

4 задание.(1 балл)

Находить показатели в разложении натурального числа на простые множители, используя формулы для вычисления функции Эйлера.

5 и 6 задания.(2 балла за задание)

Находить остатки от деления, используя теоремы Эйлера и Ферма, а также теорию числовых сравнений.

7 задание (2 балла)

Применять теоремы Эйлера и Ферма и свойства числовых сравнений к решению прикладных задач.

Задания 1 и 2 направлены на проверку умения находить вычеты и полные системы вычетов по данному модулю.

Задания 3 и 4 направлены на проверку умения применять функцию Эйлера и формулы для ее вычисления к решению задач.

Задания 5, 6 и 7 направлены на проверку умения применять теоремы Эйлера и Ферма и свойства сравнений к решению задач.

Индивидуальная работа 3 (10 баллов)

Критерии усвоения. Диагноз.

Задания построены так, чтобы охватить основное содержание темы. Можно считать, что материал студентами усвоен, если они владеют следующими учебно-познавательными и специальными действиями на уровне применения теории сравнений с неизвестной величиной к решению задач.

1 задание (2 балла)

Решать сравнение первой степени с помощью теоремы Эйлера и, используя преобразования коэффициентов.

2 задание (2 балла)

Решать систему сравнений первой степени с неизвестной величиной.

3 задание (1 балл)

Применять сравнения первой степени к решению неопределенных уравнений с двумя переменными.

4 задание.(3 балла)

Решать сравнения n-степени по различным модулям (простое число, степень простого числа, составное число).

5 задание.(2 балла)

Применять теорию сравнений с неизвестной величиной к решению прикладных задач.

Задания 1, 2 и 4 направлены на проверку умения применять теорию сравнений с неизвестной величиной к решению сравнений и их систем.

Задания 3 и 5 направлены на проверку умения применять полученные знания о сравнениях и системах с неизвестной величиной к решению прикладных задач.

Требования к выполнению и оформлению самостоятельной работы

1. Самостоятельная работа выполняется в отдельной тетради или на скрепленных тетрадных листах синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя).

2. На обложке тетради должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название раздела дисциплины, номер варианта.

Например: ***Индивидуальная работа 1. Вариант 1 студентки факультета информатики, математики и экономики I курса группы МФ-19 Ивановой Татьяны Александровны***

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием.

4. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы;

г) фиксировать ответ.

5. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями.

6. Самостоятельная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком. Преподаватель имеет право не принимать работу на проверку во время сессии.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Бухштаб, А. А. Теория чисел [Текст]: учебное пособие /А. А. Бухштаб. - Изд. 3-е ; стер. - Санкт- Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2008. - 384 с.

2. Данилова Т.В. Теория чисел: Задачи с примерами решений [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Т.В. Данилова: Министерство образования и науки Российской Федерации, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова. - Электронные текстовые данные. – Архангельск: САФУ, 2015. – 104 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436368

Дополнительная литература

1. Веселова, Л. В. Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов; Министерство образования и науки РФ; ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Электронные текстовые данные. - Казань: Издательство КНИТУ, 2014. - 107 с.- Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428287

2. Избранные главы алгебры и теории чисел [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов ИФМИЭО / М. П. Тропин; Новосиб. гос. пед. ун-т. - Электронные текстовые данные. - Новосибирск: НГПУ, 2012. - 89 с. - Режим доступа: http://icdlib.nspu.ru/catalog/details/icdlib/636/
3. Смолин, Ю. Н. Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс]: учебное пособие. — Электронные текстовые данные. - Москва: ФЛИНТА, 2012. — 464 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/20243/
4. Тимофеенко, Г.В. Сборник задач по теории чисел: Учебное пособие.[Текст] /Г.В. Тимофеенко, Е.Т. Астахова, Л.Г. Латынцева. – Красноярск: РИО ГОУ ВПО КГПУ им. В.П. Астафьева, 2006. – 176 с.