Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Позднякова

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Методические рекомендации по изучению дисциплины «История математики» для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика»

Новокузнецк

2019

УДК 51(091)(072)
ББК 22.1гя73
П 47

Позднякова Е.В.

П 47 История математики: методические рекомендации по изучению дисциплины для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика») / Е.В. Позднякова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2019 – 83 с.

В работе изложены методические рекомендации по изучению дисциплины «История математики»: методические указания к аудиторной работе в форме семинарских занятий, включающие контрольные вопросы и основные теоретические сведения по темам дисциплины, темы докладов на семинарские занятия, тексты математических задач, решаемых в групповой, фронтальной или индивидуальной формах; методические указания к внеаудиторной работе (подготовка докладов и написание рефератов); оценивание результатов обучения в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика».

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 10 от 25.05.2019

Заведующий каф. МФММ
____________ / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 9 от 30.05.2019

Председатель методической комиссии ФИМЭ
____________ / Г.Н. Бойченко

УДК 51(091)(072)
ББК 22.1гя73
П 47

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавра по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика») и направлены на оказание помощи студентам в изучении дисциплины «История математики».

История математики есть наука об объективных законах развития математики. В соответствии с этим на историю математики возлагается решение следующих задач:

- ✓ воссоздание богатства фактического содержания исторического развития математики (возникновение математических методов, понятий и идей, отдельных математических теорий; характер и особенности развития математики у отдельных народов в определенные исторические периоды, вклад, внесенный в математику великими учеными прошлого);
- ✓ исследование многообразных связей математики (связи математики с практическими потребностями и деятельностью людей, с развитием других наук, влияние экономической и социальной структуры общества на содержание и характер развития математики, роль народа, личности ученых и коллективов ученых);
- ✓ выявление исторической обусловленности логической структуры современной математики, диалектики ее развития.

Целью изучения дисциплины «История математики» является: формирование представления студентов о математике как о непрерывно развивающейся науке, приобретение знаний о зарождении и развитии математики, систематизация знаний будущих учителей математики об основных периодах развития математики, формирование умений проектировать учебный процесс по математике, раскрывающий ее общекультурное и историческое значение.

Задача дисциплины: систематизировать знания студентов об основных периодах развития математики; овладение методами и приемами решения математических задач различных исторических периодов; формирование профессиональной компетентности в области преподавания раздела школьной математики «Математика в историческом развитии».

В методические рекомендации включено:

1) методические указания к аудиторной работе в форме семинарских занятий, включающие:

- ✓ контрольные вопросы и основные теоретические сведения по темам дисциплины,
- ✓ темы докладов на семинарские занятия,
- ✓ тексты математических задач, решаемых в групповой, фронтальной или индивидуальной формах (задачи из древних памятников культуры; задачи из старинных математических книг; именные исторические задачи; знаменитые неразрешимые задачи; задачи, в сюжете которых содержатся исторические сведения;

2) методические указания к внеаудиторной работе:

- ✓ указания к подготовке докладов на семинарские занятия;
- ✓ указания по написанию рефератов;

3) оценивание результатов обучения в балльно-рейтинговой системе;

4) список основной и дополнительной литературы.

Список литературы для подготовки к семинарским занятиям включает классические и современные источники; указана литература основная и дополнительная.

Таким образом, данные методические материалы позволяют получить студенту целостное представление о содержании курса “История математики”, подготовиться к семинарским занятиям по соответствующим темам, выполнить задания по внеаудиторной работе. Кроме того, пособие может оказаться полезным при написании курсовых и выпускных квалификационных работ, а также при прохождении производственной (педагогической) практики в средних и старших классах.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К АУДИТОРНОЙ РАБОТЕ В ФОРМЕ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

Дисциплина “История математики” является профильным предметом для студентов – будущих учителей математики. Его изучение необходимо для формирования профессиональной компетентности в области преподавания математики в системе основного общего образования.

Успешное усвоение данной учебной дисциплины предполагает серьезную систематическую аудиторную и внеаудиторную работу студента, важнейшая часть которой – подготовка к семинарскому занятию и активное участие в нем. Семинарские занятия проводятся для углубленного изучения студентами определенных тем, закрепления и проверки полученных знаний, овладения навыками самостоятельной работы, публичных выступлений, ведения полемики и дискуссии, развития умений и навыков работы в группе.

Подготовка к семинарскому занятию начинается ознакомлением с его планом и контрольными вопросами по соответствующей теме, перечнем рекомендованной литературы.

Планы семинарских занятий предполагают подготовку докладов и решение старинных математических задач в форме групповой, индивидуальной или фронтальной работы. Доклады имеют целью способствовать углубленному изучению отдельных вопросов, совершенствованию навыков самостоятельной работы студентов, устного или письменного изложения мыслей по определенной проблеме. Математические задачи, решаемые на семинарских занятиях, представлены следующими видами: задачи из древних памятников культуры; задачи из старинных математических книг; именные исторические задачи (задачи, которые названы в честь ученого, который решал, нашел решение или сочинил задачу); знаменитые неразрешимые задачи; задачи, в сюжете которых содержатся исторические сведения.

Раздел 1. Период зарождения математики

Тема 1.1 Формирование первых математических понятий

Контрольные вопросы

1. Назовите основные периоды развития математики.
2. Кратко охарактеризуйте каждый из этапов развития математики
3. Кратко опишите процесс развития систем счисления. Приведите примеры.
4. Кратко опишите процесс формирования первых геометрических понятий.

Теоретические сведения

Одной из общепризнанных периодизаций основных этапов развития математики как целостной науки является периодизация, предложенная А.Н. Колмогоровым. Так, он выделяет четыре периода развития математики.

1. *Зарождение математики.* Этот период начинается с появлением человечества и продолжается до VI-V веков до н.э. Здесь происходит накопление фактического материала математики в рамках общей неразделенной науки. Формируются первичные представления о натуральных и дробных числах, геометрических фигурах и телах. Вырабатываются методы решения простейших прикладных задач. Включает в себя математику Древнего Египта, Древнего Вавилона, Древней Индии и Китая. Заканчивается в Древней Греции.

2. *Период элементарной математики.* Этот период продолжается от VI-V веков до н.э. до конца XVI века н.э. Он характеризуется достижениями в изучении свойств постоянных величин. Поэтому иногда этот период в литературе называют еще «периодом математики постоянных величин». Эта математика в основном изучается в средней школе. Математика превращается в строгую дедуктивную науку. Включает в себя математику Древней Греции, эллинистических стран, средневекового Китая и Индии, стран ислама, средневековой Европы и Эпохи Возрождения. Период заканчивается, когда главным объектом задач математики

становятся процессы, движения и начинают развиваться аналитическая геометрия и анализ бесконечно малых.

3. *Период создания математики переменных величин.* Этот период продолжается от начала XVII века до середины XIX века. Он отличается введением в математику функций и их изучением. Введение переменных величин в геометрию приводит к созданию аналитической геометрии. Для изучения функциональных зависимостей создается дифференциальное и интегральное исчисление. В этот период формируются почти все научные дисциплины в качестве классической основы современной математики. Поэтому его называют также «периодом высшей математики». Условно подразделяется на математику XVII и XVIII веков.

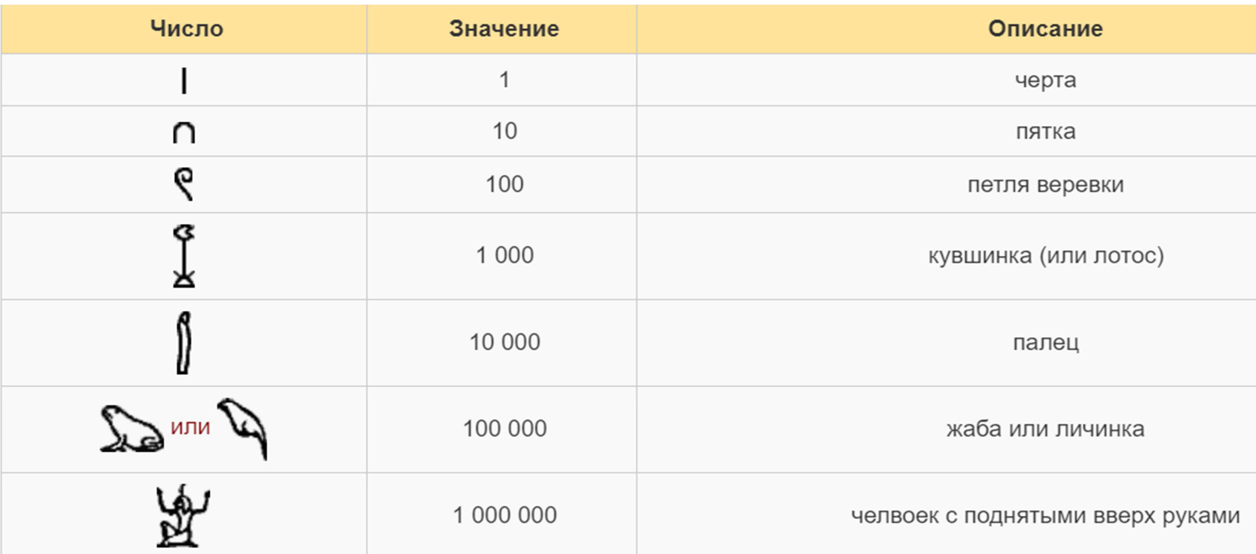
4. *Период современной математики.* Этот период отсчитывается с середины XIX века и продолжается в наши дни. К нему привел критический пересмотр проблем оснований математики. Появляются многие новые математические теории и расширяются ее приложения. Создаются теоретико-групповые методы в алгебре, неевклидовы геометрии. Математический анализ перестраивается на основе строгого определения действительного числа и предела.

Формы и пути развития математических знаний у различных народов весьма разнообразны. Однако при всем своеобразии путей развития общим для всех народов является то, что все основные понятия математики – понятие числа, фигуры, площади, бесконечно продолжающегося натурального ряда и т. д. – возникли из практики и прошли длинный путь совершенствования. Например, понятие числа возникло вследствие практической необходимости пересчета предметов. Вначале считали с помощью подручных средств: пальцев, камней, еловых шишек и т. д. Следы этого сохранились в названии математических исчислений: например, *calculus* в переводе с латинского означает «счет камешками». Запас чисел на ранних ступенях весьма ограничен. Ряд известных и используемых натуральных чисел был конечен и удлинялся лишь постепенно.

Развитие ремесла и торговли содействовало кристаллизации понятия числа. Числа группировали и объединяли в большие единицы, обычно пользуясь пальцами одной руки или обеих рук, – обычный в торговле прием. Это вело к счету сначала с основанием 5, потом с основанием 10, который дополнялся сложением, а иногда вычитанием. Иногда за основу принимали 20 – число пальцев на руках и ногах. В наиболее характерной форме система с основанием 20 существовала у майя в Мексике и у кельтов в Европе. Числовые записи велись с помощью пучков, зарубок на палках, узлов на веревках, камешков или ракушек, сложенных по 5 в кучки.

Наряду с употреблением все больших и больших чисел возникали и развивались их символы, а сами числа образовывали системы. Для ранних периодов истории материальной культуры характерно разнообразие числовых систем. Постепенно совершенствовались и унифицировались системы счисления. Употребляемая ныне во всех странах десятичная позиционная система нумерации – итог длительного исторического развития. Ей предшествовали:

1. Различные иероглифические непозиционные системы. В каждой из них строится система так называемых узловых чисел (чаще всего 1, 10, 100, 1000, ...). Каждое такое число имеет индивидуальный символ – иероглиф. Остальные числа (их называют алгоритмическими) образуются приписыванием с той или другой стороны узлового числа других узловых чисел и повторением их. Примерами таких систем являются египетская (рис.1), финикийская, пальмирская, критская, сирийская, аттическая (или геродианова), старокитайская, староиндусская



Число	Значение	Описание
	1	черта
	10	пятка
	100	петля веревки
	1 000	кувшинка (или лотос)
	10 000	палец
или	100 000	жаба или личинка
	1 000 000	челвоек с поднятыми вверх руками

Рисунок 1. Древнеегипетская система счисления

(карошти), ацтекская, римская. Последняя имеет систему узловых чисел: I, V, X, L, C, D, M, построенную по десятичному признаку с заметным влиянием пятеричной системы.

2. Алфавитные системы счисления. В этих системах буквы алфавита, взятые по 9, используются соответственно для обозначения единиц, десятков, сотен. Каждой букве при этом дается отличительный знак, указывающий, что она используется как число. В случае, если букв алфавита недостаточно, привлекаются дополнительные буквы и знаки. Типичный пример алфавитной системы – греческая ионическая (рис. 2)

$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma}$	$\overline{\delta}$	$\overline{\varepsilon}$	$\overline{\varsigma}$	$\overline{\zeta}$	$\overline{\eta}$	$\overline{\theta}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	(дигамма)
$\overline{\iota}$	$\overline{æ}$	$\overline{\lambda}$	$\overline{\mu}$	$\overline{\nu}$	$\overline{\xi}$	$\overline{o}$	$\overline{\pi}$	$\overline{q}$	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	(коппа)
$\overline{\rho}$	$\overline{\sigma}$	$\overline{\tau}$	$\overline{\upsilon}$	$\overline{\varphi}$	$\overline{\chi}$	$\overline{\psi}$	$\overline{\omega}$	$\overline{э}$	
100	200	300	400	500	600	700	800	900	(сампи)

Рисунок 2. Греческая ионическая система счисления

Запись чисел по этой системе ясна из примера: $\upsilon\ \mu\ \delta = 444$. Для того чтобы записать числа больше тысячи, необходимо усложнять знаки, например: $\alpha = 1000$, $\beta = 2000$ и т. д. Алфавитные системы удобнее из-за краткости записи, однако они малопригодны для оперирования большими числами и требуют больших усилий для запоминания. Примерами алфавитной системы, кроме приведённой, являются древнеславянская (кириллица и глаголица), еврейская, арабская, грузинская, армянская и др.

3. Позиционные недесятичные системы, а затем десятичная система. К позиционным недесятичным относятся вавилонская, индейская (племени майя на полуострове Юкатан), индийская, современная двоичная системы. Записи в

позиционной десятичной системе с нулем впервые появились около 500 г. до н. э. в Индии.

Возникла и необходимость измерять длину и емкость предметов. Единицы измерения были грубы, и при этом часто исходили из размеров человеческого тела. Об этом нам напоминают такие единицы, как палец, фут (то есть ступня), локоть. Когда начали строить дома, такие как у земледельцев Индии или обитателей свайных построек Центральной Европы, стали вырабатываться правила, как строить по прямым линиям и под прямым углом. Английское слово straight («прямой») родственно глаголу stretch («натягивать»), что указывает на использование веревки (во многих странах людей, занимавшихся межеванием, называли «натягивателями верёвки»). Английское слово line («линия») родственно слову linen («полотно»), что указывает на связь между ткацким ремеслом и зарождением геометрии. Таков был один из путей, по которому шло развитие математических интересов. Человек неолита обладал также острым чувством геометрической формы. Обжиг и раскраска глиняных сосудов, изготовление камышовых циновок, корзин и тканей, позже – обработка металлов вырабатывали представление о плоскостных и пространственных соотношениях. Неолитические орнаменты радовали глаз, выявляя равенство, симметрию и подобие фигур. Первоначально ранние орнаменты, возможно, имели религиозное или магическое значение, но постепенно преобладающим стало их эстетическое назначение (Рис. 3, 4)

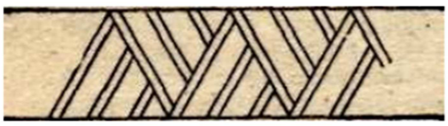


Рисунок 3. Орнамент, встречающийся на неолитической керамике из Боснии и на предметах искусства древней Месопотамии

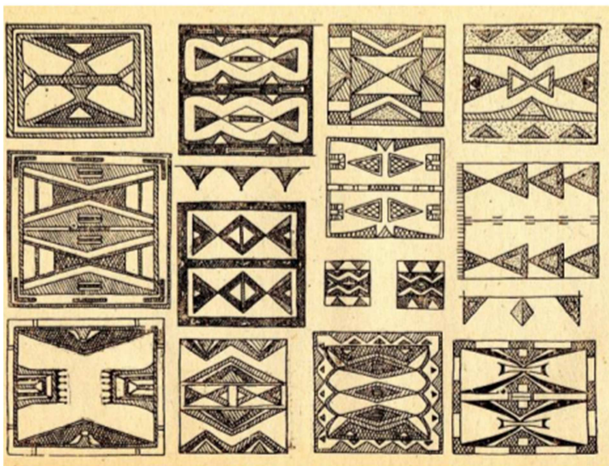


Рисунок 4. Орнаменты, популярные у жителей свайных построек близ Любляны (Югославия) Гальштатского периода (Центральная Европа, 1000 – 500 г. до н.э.)

Семинарское занятие

I. Доклады по темам (45 минут):

1. Первые числительные и их развитие
2. Первые числовые знаки
3. Зарождение математических действий
4. Возникновение геометрических понятий
5. История возникновения систем счисления (аттическая нумерация, ионийская система счисления, древнеримская система счисления, старославянская система счисления, позиционные недесятичные системы счисления)

II. Решение задач. Работа в группах (45 минут)

Вариант 1.

Римская система счисления

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

1). Выпишите числа от 100 до 110 в римской системе счисления.

2). Запишите числа 34 и 442 в римской системе счисления

3). Переведите числа из римской системы счисления в арабскую систему счисления: XVII, CCXV, CMLXXIII.

4). Переведите числа из римской системы счисления в арабскую, выполните указанные арифметические действия, и полученный результат переведите обратно в римскую систему счисления: XXIV:III, (CXX-XX):V, (CD+M):VII.

Вариант 2.

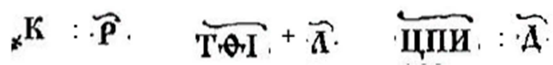
Славянская алфавитная система счисления

1). Выпишите числа от 200 до 215 в славянской системе счисления.

2). Запишите числа 34 и 1442 в славянской системе счисления

3). Переведите числа из славянской системы счисления в арабскую систему счисления:

4). Переведите числа из славянской системы счисления в арабскую, выполните указанные арифметические действия, и полученный результат переведите обратно в славянскую систему счисления:



Вариант 3

Греческая аттическая система счисления

знак	значение	название
I	1	ἴος «иос»
П	5	πέντε «пенте»
Δ	10	δέκα «дека»
Н	100	ἑκατόν «хекатон»
Х	1 000	χίλιοι «хилиой»
М	10 000	μύριοι «мюриой»

1). Выпишите числа от 100 до 110 в аттической системе счисления.

2). Запишите числа 54 и 544 в аттической системе счисления

3). Переведите числа из аттической системы счисления в арабскую систему счисления: ММП̆ΔΔΔΔ НΔΔΔПII, ХΔΔПI,

4). Переведите числа из аттической системы счисления в арабскую, выполните указанные арифметические действия, и полученный результат переведите обратно в аттическую систему счисления: ΔΔIIII:III, (НΔΔ-ΔΔ):П, (НННН+Х):ПII.

<u>Вариант 4</u>

Греческая ионическая система счисления

1 **α**	10 **ι**	100 **ρ**
2 **β**	20 **κ**	200 **σ**
3 **γ**	30 **λ**	300 **τ**
4 **δ**	40 **μ**	400 **υ**
5 **ε**	50 **ν**	500 **φ**
6 **Ϝ или ϛ**	60 **ξ**	600 **χ**
7 **ζ**	70 **ο**	700 **ψ**
8 **η**	80 **π**	800 **ω**
9 **θ**	90 **ϟ**	900 **ϡ**

1). Выпишите числа от 200 до 215 в ионической системе счисления.

2). Запишите числа 53 и 1940 в ионической системе счисления

3). Переведите числа из ионической системы счисления в арабскую систему счисления: **χ ξ β, π η, ‘β ω γ**

4). Переведите числа из ионической системы счисления в арабскую, выполните указанные арифметические действия, и полученный результат переведите обратно в ионическую систему счисления: **χ λ γ: γ- ια, ω· β-‘α, θ: γ+ ϡ**

<u>Вариант 5</u>

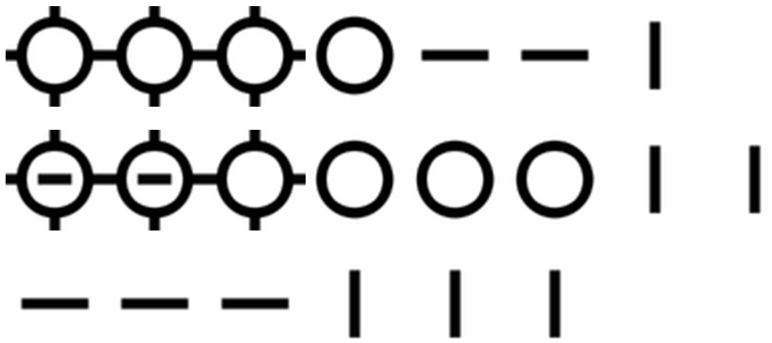
Эгейская система счисления

Цифровые знаки Линейного письма A и B				
				
1	10	100	1000	10 000

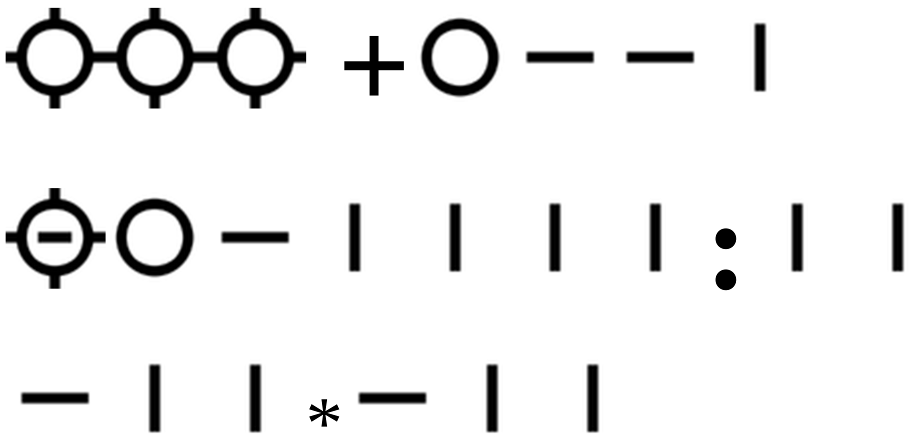
1). Выпишите числа от 100 до 112 в эгейской системе счисления.

2). Запишите числа 54 и 1940 в эгейской системе счисления

3). Переведите числа из эгейской системы счисления в арабскую систему счисления:



4). Переведите числа из эгейской системы счисления в арабскую, выполните указанные арифметические действия, и полученный результат переведите обратно в эгейскую систему счисления:



Тема 1.2 Математика Древнего Египта. Математика Древнего Вавилона

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Кратко охарактеризуйте особенности математики Древнего Египта.

2. Опишите египетскую систему счисления. Приведите примеры.
3. Кратко охарактеризуйте особенности математики Древнего Вавилона.
4. Опишите вавилонскую систему счисления. Приведите примеры.

Теоретические сведения

Математика Древнего Египта. Одними из первых перешли к земледелию жители долины Нила. К концу IV тысячелетия до н.э. образуется единое государство Египет во главе с фараоном. Долгая история этого государства проходит через Древнее, Среднее, Новое царства. В разное время столицами были города Тис, Мемфис, Фивы, Саис. Наиболее известные фараоны Менес (Мина), Хеопс, Эхнатон, Тутмос, Рамсес. Последнее самостоятельное древнеегипетское царство – при фараоне Псамметихе. В 655 г. до н.э. он при помощи греков изгоняет захвативших их ассирийцев, и позволяет грекам организовать колонию в Египте. Дальнейшая история Египта – время упадка страны. В 525 г. до н.э. был завоеван персидским царем Камбизом, в 332 г. до н. э. – Александром Македонским.

Знаковыми достижениями древнеегипетской цивилизации являются: изобретение иероглифической письменности (в IV тысячелетии до н.э.), строительство пирамид (например, пирамида Хеопса, построенная в XXVI в. до н. э., высотой в 146 м., причислялась древними к семи чудесам света), первый календарь (принятый еще в V тысячелетии до н.э., с продолжительностью года в 365 дней).

Об уровне математических знаний древних египтян мы можем судить по следующим источникам:

1) Папирус Ахмеса или папирус Ринда, названный так по имени своего первого владельца (рис. 5). Написан около 1650 г. до н. э. Рукопись представляла собой узкую (33 см) и длинную (5,25 м) полосу папируса, содержащую 84 задачи. Теперь одна часть папируса хранится в Британском музее в Лондоне, а другая находится в Нью-Йорке. Все задачи из папируса Ахмеса имеют прикладной характер и связаны с практикой строительства, размежеванием земельных наделов и т. п. По преимуществу это задачи на нахождение площадей треугольника, четырёхугольников и круга, разнообразные действия с целыми числами и аликвотными дробями, пропорциональное деление, нахождение отношений, возведение в разные степени, определение среднего арифметического, арифметические прогрессии, решение уравнений первой и второй степени с одним неизвестным.

Рисунок 5. Часть папируса Ахмеса. Задачи с 49 по 55.

2) Московский математический папирус - его в декабре 1888 г. приобрёл в Луксоре русский Египтолог Владимир Семёнович Голенищев. Сейчас папирус принадлежит Государственному музею изобразительных искусств имени А. С. Пушкина. Этот свиток длиной 5,44 м и шириной 8 см включает 25 задач (рис. 6).

Рисунок 6. Четырнадцатая проблема Московского математического папируса

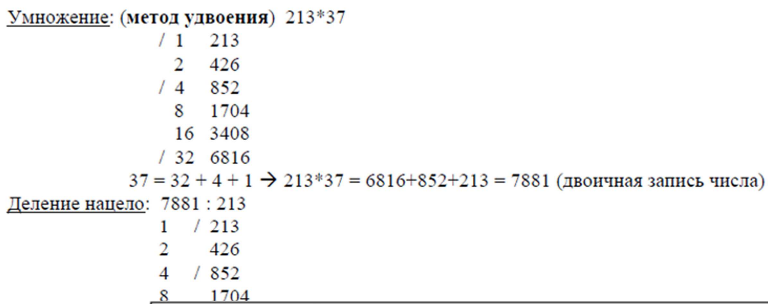
3) "Кожаный свиток египетской математики" (размер 25 × 43 см), с большим трудом расправленный в 1927 г. и во многом проливший свет на арифметические знания египтян. Ныне он хранится в Британском музее.

При изучении содержания этих папирусов были сделаны следующие выводы:

✓ Геометрические знания носили прикладной характер. Египтянам были известны правила вычисления площади треугольников, прямоугольников, трапеций; приближенное вычисление площадей четырехугольников; объемы кубов, параллелепипедов и цилиндров; нахождение объема усеченной пирамиды. Площадь круга находили по формуле $S=(8d/9)^2$ $\pi\approx4(8/9)^2=3{,}1605\ldots$

✓ У египтян сложилась определенная система счисления: десятичная иероглифическая. Для узловых чисел 10^k ($k=0, 1, \ldots, 7$) установлены индивидуальные иероглифы. Алгоритмические числа записывались комбинациями узловых чисел. С помощью этой системы египтяне справлялись со всеми вычислениями, в которых употреблялись целые числа.

✓ Египтяне создали специальный аппарат, опирающийся на понимание дроби только как доли единицы. Поэтому употреблялись только так называемые аликвотные дроби (т.е. дроби вида $\frac{1}{n}$) и некоторые индивидуальные ($\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$). Все результаты, которые должны были выражаться дробями вида $\frac{m}{n}$, выражались суммой аликвотных дробей. Для облегчения этих операций были составлены специальные таблицы, которые постоянно менялись и совершенствовались.


Умножение: (метод удвоения) 213*37
/ 1 213
2 426
/ 4 852
8 1704
16 3408
/ 32 6816
37 = 32 + 4 + 1 → 213*37 = 6816+852+213 = 7881 (двоичная запись числа)
Деление нацело: 7881 : 213
1 / 213
2 426
4 / 852
8 1704
Деление с оста

Рисуно
Умнож

✓ Сложились определенные приемы производства

число	значение	описание
	1	черта
	10	пятка
	100	петля веревки
	1 000	кувшинка (или лотос)
	10 000	палец
или	100 000	жаба или личинка
	1 000 000	человек с поднятыми вверх руками

Рисунок 8. Древнеегипетская система

математических операций с целыми числами и дробями. Общей для все вычислительной техники был аддитивный характер, при котором все процедуры по возможности сводятся к сложению (рис. 7).

Древнеегипетская система счисления. В древнем Египте использовалась десятичная иероглифическая непозиционная система счисления (употреблялась вплоть до начала 10 в. н. э.). Числа записывались в десятичной системе счисления со специальными знаками – иероглифами – для десятичных единиц каждого разряда. Таким образом, позиционного принципа записи еще не было. Иероглифы первоначально имели вид рисунков и сохраняли внешнее сходство с конкретными предметами (рис. 8).

Числа, не кратные 10, записывались путем повторения этих цифр - иероглифов. Каждая цифра могла повторяться от 1 до 9 раз. Например, число 4622 обозначалось следующим образом:  .

Особые значки обозначали дроби вида $\frac{1}{n}$ (рис. 9).

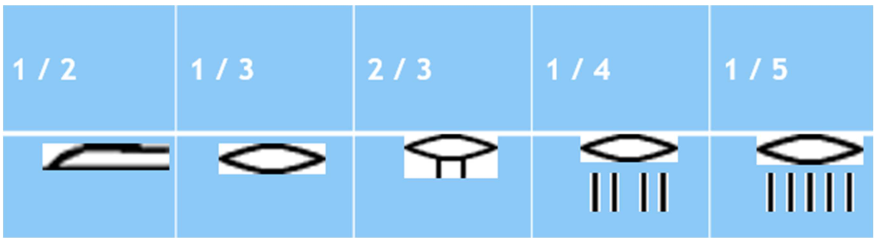


Рисунок 9. Древнеегипетская система счисления. Примеры изображения часто встречающихся дробей

Чтобы показать знаки сложения или вычитания использовался иероглиф:

 или 

Если направление ног у этого иероглифа совпадало с направлением письма, тогда он означал «сложение», в других случаях он означал «вычитание».

Если при сложении получается число большее десяти, тогда десяток

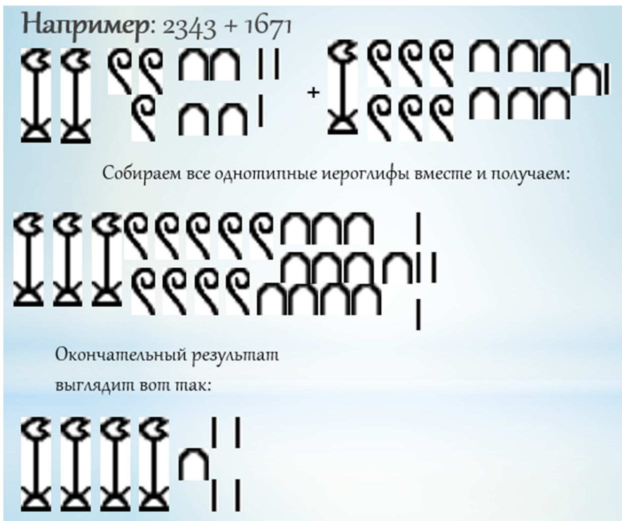


Рисунок 10. Пример сложения в древнеегипетской системе счисления

записывается повышающим иероглифом (рис. 10).

Математика Древнего Вавилона. Древний Вавилон – совокупность государств, располагавшихся в междуречье Тигра и Евфрата и существовавших в период от 2000 до 200 г. до н. э. Математика Вавилона находилась на гораздо более высоком уровне, чем тот, которого когда-либо достигала египетская математика. До нашего времени дошло около ста тысяч глиняных табличек с клинописными записями. Однако табличек с текстами математического содержания известно только около 50 (рис. 11), а математических табличек без текста – около 200.

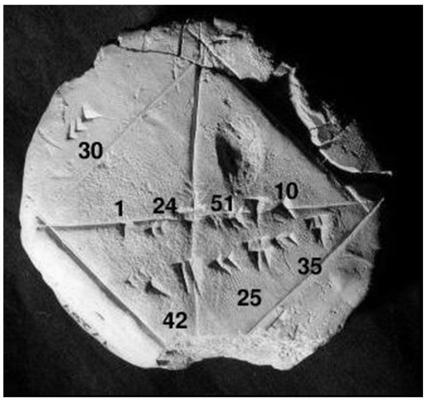


Рисунок 11. Глиняная табличка с математическим текстом

При изучении содержания этих артефактов были сделаны следующие выводы:

✓ Система математических символов имеет два основных элемента: *клин* ▼с числовым значением 1 и *крючок* ◄ с числовым значением 10. Повторением этих знаков можно записать числа от 1 до 59. Любое число записывается слева направо по принципу $N = \alpha_0\ 60^0 + \alpha_1\ 60^1 + \alpha_2\ 60^2\ + ...$ Таким образом система счисления оказывается позиционной 60-ричной. Однако эта система не имеет нуля, а один и тот же знак «клина» может обозначать не только единицу, но любое число вида $60^{\pm k}$ (k – натуральное число).

✓ На основе этой системы были созданы многие единообразные правила арифметических действий как с целыми числами, так и с дробями. Для облегчения действий существовали таблицы умножения (от $1 \cdot 1$ до $60 \cdot 60$), таблицы обратных значений, с помощью которых производилось деление ($b{:}\,a = b \cdot \frac{1}{a}$), таблицы квадратов и кубов целых чисел, обращенные таблицы (таблицы квадратных корней), таблицы чисел вида $n^3 + n^2$ и т.д.

✓ Приемы решения задач в вавилонских текстах эквивалентны приемам решения следующих десяти видов уравнений и их систем:

$ax = b$; $x^2 = a$; $x^2 \mp ax = b$; $x^3 = a$; $x^2(x + 1) = a$

$\begin{cases} x \mp y = a \\ xy = b \end{cases}$; $\begin{cases} x \mp y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$

✓ Вавилонянам были известны суммирование арифметических прогрессий, суммы вида $\sum_{k=0}^{n} 2^k$; $\sum_{k=1}^{n} k^2$

✓ Геометрические знания вавилонян, по-видимому, превышали египетские, так как в текстах помимо общих типов задач встречаются элементы измерения углов и тригонометрических соотношений. В основном, они тоже состояли из вычислений площадей и объёмов прямолинейных фигур, обычных для элементарной геометрии. Площадь круга вычислялась по формуле $S = \frac{c^2}{12}$ (c – длина окружности). Тексты показывают, что вавилонская геометрия семитского периода располагала формулами для площадей простых прямолинейных фигур и для объёмов простых тел, хотя объём усечённой пирамиды ещё не был найден. Основной чертой этой геометрии был всё же её алгебраический характер.

✓ В 1945 г. расшифрованы таблички (Нейгебауер и Сакс), в которых оказался перечень прямоугольных треугольников с рациональными сторонами, т.е. пифагоровых троек чисел. Реконструкция метода их подбора приводит к формулам: $x = p^2 - q^2$; $y = 2pq$; $z = p^2 + q^2$.

Вавилонская система счисления. Шестидесятеричная вавилонская система - первая известная нам система счисления, основанная на позиционном принципе.

Идея приписывать цифрам разные величины в зависимости от того, какую позицию они занимают в записи числа, впервые появилась в III тысячелетии до н.э. в Месопотамии (Междуречье) у шумеров. От них она перешла к вавилонянам - новым хозяевам Междуречья, почему и вошла в историю как вавилонская система счисления.

Числа в этой системе счисления составлялись из знаков двух видов: прямой клин для обозначения единиц и лежачий клин для обозначения десятков. Все числа от 1 до 59 записывались с помощью этих знаков, как в обычной иероглифической системе (Рис. 12)

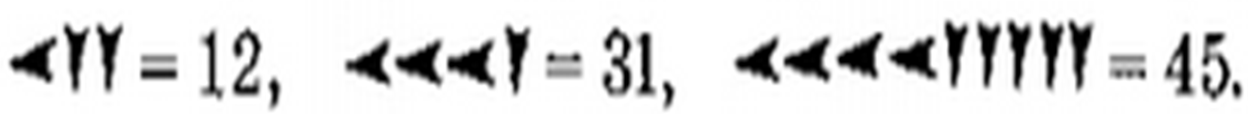


Рисунок 12. Пример записи чисел в вавилонской системе счисления

Все число в целом записывалось в позиционной системе счисления с основанием 60. Был у вавилонян и знак, игравший роль нуля. Им обозначали отсутствие промежуточных разрядов. Но отсутствие младших разрядов не обозначалось никак. Так, число  могло обозначать и 3 и 180 = 3 • 60 и 10 800 = 3 • 60 • 60 и так далее. Различать такие числа можно было только по смыслу.

Шестидесятеричная система широко применялась в астрономических расчетах вплоть до эпохи возрождения. Именно ею пользовался во II веке н.э. греческий математик и астроном Клавдий Птолемей при составлении таблицы синусов (древнейшей из дошедших до нас).

Отголоски этой системы счисления мы находим в сохранившемся до наших дней обыкновении делить один час на 60 минут, одну минуту на 60 секунд, полный угол — на 360 градусов.

Практическое занятие

I. Доклады по темам (45 минут):

1. Математические задачи Древнего Египта
2. Математические задачи Древнего Вавилона
3. Математика Древнего Китая.
4. Математика Древней Индии.

II. Решение задач. Фронтальная работа. Работа у доски. Дискуссия. (45 минут)

Задачи Древнего Китая и Древней Индии

1. Задача ЛО-шу

К глубокой древности относится возникновение магических квадратов, т.е. квадратных таблиц натуральных чисел, имеющих одну и ту же сумму чисел по всем строкам, столбцам и диагоналям. Наиболее ранние сведения о магических квадратах содержатся, по видимому, в древних китайских книгах IV – V веков до нашей эры. Самым “старым” из дошедших до нас древних магических квадратов является таблица Ло-шу (2200 г. до н.э.). Название “магические” (волшебные, таинственные) квадраты получили от арабов. Люди верили, что магические квадраты обладают чудесными свойствами и использовали их как талисманы.

Заполнить натуральными числами от 1 до 9 квадратную таблицу размером 3×3 так, чтобы суммы чисел по всем строкам, столбцам и диагоналям были равны одному и тому же числу 15.

2. Задача Сунь – цзы

Китайский математик Сунь – цзы (III – IV вв.) дал правило действий на счетной доске и изложил способ решений неопределенных уравнений первой степени в целых числах. С его именем связана следующая теоретико-числовая задача:

Имеются вещи, число их неизвестно. Если считать их тройками, то остаток 2; если считать их пятерками, то остаток 3; если считать их семерками, то остаток 2. Спрашивается, сколько вещей.

3. Задача Чжан Цюцзяня

Китайский математик Чжан Цюцзянь – автор второго по размеру трактата в текстах “Десятикнижья” после “Математики в девяти книгах”. В трех книгах своего трактата Чжан Цюцзянь развивал методы предшественников (Сунь – цзы и др.), уделял внимание таким вопросам, как ряды, уравнения высших степеней, теоретико-числовые проблемы и др. Ниже предлагается задача из третьей книги трактата Чжан Цюцзяня.

1 петух стоит 5 цяней (цянь – денежная единица), 1 курица стоит 3 цяня, 3 цыпленка стоят 1 цянь. Всего на 100 цяней купили 100 птиц. Спрашивается, сколько было в отдельности петухов, кур, цыплят.

4. Задача Магавиры

В IX веке в Индии жил математик и астроном Магавира. В своем “Кратком курсе математики” он установил двузначность квадратного корня, ставил вопрос об извлечении корня из отрицательного числа, решал задачи, приводящие к системам линейных уравнений с несколькими неизвестными, суммировал ряды квадратов и кубов членов арифметической прогрессии.

Найти число павлинов в стае, которой, умноженная на себя, сидит на манговом дереве, а квадрат остатка вместе с 14 другими павлинами – на дереве тамала.

5. Задача Шридхары

Индийский математик и астроном Шридхара (IX – X вв.) в сочинении “Патиганита” (“Искусство вычисления на доске”) излагает методы возведения в квадрат и куб, операций с дробями, занимается решением неопределенных уравнений второй степени с двумя неизвестными и др. Сочинение Шридхары “Тришатик” содержало 300 стихов.

Повар готовит различные блюда с шестью вкусовыми оттенками: острым, горьким, вяжущим, кислым, соленым, сладким. Друг, скажи, каково число всех разновидностей?

6. Задача Бхаскары II

Крупнейший индийский математик и астроном Бхаскара II – автор сочинения “Венец учения”, в котором содержались решения алгебраических задач. Вершиной достижений Бхаскары II является циклический метод решения в целых положительных числах неопределенного уравнения второй степени с двумя неизвестными.

Прекрасная дева с блестящими очами, ты, которая знаешь, как правильно применять метод инверсии, скажи мне величину такого числа, которое будучи умножено на 3, затем увеличено на этого произведения, разделено на 7, уменьшено на частного, умножено на само себя, уменьшено на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10, дает число 2. (Метод инверсии предполагает выполнение действий с конца задачи).

Раздел 2. Математика периода постоянных величин

Тема 2.1 Формирование первых геометрических теорий

Контрольные вопросы

1. Опишите зарождение дедуктивного метода в трудах Фалеса Милетского.
2. Опишите математические исследования ученых пифагорейской школы.
3. Опишите становление геометрической алгебры. Приведите примеры задач, решаемых методами геометрической алгебры.

Теоретические сведения

Зарождение дедуктивного метода. Основная черта математики периода постоянных величин (периода элементарной математики) - появление доказательства. Вся элементарная математика развилась и сформировалась в период с VI в до н.э. по III в до н.э.

Греки выдвинули тезис «*Числа правят миром*» и проверили справедливость этого тезиса в тех областях, где сумели: астрономия, оптика, музыка, геометрия, позже — механика. Всюду были отмечены впечатляющие успехи: математическая модель обладала неоспоримой предсказательной силой. Одновременно греки создали методологию математики и завершили превращение её из свода полуэвристических алгоритмов в целостную систему знаний. Основой этой системы впервые стал дедуктивный метод, показывающий, как из известных истин выводить новые, причём логика вывода гарантирует истинность новых результатов. Дедуктивный метод также позволяет выявить неочевидные связи между понятиями, научными фактами и областями математики.

Таким образом, основным достижением математической мысли, характеризующим начало периода элементарной математики, было возникновение и развитие понятия о *доказательстве*.

В Милете в VI в. до н.э. возникла первая математическая (натурфилософская) школа. Она называлась ионийской школой, по названию местности Иония. Первым из философов, применивших доказательство в математике, является *Фалес Милетский* (625 – 547 гг. до н.э.), политический деятель, философ, астроном и математик (рис.13).

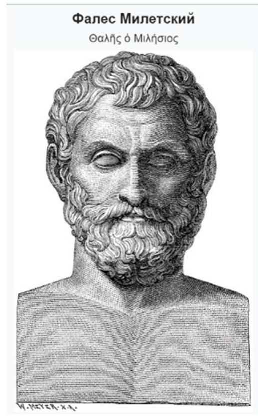


Рисунок 13. Фалес

Человеческая память сохранила о Фалесе лишь предания и легенды. Устная традиция прочно связывает имя Фалеса с семью мудрецами Древней Греции.

Канон семи мудрецов

Семь мудрецов называю: их родину, имя, реченье.
“Мера важнее всего”, - Клеобул говаривал Линдский;
В Спарте “Познай себя самого!” – проповедовал Хилон;
Сдерживать гнев увещал Периандр, уроженец Коринфа;
“Лишку ни в чем!” – поговорка была милетца Питтака;
“Жизни конец наблюдай!” – повторялось Солоном Афинским;
“Худших везде большинство!” – говорилось Briантом Приенским;

“Ни за кого не ручайся”! – Фалеса Милетского слово.

К ионийской школе принадлежали ученики Фалеса – Анаксимен, Анаксимандр, Анаксагор. Школа просуществовала около ста лет, до падения Милета, завоеванного персами в 494 г. Философы ионийской школы впервые стали заниматься геометрией теоретически. В этой школе был введен процесс обоснования как необходимый компонент математической деятельности.

Считается, что Фалес первым сформулировал и доказал несколько геометрических теорем, а именно:

- ✓ вертикальные углы равны;
- ✓ треугольники равны по одной стороне и двум прилегающим к ней углам;
- ✓ углы при основании равнобедренного треугольника равны;
- ✓ диаметр делит круг пополам;
- ✓ сумма углов прямоугольного треугольника равна двум прямым;
- ✓ вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым.

Именем Фалеса названа известная теорема: Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные отрезки. Современные исследователи утверждают, что авторство Фалеса именно этой теоремы весьма сомнительно.

Таким образом, ионийская школа положила начало дедуктивному изложению геометрии и предприняла попытки изучения свойств абстрактных фигур.

Пифагорейская школа. С VI в. до н.э. существовала так называемая пифагорейская школа, названная в честь основателя этой школы Пифагора.

Пифагор (около 570-473 гг. до н.э.) – самый популярный ученый за всю историю человечества, великий философ, легендарная личность (рис. 14). Вся биография Пифагора является знаком вопроса. Родился

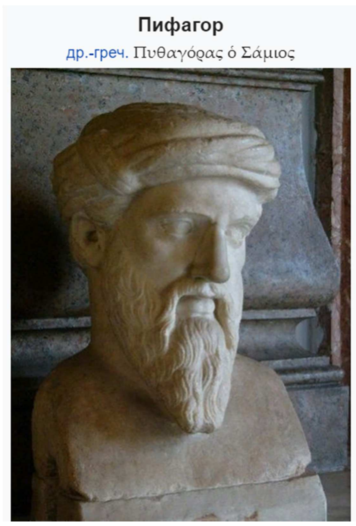


Рисунок 14. Пифагор

он на богатом торговом острове Самос в Эгейском море рядом с Ионией. По совету Фалеса отправился для усовершенствования знаний в Египет, учился математике у египетских жрецов. В то время Египет был завоеван персами (525 г. до н.э.). Пифагор попал в плен и был отправлен в Вавилон.

В настоящее время невозможно отделить сделанное самим Пифагором, от работ его учеников. Поэтому обычно говорят о Математике пифагорейцев. Пифагорейцы называли свою систему знаний “математика”, т.е. “учение”, “наука”. Они различали четыре области науки: учение о числах (арифметика), учение о фигурах и измерениях (геометрия), астрономия, учение о гармонии (теория музыки). Практическая арифметика называлась логистикой или счетным искусством.

В основе всех законов природы, полагали пифагорейцы, лежит арифметика, и с её помощью можно проникнуть во все тайны мира. Число для пифагорейцев было главным объектом математики. При этом под числом они понимали множество единиц, т.е. натуральное число. Разделив числа на чётные и нечётные, пифагорейцы доказали первую теорему теории делимости: произведение двух чисел делится на 2 тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из чисел делится на 2. Они сформулировали задачу о нахождении совершенных чисел (равных сумме своих делителей, исключая само число). Примером таких чисел являются число 6 (6=1+2+3), число 28 (1+2+4+7+14). Понятия отрицательных чисел у пифагорейцев не было.

Пифагорейцы построили общую теорию дробей (теория рациональных чисел), понимаемых как отношения (пропорции), так как единица считалась неделимой; научились выполнять с дробями сравнение (приведением к общему знаменателю) и все четыре арифметические операции.

Ранние пифагорейцы полагали, что отношение любых двух отрезков можно выразить с помощью отношения чисел. Таким образом геометрию они пытались свести к арифметике.

В пифагорейской школе геометрия превратилась в абстрактную науку. Пифагор утверждал, что должны рассматриваться абстрактные идеальные объекты: точка – «то, что не имеет частей», линия – «длина без ширины» и. т.д.; свойства этих идеальных объектов должны устанавливаться не с помощью измерений на конечном числе объектов, а с помощью рассуждений, справедливых для бесконечного числа объектов, т.е. должны быть доказаны; в геометрии можно выбрать конечное число первоначальных истин, из которых с помощью логических правил выводимо неограниченное число геометрических предложений. Эти отправные недоказуемые положения были названы *аксиомами*. Таким образом, в VI-V вв. до н.э. в школе Пифагора возник аксиоматический метод построения науки.

Принято считать, что Пифагор дал первое доказательство самой популярной геометрической теоремы, носящей теперь его имя. Существует много различных доказательств этой теоремы, но доказательство самого Пифагора до нас не дошло.

Геометрическая алгебра. Первой трещиной в пифагорейской модели мира стало ими же полученное доказательство иррациональности, сформулированное геометрически как несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной (V век до н. э.) - было доказано, что отношение диагонали к стороне квадрата не может быть выражено отношением целых чисел. (Отрезки называются соизмеримыми, если существует отрезок, который целое число раз укладывается в данных отрезках). Невозможность выразить длину отрезка числом ставила под сомнение главный принцип пифагорейства.

Следствием этого открытия стал переворот в соотношении арифметики и геометрии. Если раньше геометрию сводили к арифметике, то теперь, убедившись, что геометрические величины имеют более общую природу, чем рациональные числа, пифагорейцы положили в основу математики геометрию. Не позднее V в . до н.э. в геометрические доспехи облеклась и алгебра. Греки перевели все арифметические операции на геометрический язык и начали оперировать геометрическими объектами: отрезками, площадями и объёмами, не прибегая к числам. Этот этап развития алгебры называют геометрической алгеброй. Были разработаны правила действий с отрезками: сложение отрезков давало новый отрезок, умножение отрезков a и b понимали как площадь прямоугольника со сторонами a и b, произведение трех отрезков давало объем параллелепипеда, а произведение большего числа отрезков нельзя было представить.

Например, тождество $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ интерпретировалось так:

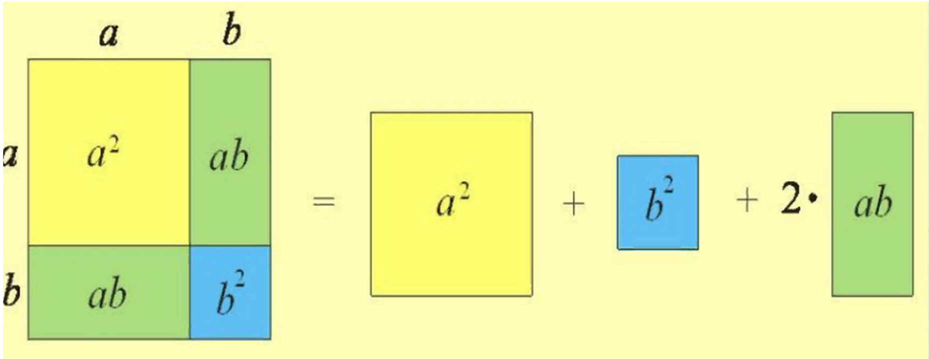


Рисунок 15. Геометрическая интерпретация тождества квадрата суммы

Решение линейного уравнения $ab = cx$ проводилось с помощью чертежа (рис. 16).

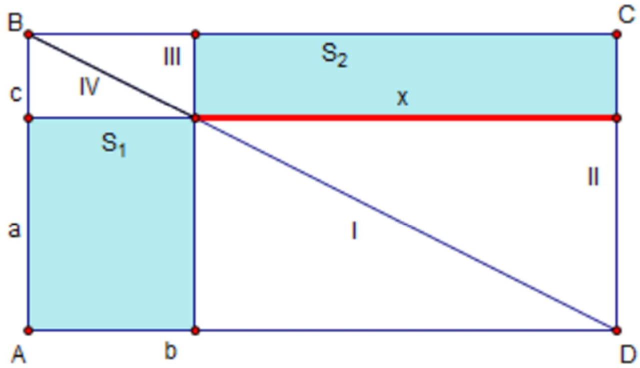


Рисунок 16. Решение линейного уравнения

Методами геометрической алгебры греки решали квадратные уравнения. Они рассматривали три типа задач, приводящих к квадратным уравнениям:

1) Преобразовать данный прямоугольник в квадрат, т.е. современным языком, решить уравнение $x^2 = ab$

2) Приложить к заданному отрезку a прямоугольник данной площади S так, чтобы недостаток был “квадратом”.

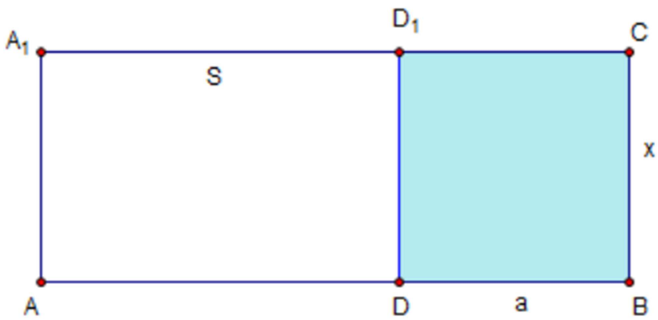


Рисунок 17. Эллиптическая задача

Это значит, что на отрезке AB надо построить прямоугольник ADD_1A_1 площадью S так, чтобы “недостаток” был квадратом.

$$x(a - x) = S$$

Задачу назвали “эллиптической” (Рис. 17). “Эллипс” в переводе с греческого “недостаток”.

3) К данному отрезку приложить прямоугольник заданной площади S так, чтобы “избыток” был квадратом.

$(a + x)x = S$

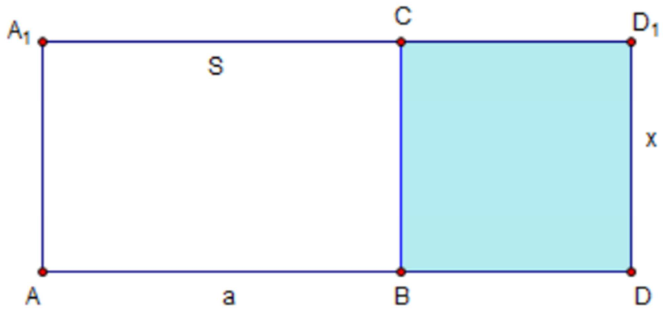


Рисунок 18. Гиперболическая задача

Задачу назвали “гиперболической” (Рис. 18). “Гипербола” в переводе с греческого “избыток”.

К недостаткам геометрической алгебры можно отнести следующее: не были введены отрицательные числа; не рассматривались уравнения степени выше третьей; необходимо было следить за выполнением принципа однородности, согласно которому отрезок нельзя было сложить с прямоугольником.

Практическое занятие

I. Доклады по темам (45 минут):

1. Учение о числах в трудах ученых пифагорейской школы.
2. История теоремы Пифагора. Некоторые доказательства теоремы Пифагора.
3. Доказательство тождеств и решение уравнений методами геометрической алгебры.

II. Решение задач. Фронтальная работа. Работа у доски. Дискуссия. (45 минут)

Задачи Древней Греции

1. Задача “Суд Париса”

Один из древнейших мифов содержит сказание о суде троянского царевича Париса…

Однажды на свадьбе богиня раздора Эрида подбросила собравшимся гостям яблоко с надписью “прекраснейшей”. Из-за этого яблока возник спор между богиней мудрости и справедливой войны Афиной, богиней любви и красоты Афродитой и сестрой и супругой Зевса Герой. Они обратились к царю и отцу богов и людей Зевсу, чтобы он решил, кому должно достаться яблоко. Зевс отправил богинь на гору к Парису, который пас там свои стада. Парис должен был решить, какая из богинь самая прекрасная.. Каждая из богинь старалась склонить юношу на свою сторону: Афина предлагала ему мудрость и военную славу, Афродита – красивейшую женщину на земле в жены, Гера – власть и богатство.

Как Парис определил прекраснейшую из богинь, можно узнать, решив старинную задачу.

Богиня Гера, Афродита и Афина пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения.

Афродита. Я самая прекрасная.

Афина. Афродита не самая прекрасная.

Гера. Я самая прекрасная.

Афродита. Гера не самая прекрасная.

Афина. Я самая прекрасная.

Парис, прилегший отдохнуть на обочине дороги, не счел нужным даже снять платок, которым прикрыл глаза от яркого солнца. Но богини были настойчивы, и ему нужно было решить, кто самая прекрасная. Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух остальных богинь ложны. Мог ли Парис вынести решение, кто прекраснее из богинь?

2. Задача о школе Пифагора

Первое построение геометрии как дедуктивной науки принадлежит Пифагору Самосскому (ок. 570 – 500 до н.э.) – древнегреческому математику и философу. В молодости Пифагор путешествовал по Египту и Вавилону, изучая мудрость жрецов. Около 530 г. до н.э. он переехал в Кротон (Южная Италия), где основал знаменитый пифагорейский союз (школу). Пифагорейцы занимались астрономией, гармонией (теорией музыки) и арифметикой (теорией чисел). В их школе возникло представление о шарообразности Земли.

Тиран острова Самос Поликрат однажды спросил на пиру у Пифагора, сколько у того учеников. “Охотно скажу тебе, о Поликрат, - отвечал Пифагор. – Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны вечной природы, седьмая часть молча упражняет силу духа, храня в сердце учение. Добавь к ним трех юношей, из которых Теон превосходит прочих своими способностями. Столько учеников веду к рождению вечной истины”. Сколько учеников было у Пифагора?

3. Задача о статуе Минервы

Сохранилась “Греческая антология” в форме сборника задач, составленных в стихах, главным образом гекзаметром, которым, как известно, написаны знаменитые поэмы Гомера (IX – VIII вв. до н.э.) “Илиада” и “Одиссея”. “Греческая антология” была написана в VI в. н.э. грамматиком Метродором. В “Греческой антологии” содержится задача о статуе богини мудрости, покровительнице наук, искусств и ремесел Минерве.

Я – изваянье из залата. Поэты то злато

В дар принесли: Харизий принес половину всей жертвы,

Феспия часть восьмую дала; десятую – Солон.

Часть двадцатая – жертва певца Фемисона, а девять

Все завершивших талантов – обет, Аристоником данный.

Сколько же злата поэты все вместе в дар принесли?

4. Задача о музах

По представлениям древних греков науками и искусствами ведали мифические женские существа – музы:

Евтерпа – богиня-покровительница музыки;

Клио – истории;

Талия – комедии;

Мельпомена – трагедии;

Терпсихора – танцев и хорового пения;

Эрато – поэзии;

Полимния – лирической поэзии;

Урания – астрономии;

Каллиопа – эпоса и красноречия.

Местоприбыванием муз и Аполлона служила гора Геликон. Учреждения, где протекала деятельность ученых, назывались музеумами (музеями) – жилищами муз. В поэтической задаче о музах бог любви Эрот жалуется богине красоты и любви Киприде на муз.

Видя, что плачет Эрот, Киприда его вопрошает:

“Что так тебя огорчило, ответствуй немедля!”

“Яблок я нес с Геликона немало, - Эрот отвечает, -

Музы, отколь ни возьмись, напали на сладкую ношу.

Частью двенадцатой вмиг овладела Евтерпа, а Клио

Пятую долю взяла. Талия – долю восьмую.

С частью двадцатой ушла Мельпомена. Четверть взяла Терпсихора.

С частью седьмою Эрато от меня убежала.

Тридцать плодов утащила Полимния. Сотня и двадцать

Взяты Уранией; триста плодов унесла Каллиопа.

Я возвращаюсь домой почти что с пустыми руками.

Только полсотни плодов мне оставили музы на долю.

Сколько яблок нес Эрот до встречи с музами?

5. Задача о грациях

Красивая идея равенства проводится в задаче о трех грациях.

Три грации имели по одинаковому числу плодов и встретили девять муз. Каждая из граций отдала каждой из муз по одинаковому числу плодов. После этого у каждой из граций и каждой из муз стало по одинаковому числу плодов. Сколько плодов было у каждой из граций до встречи с музами?

6. Задача о Диофанте из Палатинской антологии

Диофант Александрийский (II – III в н.э.) был последним великим математиком античности. До нас дошли два его сочинения - “Арифметика” (из 13 книг сохранилось 6) и “О многоугольных числах” (в отрывках). Творчество Диофанта оказало большое влияние на развитие алгебры, математического анализа и теории чисел.

О жизни Диофанта известно очень мало. В Палатинской антологии сохранилась эпитафия, из которой “мудрым искусством” мы узнаем отдельные факты из жизни ученого и ее продолжительность.

Прах Диофанта гробница покоит: дивись ей – и камень

Мудрым искусством его скажет усопшего век.

Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком

И половину шестой встретил с пушком на щеках.

Только минула седьмая, с подругою он обручился.

С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец.

Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил,

Отнят он был у отца ранней могилой своей.

Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе.

Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Тема 2.2 Аксиоматическое построение математики в эпоху эллинизма

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте особенности “Начал” Евклида.
2. Назовите выдающихся математиков эпохи эллинизма и опишите их вклад в развитие математики.
3. Охарактеризуйте математические теории и методы поздней античности.

Теоретические сведения

Академия Платона. В V в. до н.э. сложились два пути в развитии математики: материалистический (Демокрит) и идеалистический (Пифагор, далее Платон). Платон (429-348 гг. до н.э.) в Афинах организовал свою Академию, там занимались миром идей. Математика рассматривалась как условие для занятия философией. Известно, что при входе висела надпись: «Не войдет сюда тот, кто не знает геометрии».

Учеником Платона является Аристотель (384-322 гг. до н.э.). Он является общепризнанным основателем логики. Именно ее не хватало для дедуктивного построения математики.

Математическая школа, связанная с Академией Платона, представлена следующими математиками: Архит Тарентский, Теэтет Афинский, Евдокс Книдский. Архит (428-365 те до н.э.) известен стереометрическим решением задачи об удвоении куба. Теэтет (IV в. до н.э.) установил пять правильных многогранников и изучал иррациональности.

Итогом афинской школы стали наметившиеся пути выхода греческой математики из возникшего кризиса (открытие несоизмеримых отрезков): это дедуктивное построение математики Аристотеля и теория отношений Евдокса.

“Начала” Евклида. Сочинения, в которых в то время излагались первые системы математики, назывались «Началами».

Первые «Начала», о которых до нас дошли сведения, были написаны Гиппократом Хиосским. Встречаются упоминания и о «Началах», принадлежащих другим авторам. Однако все эти сочинения забыты и утеряны практически с тех пор, как появились «Начала» ***Евклида*** (рис.19). Последние получили всеобщее признание как система математических знаний, логическая строгость которой оставалась непревзойденной в течение свыше двадцати веков. «Начала» Евклида до сих пор лежат в основе всех систематических школьных курсов геометрии (рис. 20).

Рисунок 19. Евклид. Прибл. 365 – 300 гг. до н.э.

Об авторе «Начал» Евклиде сохранилось очень мало сведений. Известно, что он жил около 300 г. до н. э. в Александрии, входившей в то время в состав Египетского царства. Последнее образовалось в результате распада мировой державы Александра Македонского. В Музейоне (организация научно-учебного центра) было собрано свыше 500 тысяч рукописей научного характера. Научную работу в Музейоне вели почти все крупнейшие ученые эллинистической эпохи, в том числе Евклид, Архимед, Аполлоний, Эратосфен и др.

«Начала» состоят из тринадцати книг, каждая из которых представляет последовательность теорем. Иногда к этим книгам добавляют книги XIV и XV, принадлежащие другим авторам и близкие по содержанию к последним книгам Евклида.

В первой книге представлены определения, аксиомы и постулаты. Определения имеются и в некоторых других книгах (II – VII, X, XI). Аксиом и постулатов в других книгах «Начал» нет.

Определения – это предложения, с помощью которых автор вводит математические понятия, поясняя их.

Рисунок 20. Фрагмент папируса с текстом “Начал” Евклида

Аксиомы, или общие понятия, у Евклида – это предложения, вводящие отношения равенства или неравенства величин. Аксиом в «Началах» пять:

1. Равные одному и тому же равны и между собой.
2. Если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. Если от равных отнять равные, то и остатки будут равны.
4. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.
5. Целое больше части.

В число исходных положений «Начал» входят постулаты, т. е. утверждения о возможности геометрических построений. С их помощью Евклид обосновывает все геометрические построения и алгоритмические операции. Постулатов тоже пять:

1. Через две точки можно провести прямую.
2. Отрезок прямой можно продолжить неограниченно.
3. Из всякого центра любым расстоянием можно описать окружность.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересечены третьей и если сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых углов, то

прямые пересекутся с той стороны от прямой, где выполняется это условие.

Первые шесть книг “Начал” – планиметрические, из них книги I – IV содержат ту часть планиметрии, которая не требует применения теории пропорций. Первая книга вводит основные построения, действия над отрезками и углами, свойства треугольников, прямоугольников и параллелограммов, сравнение площадей этих фигур. Завершают первую книгу теорема Пифагора и обратная ей теорема.

Во второй книге рассматриваются соотношения между площадями прямоугольников и квадратов, подобранные таким образом, что они образуют геометрический аппарат для интерпретации алгебраических тождеств и для решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям, т. е. геометрическая алгебра. Третья книга трактует свойства круга и окружности, хорд и касательных, центральных и вписанных углов. Четвертая книга посвящена свойствам правильных многоугольников: вписанных и описанных, а также построению правильных 3-, 4-, 5-, 6- и 15-угольников.

В пятой книге «Начал» развивается общая теория отношений величин, являющаяся прообразом теории действительного числа в форме, соответствующей дедекиндовым сечениям.

Геометрические приложения теории отношений включены в шестую книгу. В ней, например, доказаны теоремы об отношении площадей прямоугольников и параллелограммов, имеющих общую высоту, о пропорциональности отрезков, отсекаемых на сторонах угла парой параллельных прямых, о подобии фигур и отношении площадей подобных фигур и т. п. Здесь же находится группа теорем об эллиптическом и гиперболическом приложении площадей.

Книги VII – IX посвящены теории чисел, но не технике вычислений, а таким «пифагорейским» вопросам, как делимость целых чисел, суммирование геометрических прогрессий, и некоторым свойствам простых чисел. Тут встречается и «алгоритм Евклида» для определения наибольшего общего делителя заданной системы чисел, и «теорема Евклида» о том, что простых чисел бесконечно много. Доказательство проводится тем же способом, что и сейчас: предположение конечности числа простых чисел опровергается построением еще одного числа, на единицу превышающего произведение всех простых чисел. В ряде теорем рассматриваются свойства чётности и нечётности чисел.

В десятой книге «Начал» представлена классификация всех 25 возможных видов биквадратичных иррациональностей (т.е. выражений вида $\sqrt{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}$, где a и b – соизмеримые отрезки). Кроме того, в десятой книге даны: способ нахождения неограниченного числа «пифагоровых троек» целых чисел, критерий соизмеримости двух величин, основанный на алгоритме попеременного вычитания, отыскание общей наибольшей меры двух и трех рациональных чисел (соизмеримых величин) и др.

Последние три книги (11 – 13) «Начал» – стереометрические. Первую из них открывает большое число определений, что вполне естественно, так как в предыдущих книгах вопросы стереометрии не рассматривались. Затем следует ряд теорем о взаимных расположениях прямых и плоскостей в пространстве и теоремы о многогранных углах. В последней трети книги рассмотрены отношения объемов параллелепипедов и призм.

Последняя, тринадцатая книга «Начал» содержит сведения о по-строении пяти правильных многогранников: тетраэдра (4-гранника), гексаэдра (6-гранника), октаэдра (8-гранника), додекаэдра (12-гранника), икосаэдра (20-гранника); рассмотрены отношения объёмов шаров.

Обзор содержания «Начал» показывает, что это сочинение представляет собой систему основ античной математики. В неё входят: элементарная геометрия, основы теории рациональных чисел, общая теория отношений величин и опирающиеся на неё теория пропорций и теория квадратичных и биквадратичных иррациональностей, элементы алгебры в геометрической форме и метод исчерпывания.

«Начала» Евклида оставили неизгладимый след в истории математики и в течение многих веков служили классическим образцом математической строгости и последовательности.

Выдающиеся математики эпохи эллинизма

Евдокс Книдский (ок. 408 – ок. 355 до н.э.) – гениальный математик, астроном, географ, врач, философ, оратор. Обогатил математику выдающимися открытиями, всю глубину которых ученые оценили лишь в конце XIX – начале XX в. Он безукоризненно разработал строгую теорию отношений, явившуюся первой аксиоматической теорией действительного числа, чтобы избежать актуально бесконечно малых и бесконечно больших величин. Евдокс ввел знаменитую аксиому, вошедшую в математику как аксиома Архимеда. Разработал метод исчерпывания – первое учение о пределах. В основу его была положена лемма, позволяющая находить пределы широкого класса последовательностей.

Архимед. Величайшим математиком эпохи эллинизма и Древнего мира был Архимед (ок. 287 – 212 гг. до н.э.). Этот ученый был родом из Сиракуз (южная часть Сицилии), сыном астронома и математика Фидия. Для усовершенствования своих знаний он некоторое время работал в Александрии в сотрудничестве с другими крупнейшими математиками. Возвратившись в Сиракузы, Архимед продолжил усиленные научные занятия. В последний период жизни он участвовал в обороне родного города от римских завоевателей, руководя постройкой сложных технических сооружений и изобретая военные орудия. Во время штурма и взятия Сиракуз Архимед был убит, а его библиотека и инструменты разграблены.

Основной особенностью математических сочинений Архимеда является применение строгих математических методов в механике и физике. Такая особенность делает труды Архимеда едва ли не наиболее ярким образцом развития прикладных математических знаний, техники вычислений и новых математических методов в эпоху позднего эллинизма. Многочисленные механические изобретения и открытия Архимеда широко известны: архимедов винт, системы рычагов, блоков и винтов для поднятия и передвижения больших тяжестей, планетарий, метательные машины и т. д. Имя Архимеда связано также с теоремой о потере веса телами, погружёнными в жидкость.

Наиболее важный вклад Архимеда в математику относится к той области, которую теперь называют интегральным исчислением: теоремы о площадях плоских фигур и об объёмах тел. В «Измерении круга» он нашёл приближённое выражение для окружности, пользуясь вписанными и описанными правильными многоугольниками. В книге Архимеда «О сфере и цилиндре» находится выражение для поверхности сферы и для объёма сферы. В своей книге «Квадратура параболы» Архимед дал выражение для площади параболического сегмента. В книге «Спирали» мы находим «спираль Архимеда» и вычисление площадей, а в книге «О коноидах и сфероидах» – объём некоторых тел, образованных вращением кривых второго порядка.

Обилие вычислений у Архимеда отличает его от большинства творческих математиков Греции. Это придаёт его трудам, при всех их типично греческих особенностях, восточный оттенок.

Аполлоний (ок. 260 – 170 гг. до н. э.) – младший современник и научный соперник Архимеда. Продолжительное время он жил и работал в Александрии. Затем возвратился на родину в г. Пергам (в Малой Азии), где стал главой математической школы. Из многочисленных математических сочинений Аполлония до нас дошли только 7 из 8 книг «Конических сечений»: первые четыре книги – на греческом языке (на языке оригинала), книги 5 – 7 сохранились только в переводе на арабский язык; предполагаемое содержание восьмой книги восстановил английский астроном и физик Э. Галлей (1656 – 1742) исходя из содержания первых семи книг и сведений, сообщенных комментаторами Аполлония.

Книги 1 – 4 часто характеризуют как содержащие изложение основных свойств конических сечений. Следующие же книги относятся к специальным вопросам теории конических сечений.

В пятой книге впервые решаются экстремальные задачи вроде задачи о кратчайшем расстоянии от данной точки до конического сечения. Здесь появляются элементы теории разверток в виде определения геометрического места центров кривизны.

Шестая книга содержит разбор проблемы подобия конических сечений и обобщения задачи о построении семейства конусов, проходящих через данное коническое сечение.

В последней из известных, седьмой, книге исследуются вопросы, связанные с функциями, длин сопряженных диаметров, параметров и т. п.

«Конические сечения» - яркий пример теории, возникшей из логики развития самой математики и лишь со временем нашедшей практическое применение. Теория конических сечений Апполония нашла применение лишь в XVI – XVII вв., когда Кеплер установил, что планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, а Галилей показал, что брошенный камень (снаряд) летит в пустоте по параболе.

Математические теории и методы поздней античности. Последний период античного общества – период господства Рима. Рим завоевал Сиракузы в 212 г. до н. э., Карфаген – в 146 г. до н. э., Грецию – в 146 г. до н. э., Месопотамию – в 64 г. до н. э., Египет – в 30 г. до н. э. Всё, чем римляне овладели на Востоке, включая Грецию, было низведено до положения колонии, управляемой римскими администраторами.

Александрия оставалась центром античной математики. Велись оригинальные исследования, хотя компилирование и комментирование всё более становилось основным видом научной деятельности.

Одним из самых ранних александрийских математиков римского периода был *Никомах* из Герасы (ок. 100 г.), чьё «Арифметическое введение» – наиболее полное из сохранившихся изложений пифагорейской арифметики. Там рассматриваются большей частью те же вопросы, что и в арифметических книгах Евклида.

Гиппарх из Никеи (около 180-125 гг. до н.э.) – один из основоположников астрономии и тригонометрии.

Одно из крупнейших произведений александрийского периода – «Великое собрание» *Птолемея*, более известное как «Альмагест» (ок. 150 г.). В нём есть тригонометрия с таблицей хорд для углов от 0° до 180°, соответствующей таблице синусов для углов от 0° до 90° через полградуса. В «Альмагесте» мы находим формулу для синуса и косинуса суммы и разности двух углов и зачатки сферической тригонометрии. Теоремы формулируются геометрически – наши современные тригонометрические обозначения идут лишь от Эйлера (XVIII в.).

Несколько старше Птолемея *Менелай* (ок. 100 г.). В его «Сферике» содержится геометрия сферы и рассматриваются сферические треугольники – предмет, которого нет у Евклида. Здесь представлена «теорема Менелая» для треугольника в обобщённом для сферы виде. В астрономии Птолемея немало вычислений в шестидесятичных дробях, а трактат Менелая геометричен строго в духе евклидовой традиции.

Герон Александрийский (I в. н.э.) – механик и инженер, изобретатель. Его математические работы являются энциклопедией античной прикладной математики. В лучшей из них «Метрике» даны правила и формулы для точного и приближенного вычисления площадей и объемов. В частности, там приведены так называемая формула Герона для определения площади треугольника по трем сторонам $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, типично “египетские” основные дроби, например для $\sqrt{63} = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$.

Формулу Герона для объёма усечённой пирамиды с квадратным основанием можно свести к формуле, имеющейся в московском папирусе. Напротив, определение объёма пяти правильных многогранников у Герона дано в духе Евклида.

Диофант (III в. н.э.) – последний из великих математиков античности, один из основоположников алгебры. Основное по сочинение – «Арифметика» в 13 книгах, до нас дошло только 6. Он начал вновь строить алгебру не на базе геометрии, а опираясь на арифметику. Ввел буквенную символику: обозначение неизвестного, его степеней (до шестой степени), обратных чисел, символ отрицательного числа, равенства, употребляя сокращенную запись слов. Сформулировал основные правила алгебраических операций, действий со степенями. Ему принадлежит постановка и решение задач, сводимых к неопределенным уравнениям и их системам, решаемым в рациональных положительных числах. Такие уравнения теперь называются *диофантовыми*.

Сочинения Диофанта были отправной точкой для теоретико-числовых исследований П. Ферма, Л, Эйлера, К. Гаусса и других математиков.

Афинская академия была закрыта как языческая школа в 529 г. Возникли некоторые школы в Константинополе, столице Византии – Восточной римской империи, которые пытались продолжить традиции греческой математики. В 630 г. Александрию взяли арабы. Центр научной деятельности перемещается на восток: Китай, Индию, Среднюю Азию.

Таким образом, завершилась эпоха античной математики. Ее значение в истории математики огромно. Она определила дальнейшее развитие науки в течение многих веков.

<u>Практическое занятие</u>

I. Доклады по темам (45 минут):

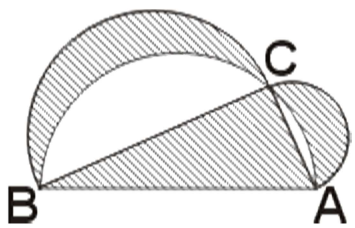
1. Апории Зенона
2. Начала Евклида и проблема пятого постулата.
3. Луночки Гиппократа Хиосского.
4. Три неразрешимые задачи древности: удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга.

II. Решение задач. Фронтальная работа. Работа у доски. Дискуссия. (45 минут)

Задачи математиков Древней Греции

1. Задача Пифагора. Всякое нечетное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов. Доказать!

2. Задача Гиппократа Хиосского



Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность, на его катетах как на диаметрах построены вне этого треугольника две полуокружности. Доказать, что сумма площадей двух образовавшихся луночек равна площади треугольника ABC.

3. Задача Евклида

В III в. до н.э. древнегреческая геометрия достигла своего апогея в работах знаменитого математика Евклида, написавшего 13 книг, Объединенных общим названием “Начала”. В трудах Евклида логическая сторона геометрии была доведена до очень высокого уровня.

Мул и осел под вьюком по дороге с мешками шагали.
Жалобно охал осел, непосильною ношей придавлен.
Это подметивший мул обратился к попутчику с речью:
“Что ж, старина, ты заныл и рыдаешь, будто девчонка?
Нес бы вдвойне я, чем ты, если б отдал одну ты мне меру,
Если ж бы ты у меня лишь одну взял, то мы бы сравнялись”.
Сколько нес каждый из них, о геометр, поведай нам это.

4. Задача Архимеда

Доказать, что площадь круга, описанного около квадрата, вдвое больше площади вписанного в квадрат круга.

5. Задачи Герона Александрийского

5.1. Из под земли бьют четыре источника. Первый заполняет бассейн за 1 день, второй – за два дня, третий – за три дня, четвертый – за 4 дня. За сколько времени наполнят бассейн все 4 источника вместе?

5.2. Даны две точки А и В по одну сторону от прямой l. Найти на прямой l такую точку С, чтобы сумма расстояний от А до С и от В до С была наименьшей.

Тема 2.3 Арабская математика. Зарождение алгебры

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте основные особенности арабской математики.
2. Опишите процесс становления алгебры как науки о решении уравнений в трудах арабских ученых.

Теоретические сведения

Арабская математика и ее основные особенности. На обширных территориях, от северо-запада Индийского полуострова до северного побережья Африки и юга Испании, с давних времен существовали многочисленные восточные империи.

Начиная с VII в. по всем этим землям прокатилась волна завоевательных войн, начатых племенами, населявшими Аравийский полуостров, под давлением острого хозяйственного кризиса. В течение ряда веков образовалась колоссальная область торгового обмена и экономических связей. Возникли большие города – центры торговли, ремесел и административного управления. Арабский язык стал официальным языком.

Сложившиеся условия хозяйственной и политической жизни благоприятствовали развитию математики:

1) Знания математики требовали нужды государственного управления, строительства, торговли и ремесел;

2) Международные связи, осуществляемые с помощью длительных путешествий, способствовали развитию математики, географии, астрономии;

3) Восточные правители проводили политику государственного покровительства наукам. В аппарате государственного управления появились специально оплачиваемые ученые.

В результате сложилась своеобразная система математических знаний. Преобладающее место в ней заняло создание разнообразных вычислительных методов и измерительных средств для нужд торговли, административного управления, землемерных работ, картографии, астрономии, для составления календаря и т. д. В эту систему также вошли данные античной греческой науки, сведения из математики народов Индии, Китая, а также коренного населения стран Ближнего и Среднего Востока. Эту систему математических знаний назвали *арабской математикой*. Период арабской математики охватывает VII – XV века. Арабская математика – это математика народов Средней Азии и Ближнего и Среднего Востока, т.е. математика арабоязычеcких народов.

Арабская математика обладала характерными особенностями:

1) В вычислительной практике арабоязычных народов равноправно действовали обе системы счисления: десятичная абсолютная и 60-ричная. Первая была заимствована из Индии не позднее VII в. н. э. и быстро получила широкое распространение. Параллельно с десятичной сохранялась и регулярно

употреблялась в астрономических обсерваториях унаследованная от вавилонян 60-ричная система счисления. В духе математиков Древнего Вавилона составлялись и использовались вспомогательные таблицы наподобие таблицы умножения (от $1 \cdot 1$ до $59 \cdot 59$).

2) В арсенале арабских математиков накопилось много вычислительных приемов и специальных алгоритмов. Уровень вычислительной техники был очень высокий.

3) Для все арабской математики характерно стремление к производству операций над иррациональностями. Идея единой концепции действительного числа путем объединения рациональных и иррациональных чисел получила в арабской математике некоторое завершение.

4) В структуре арабской математики сравнительно быстро впервые в истории выделилась в качестве самостоятельной науки алгебра, был сформулирован предмет этого нового отдела и построена систематическая теория.

5) В тригонометрии стал преобладать материал об алгебраических зависимостях тригонометрических функций и о вычислительных средствах и возможностях тригонометрии. Тригонометрия стала отдельной математической наукой.

6) Геометрические интересы не были главными в арабской математике, однако уровень геометрических знаний был достаточно высок. Были проведены глубокие исследования по основаниям геометрии.

Становление алгебры как науки о решении уравнений в трудах арабских ученых. Проследим историю развития математики стран ислама через труды выдающихся мусульманских ученых. Первым в этом ряду стоит *Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми* (787-850) (рис.21). Он был хорошо знаком с индийской математикой и наукой эллинистических стран. Написал несколько книг по математике и астрономии. В своей книге «Об индийском счете» впервые разъяснил индийскую систему записи чисел. Книга была переведена на латынь и стала одним из источников, через которые Европа познакомилась с десятичной позиционной нумерацией. Автора в переводах называли Aigorizmi, Algorithmus, что ввело в наш математический язык термин «алгоритм».

В другой книге «Хитаб аль-джабр вал-мукабала» («Исчисление восполнения и противопоставления») он рассматривал вопросы решения уравнений. Эта алгебра стала известна тоже в латинском переводе, и слово «аль-джабр» стало употребляться как синоним всей науки «алгебры», которая до XIX в. была наукой о решении уравнений.

Рисунок 21. Аль-Хорезми. 783 – 850 гг. н.э.

В алгебраическом трактате ал-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1) “Квадраты равны корням”, т.е. $ax^2 = bx$
2) “Квадраты равны числу”, т.е. $ax^2 = c$
3) “Корни равны числу”, т.е. $ax = c$
4) “Квадраты и числа равны корням”, т.е. $ax^2 + c = bx$
5) “Квадраты и корни равны числу”, т.е. $ax^2 + bx = c$
6) “Корни и числа равны квадратам”, т.е. $bx + c = ax^2$

Для ал-Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого из этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Автор излагает способы решения указанных уравнений, пользуясь приемами ал-джабр и ал-мукабала. Его решение, конечно, не совпадает полностью с нашим. Уже не говоря о том, что оно чисто риторическое, следует отметить, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида ал-Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывали нулевого решения, вероятно потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений ал-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства.

Рассмотрим пример.

Задача. Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень. (Подразумевается решение уравнения $x^2 + 21 = 10x$)

Решение Ал-Хорезми: раздели пополам число корней, получишь 5, умножь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

Трактат ал-Хорезми является первой дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решений. Большим недостатком алгебры во времена ал-Хорезми было отсутствие символики, словесное описание операций. Это задерживало развитие алгебры.

В VIII-X вв., в начальный период развития математики стран ислама, арабские ученые перевели на свой язык индийские сиддханты и сочинения греческих математиков – Евклида, Архимеда, Аполлония, Птолемея, Диофанта и др. Удивительно то, что со многими работами греков Европа позже познакомилась через арабские переводы. В этом отношении особо выделяется *Сабит ибн Корра* (836-901). Этот математик, астроном, механик, переводчик работал в Багдаде. Именно в его переводах сохранились мемуары Аполлония и Архимеда. Все позднейшие ученые пользовались его переводами «Начал» Евклида, «Альмагеста» Птолемея.

Многие арабские математики пытались решить классические задачи древности. В частности, в работе «Деление прямолинейного угла на три равные части» Сабит ибн Корра решал задачи трисекции угла и удвоения куба. Он занимался также исследованиями по теории параллельных прямых, посвященных V постулату. На протяжении X в. уравнениями были выражены многие геометрические, тригонометрические, физические задачи: трисекция угла, построение вписанных многоугольников и др.

Омар Хайям (1048-1131) – персидский поэт, философ, астроном и математик. Больше известен как поэт, автор «Рубайят». Он составил «Маликшахские астрономические таблицы», работал над реформой солнечного календаря. Она была осуществлена в 1079 г. Этот календарь действовал в Иране почти 900 лет и был отменен только в 1976 г. Известно, что календарь Хайяма «Джалали» точнее григорианского календаря.

Хайям первым среди математиков создал теорию решения уравнений до третьей степени включительно и дал общую классификацию всех уравнений в трактате «О доказательствах задач аль-джабры и аль-мукабалы» (1069). В этом труде он определил и предмет алгебры – нахождение неизвестных величин, отнесенных к другим известным величинам с помощью уравнений. Тем самым, алгебра рассматривается как наука об уравнениях.

Ат-Туси (1201-1274) – ученый-энциклопедист и государственный деятель. Ат-Туси перевел на арабский язык важные работы древних ученых и написал к ним комментарии и приложения. Написал ряд трактатов по математике, астрономии, философии, медицине. Развивал связанные с астрономией разделы математики, в первую очередь тригонометрию. Благодаря нему тригонометрия отделилась от астрономии. В его «Трактате о полном четырехстороннике» (1260) плоская и сферическая тригонометрия выступают как самостоятельные предметы. В них стал преобладать материал об алгебраических зависимостях. Большое значение имела также его работа «Изложение Евклида», в которой он сформулировал новый постулат, которым предложил заменить пятый постулат Евклида.

Таким образом, тригонометрия, возникшая в трудах александрийских и индийских ученых, существенно продвинулась вперед в работах математиков и астрономов исламских стран (Сабит ибн Корра, аль-Бируни, аль-Баттани, ат-Туси, аль-Каши). Из совокупности вспомогательных средств астрономии она преобразовалась в науку о тригонометрических функциях в плоских и сферических треугольниках и о способах решения этих треугольников. Арабские математики применяли уже линии синуса, косинуса, тангенса, котангенса.

Последним крупным ученым исламской математики считается *аль-Каши* (?-1430) – математик и астроном, работавший в Самаркандской обсерватории Улугбека. Последним произведением аль-Каши было «Ключ арифметики» – энциклопедия элементарной математики своего времени, приспособленная к нуждам практиков-вычислителей. Книга выделялась среди средневековой математической литературы богатством материала, ясностью и стройностью изложения. В этом трактате аль-Каши впервые более точно, чем ранее в Китае, изложил и применил теорию десятичных дробей, описал правила действий над ними. Отделял дробную часть от целой части вертикальной чертой или писал другим цветом. В Европе десятичные дроби были введены голландцем С. Стевином только в 1586 г. В этой же работе аль-Каши изложил приемы извлечения корней любой степени, один из которых был основан на применении формулы бинома Ньютона для натурального показателя. Аль-Каши также дал правила приближенного решения уравнений высших степеней, усовершенствовал тригонометрические вычисления.

Математика стран ислама оказала исключительное влияние на развитие математики и на Востоке, и на Западе. Значительная ее часть создавалась в алгоритмически-алгебраическом духе, но существенно продвинулась по отношению к античным методам. Западная Европа достигла того же уровня только в XVI в.

Практическое занятие

I. Доклады по темам (45 минут):

1. Вычислительные приемы и алгоритмы арабской математики.
2. Решение уравнений в арабской математике.
3. Омар Хайям – поэт, философ, математик.
4. Проблема пятого постулата в трудах арабских ученых.

II. Решение задач. Фронтальная работа. Работа у доски. Дискуссия. (45 минут)

Задачи арабской математики

1. Задача из легенды “История Морадбальса”

Одна женщина отправилась в сад собирать яблоки. Чтобы выйти из сада, ей нужно было пройти через 4 двери, у каждой из которых стоял стражник.

Стражнику у первых дверей женщина отдала половину собранных ею яблок. Дойдя до второго стражника, женщина отдала ему половину оставшихся яблок. Также она поступила и с третьим стражником; а когда она поделилась яблоками со стражником у четвертых дверей, то у нее осталось лишь 10 яблок. Сколько яблок она собрала в саду?

2. Задача из сказки “1001 ночь” (ночь 458 – я)

Стая голубей подлетела к высокому дереву. Часть голубей села на ветвях, а другая расположилась под деревом. Сидевшие на ветвях голуби говорят расположившимся внизу: “Если бы один из вас взлетел к нам, то вас стало бы втрое меньше, чем нас всех вместе, а если бы один из нас слетел к вам, то нас с вами стало бы поровну”. Сколько голубей сидело на ветвях и сколько под деревом?

3. Задача Абу Камила

Разделить 10 на две части x и 10-x так, что $\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=\sqrt{5}$

4. Задача аль – Каши

Плата работнику за месяц, то есть за 30 дней, 10 динаров и платье. Он работал три дня и заработал платье. Какова стоимость платья?

5. Задача ибн Сины

Если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1. Доказать!

Раздел 3. Математика периода переменных величин и современного периода

Тема 3.1 Математика периода переменных величин

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Опишите основные достижения математики периода переменных величин.
2. Опишите процесс становления аналитической геометрии в трудах европейских ученых.

3. Опишите развитие дифференциального и интегрального исчисления в трудах И. Ньютона и Г.В. Лейбница.

Теоретические сведения

Основные достижения математики периода переменных величин. XVII-XVIII века называют Новым временем. В Европе в это время укреплялся новый общественный строй – капитализм. Новое время было и эпохой научной революции. Прежде всего, изменилась концепция мира в целом. В трудах Коперника, Кеплера утвердилась и усовершенствовалась гелиоцентрическая система мира. Галилей создал новую механику. Наиболее заметных достижений достигла оптика благодаря открытию зрительной трубы, телескопа, микроскопа. Были изобретены часы с маятником, барометр, термометр. Открытие научных приборов и их совершенствование расширило возможности и точность научных измерений.

В XVII веке в развитии математики было сделано столько, сколько не было сделано со времен античности. Математические исследования расширились, возникли новые разделы науки. Создание аналитической геометрии и анализа произвело в математике подлинную революцию.

К концу XVI в. математика складывалась из арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. Была введена удобная десятичная запись чисел, усовершенствована техника вычислений. В XVII веке в физико-математической картине мира на первое место выдвигались законы, которые представляли собой аналитически выраженные функциональные зависимости между совместно изменяющимися величинами: законы Кеплера о зависимости интенсивности света от расстояния до его источника, закон Галилея о движении тел в пустоте, закон Торричелли, закон Бойля-Мариотта, закон Гука о растяжении пружины и др. Таким образом, преобладающее значение в разработке физики приобрело измерение величин, поиск законов, выражающихся формулами алгебры. Таким образом, в математике происходит переход к исследованию переменных величин и функций, как аналогов механического движения и любого количественного изменения вообще.

Изменились формы существования математики: появились научные организации (Лондонское королевское общество, Парижская академия и др.). Таким образом, стали преобладать коллективные формы труда ученых при государственном покровительстве наукам.

Было положено начало периодики.

В XVII веке берут начало почти все математические дисциплины, входящие в классический фонд современного высшего математического образования.

В трудах Декарта и Ферма начала формироваться аналитическая геометрия. В разнообразных формах стал возникать математический анализ. После возникновения математического анализа все механические и физические задачи стали записываться в виде дифференциальных уравнений. Появились первые задачи вариационного исчисления.

Формировались в отдельную область геометрические приложения анализа (1604 г. Кеплер вывел формулу радиуса кривизны, 1673 г. Гюйгенс дал математическое выражение эволют и эвольвент). Т. о. были заложены основы дифференциальной геометрии.

Положено начало учению о перспективе и проективной геометрии в сочинениях Ж. Дезарга и Б. Паскаля. Первую научную форму приобрела теория вероятностей.

Элементарная математика приобрела завершенную форму благодаря заменен риторической алгебры символьной, а также изобретению логарифмов.

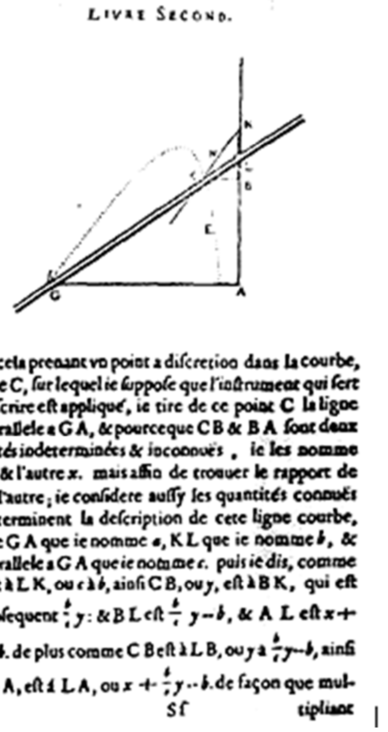
Становление аналитической геометрии в трудах европейских ученых.

Новый мощный толчок к развитию всей математики был дан ***Рене Декартом*** (1596-1650), выдающимся французским философом, математиком, физиком и физиологом (рис.22). Декарт искал общий метод мышления, который

Рисунок 22. Рене Декарт

позволял бы делать открытия и выявлять истину в науках. Единственной наукой о природе, обладавшей систематическим изложением, была тогда механика, которая основывалась на математике. Все явления природы Декарт трактовал как перемещения делимых и подвижных частей трехмерно протяженной материи. По мнению Декарта, математика должна была стать наиболее важным средством для понимания мира.

Свою новую математику Декарт называл всеобщей. Ее изложение содержится в единственном печатном труде по математике – «Геометрии» (1637). Значительную его часть составляет теория алгебраических уравнений. Заслуга Декарта в том, что он последовательно применил хорошо развитую алгебру начала XVII в. к геометрии греков. Это явилось началом современной аналитической геометрии. В «Геометрии» Декарт впервые ввел понятие переменной величины и функции (рис. 23).



LIVRE SECOND.

Aprés cela prenant vn point a discretion dans la courbe, comme C, sur lequel ie suppose que l'instrument qui sert a la descrire est appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A sont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouver le rapport de l'vne a l'autre; ie considere aussy les quantités connuës qui determinent la description de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L est à L K, ou c à b, ainsi C B, ou y, est à B K, qui est par consequent $\frac{b}{c}y$: & B L est $\frac{b}{c}y - b$, & A L est $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B est à L B, ou y a $\frac{b}{c}y - b$, ainsi a, ou G A, est à L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que multiplians

S f

Рисунок 23. Страница первого издания “Геометрии” Р. Декарта (1637 г.): начало вывода уравнения линии ЕС

Для представления общей непрерывной величины Декарт пользовался геометрией. Он построил исчисление отрезков: представлял любые величины и составленные из них выражения отрезками, в отличие от геометрической алгебры греков. Отрезки обозначались буквами: данные – начальными буквами алфавита, неопределенные количества – последними буквами *x*, *y*, *z*. Все задачи математики, по Декарту, могут быть выражены с помощью уравнений. Единственный общий метод решения уравнений – построение их корней, как отрезков – координат точек пересечения некоторых плоских кривых.

Координаты появились еще в древности, например, широта и долгота в «Географии» Птолемея. Другой вид координат – отрезки, зависимости между которыми («симптомы») выражали определяющие свойства этих кривых. Слово «координаты» ввел Лейбниц только в 1692 г. В «Геометрии» Декарта нет «декартовых осей», не выведены уравнения прямой линии и конических сечений. Он чертил только одну ось с начальной точкой и указывал направление других координат; вообще говоря, наклонных. Отрицательные абсциссы не рассматривались. Хотя Декарт их истолковывал как противоположно направленные отрезки. «Истинные» (действительные) корни он подразделял на «явные» (положительные) и «неявные» или «ложные» (отрицательные). Также у него существовали «воображаемые» корни, как недействительные корни, которые можно вообразить себе в числе, требуемом для справедливости основной теоремы алгебры. В алгебраических обозначениях Декарта многое уже является современным: степени a^2, a^3,..., радикалы $\sqrt{a}$.

Декарт также первым описал алгебраический способ построения касательных и нормалей к кривым. При этом он пользовался еще одним важным методом – «методом неопределенных коэффициентов» для многочленов.

Среди открытий Декарта заслуживают внимания также вычисление площади циклоиды по методу неделимых и построение к ней касательных. Он знал также открытое позднее Эйлером соотношение между числами граней, вершин и ребер выпуклых многогранников. С именем Декарта связаны такие понятия, как декартовы координаты, произведение, парабола, лист, овал и др. Его «Геометрия» оказала огромное влияние на развитие математики, и около 150 лет алгебра и геометрия развивались в направлениях, указанных Декартом.

Несколько ближе к современной аналитической геометрии подошел другой великий математик того периода – ***Пьер Ферма*** (1601-1665), юрист из Тулузы (рис. 24). Он стал разносторонним математиком: вместе с Декартом явился создателем аналитической геометрии, вместе с Паскалем заложил основы теории вероятностей, создал новый метод касательных и экстремумов. Ферма может считаться основоположником алгебраической теории чисел.

Трактат «Введение в изучение плоских и телесных мест» (1636) содержит начала аналитической геометрии Ферма. Он формулирует принцип аналитической геометрии следующим образом: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место, и конец одной из них описывает прямую или же кривую линию... Для установления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин». Во «Введении» впервые встречаются уравнения для прямых линий и конических сечений относительно системы перпендикулярных осей.

Рисунок 24. Пьер Ферма

Развитие дифференциального и интегрального исчисления в трудах И. Ньютона и Г.В. Лейбница.

В XVII в. перед естествознанием возникла новая проблема – найти законы движения. Для этого аппарат математики постоянных величин был недостаточным. Работы Кавальери, Декарта, Валлиса, Гюйгенса, Паскаля и др. подготовили все для построения дифференциального и интегрального исчисления. Теория дифференциального и интегрального исчисления впервые появилась в работах Ньютона и Лейбница и стала могучим средством решения новых задач. О том, что они опирались на труды предыдущих поколений математиков, Ньютон сказал: «Я сделал так много потому, что стоял на плечах гигантов».

Очень много написано по вопросу о приоритете этого открытия. Установлено, что оба они открыли свои методы независимо друг от друга. Ньютон первым открыл свои методы анализа (1665-1666), а Лейбниц позже (1673-

1676), но Лейбниц первым выступил в печати (Лейбниц в 1684-1686 гг., Ньютон в 1704-1736 гг.).

Гениальный английский ученый, основоположник современной механики, создатель математики непрерывных процессов *Исаак Ньютон* (1643-1727) в 1665-1666 гг. открыл свой общий метод анализа, который назвал «теорией флюксий» (рис. 25). Первое систематическое изложение этой теории дано в рукописи «Следующие предложения достаточны, чтобы решать задачи с помощью движения» (1666). В его следующем труде «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (1669) содержатся фундаментальные открытия в области бесконечных рядов. В частности, он обобщил общее разложение степени бинома на случай любого действительного показателя. Данный Ньютоном метод изучения функций с помощью рядов имел впоследствии огромное значение для всего анализа.

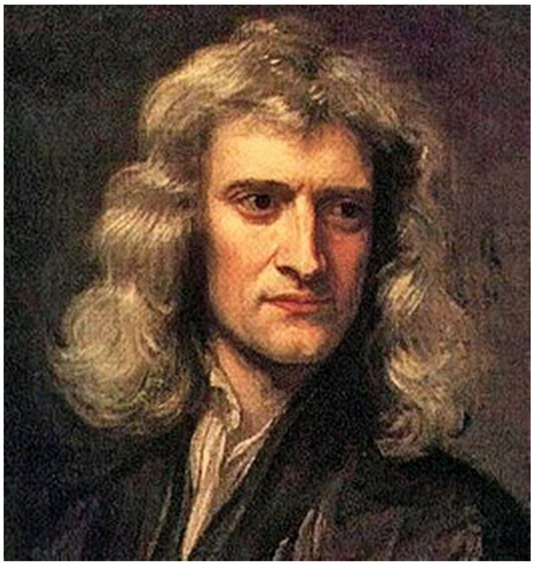


Рисунок 25. Исаак Ньютон

Изложение анализа Ньютона имеет механическую основу. Текущие переменные величины изменяются в зависимости от времени, они называются «флюэнтами», обозначаются v, x, y z. Скорости, с которыми каждая флюэнта изменяется при движении, называются флюксиями и обозначаются $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{v}$.

Бесконечно малые изменения флюэнт, названные «моментами флюксий», обозначаются vo, xo, yo, zo, где o – «бесконечно малое количество». Таким образом, *флюкция* Ньютона – это производная. Однако его способ не был вполне определенным. Бесконечно малое количество было определено нестрого: в одних случаях им пренебрегали, отбрасывали, в других случаях на него делили, то есть считали ненулевым.

Ньютоном были поставлены в терминах метода флюкций две главные проблемы анализа. Первая: по данному соотношению между флюэнтами определить соотношение между флюксиями. Это задача дифференцирования функций, зависящих от «времени». Вторая: по данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюэнтами. Это задача интегрирования дифференциального уравнения первого порядка.

С именем Ньютона связано решение многих взаимосвязанных задач математики и физики. Он рассматривал математику только как способ для физических исследований. Его основной труд «Математические начала натуральной философии» (1687) насквозь проникнут духом новых исчислений, он показывает все могущество этих исчислений в изучении законов природы. В этой работе он свел все известные до него и все найденные им самим сведения о движении и силе в одну дедуктивную систему земной и небесной механики. В этом же труде Ньютон впервые разработал общую теорию предельных переходов под названием «метода первых и последних отношений». Здесь вводится и сам термин «предел» (limes). Понятию предела определения не дается, метод пределов излагается в 12 леммах.

Вклад Ньютона в математику не исчерпывается созданием анализа. Его «Универсальная арифметика» становится одним из первых учебников Нового времени по арифметике, алгебре и применению алгебры к геометрическим задачам. В алгебре ему принадлежат метод численного решения алгебраических уравнений (метод Ньютона), важные теоремы о симметрических функциях корней алгебраических уравнений (формулы Ньютона), об отделении корней. В сочинении «Всеобщая арифметика» (1707) он развил учение о числе, дал определение числа: «Под числом: мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное. Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей».

Недостатки аналитических методов Ньютона вызывали нападки на теорию флюксий. Эти недоразумения были устранены лишь после четкого установления современного понятия предела.

Великий немецкий ученый *Готфрид Вильгельм Лейбниц* (1646-1716) – один из основоположников математического анализа (рис. 26). Родился в Лейпциге. Окончил юридический факультет Лейпцигского университета. Состоял на юридической и дипломатической службе и выезжал в Париж. Творческая математическая деятельность началась там, где он познакомился с Гюйгенсом и под его руководством изучал работы Галилея, Декарта, Ферма, Паскаля и самого Гюйгенса. В 1700 г. организовал Академию наук в Берлине и стал ее первым президентом. Способствовал открытию академий наук в Вене и Петербурге. Встречался с Петром I, работал над проектом организации образования в России.

Рисунок 26. Готфрид Вильгельм Лейбниц

Лейбниц нашел свое новое исчисление в 1673-1676 гг. под влиянием Гюйгенса, в ходе изучения работ Декарта и Паскаля. Он знал, что Ньютон обладал подобным методом. Но подход Ньютона был механическим, а подход Лейбница – геометрическим. При этом он исходил не из квадратуры кривых, как Ньютон, а из проблемы касательных. Рассматривал «характеристический треугольник» *(dx, dy, dz),* который уже встречался у Паскаля. Прежние частные и разрозненные приемы Лейбниц свел в единую систему взаимосвязанных понятий анализа, что позволило производить действия с бесконечно малыми по определенному алгоритму. Впервые анализ в форме Лейбница изложен им в печати в 1684 г. в статье «Новый метод для максимумов и минимумов, а также для касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый вид исчисления для этого». В этой статье впервые вводились символы *dx, dy,* правила дифференцирования произведения и частного:

$$d(uv) = vdu + udv,$$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2}$,

условие $du = 0$ для точек экстремума и $d^2y = 0$ для точек перегиба.

Разъяснения анализа Лейбница страдали той же неопределенностью, что и у Ньютона. Иногда dx, dy были конечными величинами, иногда меньше любого определенного количества и все-таки не нули. В 1686 г. вышла следующая статья «О скрытой геометрии ...» с правилами интегрального исчисления. В ней содержался символ $\int$, который Лейбниц называл «суммой» (термин «интеграл» позже ввел Я. Бернулли).

Лейбниц был одним из самых продуктивных изобретателей современных математических символов. Название «дифференциальное и интегральное исчисление» принадлежит Лейбницу. Он же ввел термины: «функция», «переменная величина», «координаты», «абсцисса», «ордината», «дифференциал», «алгоритм». Благодаря его влиянию стали пользоваться знаками равенства «=» и умножения «•», логической символикой. Математические работы Лейбница не ограничиваются областью анализа. Ученый занимался поиском всеобщего метода для овладения науками. Он искал «всеобщий язык», в котором все ошибки мысли выявились бы как ошибки вычислений. Это привело его к символической логике. Таким образом, Лейбниц считается одним из основоположников математической логики.

Лейбница можно считать идейным вдохновителем современной машинной математики. Он одним из первых сконструировал счетную машину, которая выполняла не только сложение и вычитание, но и умножение, деление, возведение в степень и извлечение квадратного и кубического корней. Свыше 40 лет Лейбниц посвятил усовершенствованию своего изобретения. Изобрел он и первый интегрирующий механизм.

Лейбниц ввел понятие определителя и выдвинул некоторые идеи, касающиеся теории определителей, которые далее развивали Вандермонд, Коши, Гаусс и окончательно разработал К. Якоби.

Влияние работ Лейбница на современников оказалось огромным. Он создал собственную математическую школу, в которую входили братья Бернулли, Лопиталь, Эйлер и другие великие ученые того периода.

Практическое занятие

I. Доклады по темам (45 минут):

1. Развитие математики в XVIII веке.
2. Леонард Эйлер и его вклад в развитие математики.
3. Великие математики XVIII века и их математическое наследие (династия Бернулли, Алексис Клод Клеро, Жан ле Рон Даламбер, Жозеф Луи Лагранж, Пьер Симон Лаплас).
4. Развитие математики в России в XVII – XVIII веках.

II. Решение задач. Фронтальная работа. Работа у доски. Дискуссия. (45 минут)

Задачи Эйлера

1. Две крестьянки принесли на рынок вместе 100 яиц, одна больше, нежели другая. Обе выручили за яйца одинаковые суммы денег. Первая сказала второй: «Будь у меня твои яйца, я бы выручила 15 крейцеров». Вторая ответила: «А будь твои яйца у меня, я выручила бы за них 6 и 2/3 крейцера». Сколько яиц было у каждой крестьянки?

2. Издавна среди жителей Кёнигсберга была распространена такая загадка: как пройти по всем городским мостам (через реку Преголя), не проходя ни по одному из них дважды. Многие пытались решить эту задачу как теоретически, так и практически, во время прогулок. Впрочем, доказать или опровергнуть возможность существования такого маршрута никто не мог. В 1736 году задача о семи мостах заинтересовала выдающегося математика, члена Петербургской академии наук Леонарда Эйлера, о чём он написал в письме итальянскому математику и инженеру Джованни Джакобо Маринони от 13 марта 1736 года. В этом письме Эйлер приводит правило, пользуясь которым, легко определить, можно ли пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них.

3. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, M – точка пересечения медиан, H – ортоцентр. Докажите, что точки O, M. и H лежат на одной прямой, причем OM:MH=1:2. (Эта прямая называется прямой Эйлера).

4. *Определение:* Окружностью девяти точек называют окружность, описанную около срединного треугольника (треугольника, образованного серединами сторон данного треугольника). Также эту окружность называют окружностью Эйлера (Эйлер доказал её существование) и окружностью Фейербаха (Карл Вильгельм фон Фейербах доказал, что эта окружность касается вписанной окружности треугольника).

Пусть ABC – некоторый треугольник. Докажите, что на одной окружности лежат следующие девять точек: середины A_1, B_1, C_1 сторон BC, CA, AB соответственно, основания высот A_2, B_2, C_2, опущенных из A, B, C, середины A_3, B_3, C_3 отрезков AH, BH, CH, где H – ортоцентр треугольника ABC (рис. 27).

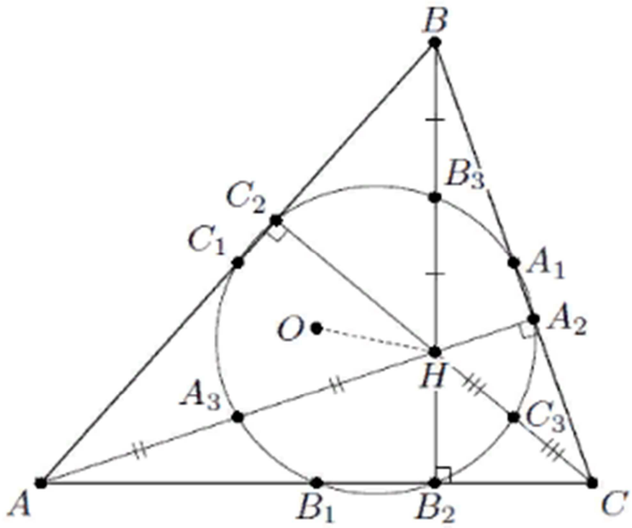


Рисунок 27. Чертеж к задаче об окружности Эйлера

Задачи Ньютона

5. Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и скорости роста, имеют площади: 3 1/3 га, 10 га и 24 га. Первый прокормил 12 быков в продолжение 4 недель; второй - 21 быка в течение 9 недель. Сколько быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?" (Задача из “Всеобщей арифметики”)

6. Купец имел некоторую сумму денег. В первый год он истратил 100 фунтов. К оставшейся сумме добавил третью ее часть. В следующем году он вновь истратил 100 фунтов и увеличил оставшуюся сумму на третью ее часть. В третьем году он опять истратил 100 фунтов. После того, как он добавил к остатку третью его часть, капитал его стал вдвое больше первоначального. Определить первоначальный капитал купца. (Задача из “Всеобщей арифметики”)

Тема 3.2 Период современной математики

Контрольные вопросы

1. Кратко охарактеризуйте основные достижения математики современного периода.
2. Опишите процесс становления неевклидовой (гиперболической) геометрии.
3. Опишите развитие концепции аксиоматического построения математики.

Теоретические сведения

***Основные достижения математики современного периода*.**

Период современной математики начинается с середины XIX века. Начало этого периода ознаменовалось открытием неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевским (1826) и Я. Больяи (1832), которое радикально изменило существовавшие воззрения на характер геометрических понятий математического пространства. Качественно изменилась и алгебра: стали рассматриваться различные операции не только над числами, но и над объектами другой природы (векторами, кватернионами, матрицами, логическими высказываниями и т. д.), что привело к необходимости исследовать общие свойства алгебраических операций в произвольных множествах. Возникают алгебраические структуры, ставшие в дальнейшем основным предметом изучения алгебры. Глубокие сдвиги произошли и в области математического анализа, что выразилось в критическом пересмотре основных понятий анализа, начиная с понятия действительного числа, понятий «предел функции», «непрерывность», «производная», «интеграл». Появилась теория точечных множеств, произошел критический пересмотр оснований математики.

Накопленный в 17 и 18 вв. огромный фактический материал привёл к необходимости углублённого логического анализа и объединения его с новых точек зрения. Открытие и введение в употребление геометрической интерпретации комплексных чисел, доказательство неразрешимости в радикалах общего алгебраического уравнения пятой степени, создание французским математиком Огюстом Коши основ теории функций комплексного переменного, работы Коши по строгому обоснованию анализа бесконечно малых, создание русским математиком Н. И. Лобачевским (1826, опубликовано в 1829-30) и венгерским математиком Яношом Больяи (1832) неевклидовой геометрии, работы немецкого математика К. Гаусса (1827) по внутренней геометрии поверхностей – вот типичные примеры наметившихся на рубеже XVIII и XIX вв. новых тенденций в развитии математики. Связь математики с естествознанием, оставаясь по существу не менее тесной, приобретает теперь более сложные формы.

Замечательным примером теории, возникшей в результате внутреннего развития самой математики, явилась «воображаемая геометрия» Лобачевского. Самому Лобачевскому удалось применить свою геометрию лишь к вычислению некоторых интегралов. Позднее были обнаружены связи его геометрии с теорией поверхностей и с теорией групп преобразований, геометрия эта нашла применения при исследовании важных классов аналитических функций и т. д. Только в XX в. с созданием теории относительности получило осуществление предположение Лобачевского о возможности применения его геометрических идей к исследованию реального физического пространства.

Развитие неевклидовой (гиперболической) геометрии. Уже древнейшие комментаторы Евклида Посидоний (II в. до н.э.), Геминус (I в. н.э.) подвергали сомнению пятый постулат Евклида.

Но только в первой половине XVIII века приходит мысль применить метод доказательства от противного. Эта гениальная идея принадлежит Саккери (“Евклид, избавленный от всякого пятна”). Саккери рассматривает четырехугольник, у которого две противоположные стороны, перпендикулярные основанию, равны между собой (рис. 28).

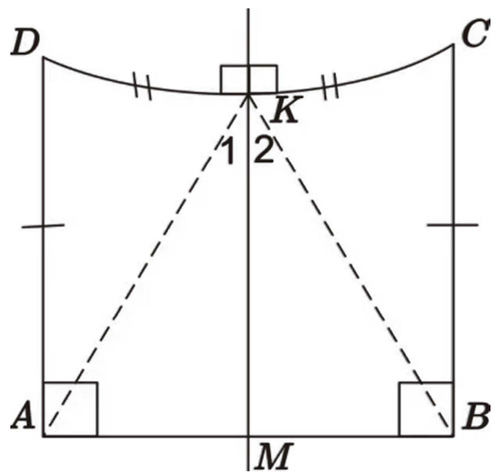


Рисунок 28. Четырехугольник Саккери

Если другие два угла равны $\frac{\pi}{2}$, то пятый постулат доказан. Но Саккери (и в этом его гениальность) делает еще два предположения: гипотезу острого угла и гипотезу тупого угла. Гипотеза тупого угла приводит к противоречию, а гипотеза острого угла к противоречию не приводит.

Через три года после Саккери Ламберт ставит ту же задачу и рассматривает четырехугольник с тремя прямыми углами и опять получает, казалось бы, парадоксальный результат.

В 1799 году Карл Фридрих Гаусс идет по тому же пути – по пути планомерного вывода следствий из гипотезы острого угла. Его размышления привели к идее недоказуемости пятого постулата.

В 1823 году Янош Больяи нашел то основное соотношение между длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую и углом, который составляет с этим перпендикуляром асимптота (параллельная Лобачевского), которое является ключом к неевклидовой геометрии. Ученый в восторге от своего открытия: “Я создал новый, другой мир из ничего!”. Он не подозревал, что в это же время в далекой Казани Н.И. Лобачевский печатал свою первую работу “О началах геометрии”.

Исследования Н.И Лобачевского находились за пределами понимания его соотечественников. В настоящее время геометрия Лобачевского является одним из фундаментальных представлений об окружающей нас Вселенной.

Развитие концепции аксиоматического построения математики. Чрезвычайное расширение предмета математики привлекло в XIX в. усиленное внимание к вопросам её «обоснования», т. е. критического пересмотра её исходных положений (аксиом), построения строгой системы определений и доказательств, а также критического рассмотрения логических приёмов, употребляемых при этих доказательствах.

В применении к основам анализа (теория действительных чисел, теория пределов и строгое обоснование всех приёмов дифференциального и интегрального исчисления) результаты этой работы с большей или меньшей полнотой излагаются в настоящее время в большинстве учебников (даже чисто практического характера). Однако до последнего времени встречаются случаи, когда строгое обоснование возникшей из практических потребностей математической теории запаздывает. Так в течение долгого времени уже на рубеже XIX и XX вв. было с операционным исчислением, получившим весьма широкие применения в механике и электротехнике. Лишь с большим запозданием было построено логически безупречное изложение математической теории вероятностей.

Только к концу XIX в. сложился стандарт требований к логической строгости, остающийся и до настоящего времени господствующим в практической работе математиков над развитием отдельных математических теорий. Этот стандарт основан на теоретико-множественной концепции строения любой математической теории. С этой точки зрения любая математическая теория имеет дело с одним или несколькими множествами объектов, связанных между собой некоторыми отношениями. Все формальные свойства этих объектов и отношений, необходимые для развития теории, фиксируются в виде аксиом, не затрагивающих конкретной природы самих объектов и отношений. Теория применима к любой системе объектов с отношениями, удовлетворяющей полошенной в её основу системе аксиом. В соответствии с этим теория может считаться логически строго построенной только в том случае, если при ее развитии не используется никаких конкретных, не упомянутых в аксиомах, свойств изучаемых объектов и отношений между ними, а все новые объекты или отношения, вводимые по мере развития теории сверх упомянутых в аксиомах, формально определяются через эти последние.

Таким образом, в первой половине XX в. возникла концепции аксиоматического построения всей математики. Согласно этой концепции, в основе всей математики лежит чистая теория множеств. Но в теории множеств обнаружились парадоксы. Поэтому потребовался пересмотр оснований математики. Возникли два направления обоснования математики: *интуиционистское* и *конструктивное.* Немецкий математик Эрнст Цермело (1871-1953) дал первую систему аксиом теории множеств. Была аксиоматизирована алгебра, элементарная геометрия, теория вероятностей, топология, теория меры и др. В конце тридцатых годов группа французских математиков объединилась, чтобы построить всю математику на аксиоматической основе. Результатом их деятельности стал многотомный трактат «Элементы математики», изданный под псевдонимом Никола Бурбаки. Фундаментом являлась теория множеств. Эта попытка осталась незавершенной. Тем не менее их работа имела большое значение для развития математики. По крайней мере был создан язык, на котором математики понимают друг друга.

Войны XX века разорвали международные научные связи. После 1945 г. они быстро восстановились. В 1950 г. собрался первый послевоенный Международный математический конгресс в США (Гарвард). С тех пор конгрессы собирались регулярно. Во второй половине столетия математика приобрела характер истинно интернациональной науки. Начала осуществляться мысль Гильберта о том, что для математика весь культурный мир представляет собой единую страну.

Процесс математизации различных наук идет в нарастающем темпе. Теперь можно указать и на нетрадиционные области ее применения: химия, биология, лингвистика, психология, медицина, геология и др. Происходит качественное изменение самой математики. Понятие предмета математики приобретает все более глубокое содержание.

<u>Практическое занятие</u>

I. Доклады по темам (45 минут):

1. Последний штурм “Великой теоремы Ферма”.
2. Развитие теории золотого сечения.
3. Эварист Галуа и теория групп.
4. Создание теории функций комплексного переменного.

II. Решение задач. Фронтальная работа. Работа у доски. Дискуссия. (45 минут)

Правило Гаусса и его применение

1. Известный немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) с раннего детства отличался от своих сверстников. Несмотря на то, что он был из небогатой семьи, он достаточно рано научился читать, писать, считать. В его биографии есть даже упоминание того, что в возрасте 4-5 лет он смог скорректировать ошибку в неверных подсчетах отца, просто наблюдая за ним. Одно из первых его открытий было сделано в возрасте 6 лет на уроке математики. Учителю было необходимо увлечь детей на продолжительное время и он предложил следующую задачу: *Найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.*

Юный Гаусс справился с этим заданием достаточно быстро, найдя интересную закономерность, которая получила большое распространение и применяется по сей день при устном счете. Найдите эту закономерность и решите задачу Гаусса, не применяя формулы арифметической прогрессии.

2. Имеется 9 гирь весом 1г, 2г, 3г, 4г, 5г, 6г, 7г, 8г, 9г. Можно ли разложить эти гири на три кучки с равным весом?

3. Можно ли разделить циферблат часов прямой линией на две части так, чтобы суммы чисел в каждой части были равны?

4. Можно ли провести на циферблате часов две прямые линией так, чтобы в каждой части сумма чисел была одинаковой?

5. Летит стая птиц. Впереди одна птица (вожак), за ней две, потом три, четыре и т. д. Сколько птиц в стае, если в последнем ряду их 20?

6. Как рассадить 45 кроликов в 9 клеток так, чтобы во всех клетках было разное количество кроликов?

7. Вычислить сумму, используя прием Гаусса:

- 31 + 32 + 33 + … + 40;
- 5 + 10 + 15 + 20 + … + 100;
- 91 + 81 + … + 21 + 11 + 1;
- 1 + 2 + 3 + 4 + … + 18 + 19 + 20;
- 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6;
- 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14;

- 4 + 6 + 8 + 10 + 12;
- 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11.

8. Имеется набор из 12 гирек массой 1г, 2г, 3г, 4г, 5г, 6г, 7г, 8г, 9г, 10г, 11г, 12г. Из набора убрали 4 гирьки, общая масса которых равна трети общей массы всего набора гирек. Можно ли оставшиеся гирьки расположить на двух чашках весов по 4 штуки на каждой чашке так, чтобы они оказались в равновесии?

Теорема Гаусса-Ванцеля

Правильный n -угольник можно построить с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда n есть произведение степени двойки и различных простых чисел Ферма: $n = 2^k p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$, где $p_i = 2^{2^k} + 1, \quad k \epsilon N_0$

9. Выяснить возможность построения правильных n-угольников. Построить правильный пятнадцатиугольник.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВНЕАУДИТОРНОЙ РАБОТЕ

Методические указания к подготовке доклада на семинарское занятие

Своеобразной формой небольшого научного исследования является доклад на семинарах. В ходе подготовки доклада у студента вырабатываются навыки самостоятельного творческого мышления, умение анализировать и систематизировать информацию, сопоставлять полученные результаты поставленным целям работы. Кроме того, опыт публичных выступлений позволяет студенту сформировать ряд коммуникативных качеств, таких как умение четко и доступно излагать свои мысли, аргументировать свою точку зрения, делать выводы, вести дискуссию, наличие яркой и образной речи, и других, без которых невозможно активное и успешное продвижение по карьерной лестнице молодого специалиста.

Подготовка доклада требует углубленного изучения сообщаемой темы, обращения к специальной литературе, справочному аппарату. В связи с этим работа над докладом предполагает прохождение следующих этапов:

1. *Выбор темы доклада.* В ходе практических занятий выбор происходит в зависимости от предложенных преподавателем вопросов, имеющихся в методическом пособии тем или от собственных интересов студента.

2. *Постановка цели доклада.* Формулирование цели работы необходимо для определения направления поиска необходимой литературы и разработки структуры доклада. Строго говоря, цель – это мысленное предвосхищение желаемого результата деятельности. Поэтому постановка цели должна максимально совпадать с названием темы доклада. В устном выступлении сообщение цели обязательно должно начинаться со слов: «В своем докладе я хочу рассказать о...», «Целью моей работы было…».

3. *Подбор необходимой литературы по теме.* Работа с литературой состоит из системного подбора книг и последующего изучения содержащихся в них материалов, в результате чего может быть скорректирована формулировка целей работы. Желательно использовать для подготовки доклада не менее трех наименований источников, что должно продемонстрировать умение студента сопоставлять и анализировать литературу.

4. *Определение структуры доклада.* Этот пункт завершает подготовительную работу для написания текста доклада и должен содержать все, что можно предвидеть. Структура представляет собой краткий тезисный конспект того, что выносится в сообщение. Обязательными компонентами являются собственные выводы и список использованной литературы.

5. *Работа над текстом доклада.* Прежде всего, необходимо помнить, что время доклада ограничено. Поэтому следует отбирать только наиболее важный материал. Как правило, это развернутый тезис из конспекта-структуры и его доказательство или примеры. При этом необходимо избежать «разорванности» текста, одно должно плавно вытекать из другого, соответствовать логической линии доклада. Это особенно важно при работе с несколькими источниками. Следует выяснить значение всех новых понятий, встречающихся в докладе, и уметь их объяснить. В конце доклада необходимо четко сформулировать выводы,

которые соответствуют поставленным задачам и обобщают изложенный материал. В письменном виде объем доклада составляет 7-10 стр.

При подготовке к выступлению важно помнить следующее:

- Не делайте сообщение очень громоздким.
- При оформлении доклада используйте только необходимые, относящиеся к теме рисунки и схемы, подготовьте компьютерную презентацию.
- В конце сообщения (доклада) составьте список литературы, которой вы пользовались при подготовке.
- Прочитайте написанный текст заранее и постарайтесь его пересказать, выбирая самое основное.
- Говорите громко, отчётливо и не торопитесь. В особо важных местах делайте паузу или меняйте интонацию – это облегчит её восприятие для слушателей.
- Искусство устного выступления состоит не только в отличном знании предмета речи, но и в умении преподнести свои мысли и убеждения правильно и упорядоченно, красноречиво и увлекательно.
- Любое устное выступление должно удовлетворять трем основным критериям, которые в конечном итоге и приводят к успеху: это критерий правильности, т.е. соответствия языковым нормам, критерий смысловой адекватности, т.е. соответствия содержания выступления реальности, и критерий эффективности, т.е. соответствия достигнутых результатов поставленной цели.

В докладе желательно отразить варианты использования представленного материала в процессе обучения математике в школе.

Оценивание результатов выступления с докладом представлено в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание результатов выступления с докладом по дисциплине “История математики”

Критерии оценивания	**Баллы**
Соблюдение временного регламента выступления с докладом	2
Качество выступления (владение понятийно-терминологическим аппаратом, точность формулировок, ясность и последовательность изложения, качество презентации)	2
Качество доклада (полнота и содержательность раскрытия вопроса,	2

доказательность и аргументированность, иллюстрация применения рассматриваемого исторического материала в учебном процессе)	
Качество ответов на вопросы (владение содержанием, стилистически и математически грамотная речь, лаконичность и точность языка, умение аргументировать свою позицию)	2
Качество участия в дискуссии (умение логично и корректно вести научную полемику, умение излагать свои мысли в устном и спонтанном общении, профессиональная и общекультурная подготовка, эрудиция выпускника)	2
ИТОГО	10

Методические указания к написанию реферата

Одним из видов внеаудиторной самостоятельной работы студентов по дисциплине “История математики” является написание реферата. Использование реферата в качестве промежуточного или итогового отчета студента о самостоятельном изучении какой-либо темы учебного курса предполагает, прежде всего, установление целей и задач данной работы, а также его функциональной нагрузки в процессе обучения.

Реферат – это композиционно-организованное, обобщенное изложение содержания источника информации. Тема реферата может быть предложена преподавателем или выбрана студентом из рабочей программы соответствующей дисциплины. Возможно, после консультации с преподавателем, обоснование и формулирование собственной темы.

Тема реферата должна отражать проблему, которая достаточно хорошо исследована в науке. Как правило, внутри такой проблемы выбирается для анализа какой- либо единичный аспект.

Целью реферата является изложение какого-либо вопроса на основе обобщения, анализа и синтеза одного или нескольких первоисточников. Другими словами, реферат отвечает на вопрос «какая информация содержится в первоисточнике, что излагается в нем?».

Принимая во внимание, что реферат – одна из форм интерпретации исходного текста одного или нескольких первоисточников, следует сформулировать задачу, стоящую перед студентами: создать новый текст на основе имеющихся текстов, т.е. текст о тексте. Новизна в данном случае подразумевает собственную систематизацию материала при сопоставлении различных точек зрения авторов и изложении наиболее существенных положений и выводов реферируемых источников.

Требования к рефератам

Прежде всего следует помнить, что реферат не должен отражать субъективных взглядов референта (студента) на излагаемый вопрос, а также давать оценку тексту.

Основными требованиями к реферату считаются:

- информативность и полнота изложения основных идей первоисточника;
- точность изложения взглядов автора - неискаженное фиксирование всех положений первичного текста;
- объективность - реферат должен раскрывать концепции первоисточников с точки зрения их авторов;
- изложение всего существенного - «чтобы уметь схватить новое и существенное в сочинениях» (М.В. Ломоносов);
- изложение в логической последовательности в соответствии с обозначенной темой и составленным планом;
- соблюдение единого стиля - использование литературного языка в его научно- стилевой разновидности;
- корректность в характеристике авторского изложения материала.

Виды рефератов

По характеру воспроизведения информации различают рефераты репродуктивные и продуктивные.

Репродуктивные рефераты воспроизводят содержание первичного текста:

- реферат-конспект содержит в обобщенном виде фактографическую информацию, иллюстративный материал, сведения о методах исследования, о полученных результатах и возможностях их применения;

- реферат-резюме приводит только основные положения, тесно связанные с темой текста.

Продуктивные рефераты предполагают критическое или творческое осмысление литературы:

- реферат-обзор охватывает несколько первичных текстов, дает сопоставление разных точек зрения по конкретному вопросу;
- реферат-доклад дает анализ информации, приведенной в первоисточниках, и объективную оценку состояния проблемы.

По количеству реферируемых источников:

- монографические – один первоисточник;
- обзорные – несколько первичных текстов одной тематики.

По читательскому назначению:

- общие – характеристика содержания в целом; ориентация на широкую аудиторию;
- специализированные - ориентация на специалистов.

Этапы работы над рефератом

1. Выбор темы.
2. Изучение основных источников по теме.
3. Составление библиографии.
4. Конспектирование необходимого материала или составление тезисов.
5. Систематизация зафиксированной и отобранной информации.
6. Определение основных понятий темы и анализируемых проблем.
7. Разработка логики исследования проблемы, составление плана.
8. Реализация плана, написание реферата.
9. Самоанализ, предполагающий оценку новизны, степени раскрытия сущности проблемы, обоснованности выбора источников и оценку объема реферата.
10. Проверка оформления списка литературы.
11. Редакторская правка текста.
12. Оформление реферата и проверка текста с точки зрения грамотности и стилистики.

Структура реферата

В структуре реферата выделяются три основных компонента: библиографическое описание, собственно реферативный текст, справочный аппарат.

Библиографическое описание предполагает характеристику имеющихся на эту тему работ, теорий; историографию вопроса; выделение конкретного вопроса (предмета исследования); обоснование использования избранных первоисточников.

Собственно реферативный текст:

Введение – обоснование актуальности темы, проблемы; предмет, цели и задачи реферируемой работы, предварительное формулирование выводов.

Основная часть – содержание, представляющее собой осмысление текста, аналитико-синтетическое преобразование информации, соответствующей теме реферата. Основную часть рекомендуется разделить на два-три вопроса. В зависимости от сложности и многогранности темы, вопросы можно разделить на параграфы. Чрезмерное дробление вопросов или, наоборот, их отсутствие приводят к поверхностному изложению материала. Каждый вопрос должен заканчиваться промежуточным выводом и указывать на связь с последующим вопросом.

Заключение – обобщение выводов автора, область применения результатов работы.

Справочный аппарат:

Список литературы – список использованных автором реферата работ (может состоят из одного и более изданий).

Приложения (необязательная часть) – таблицы, схемы, графики, фотографии и т.д.

Оформление реферата.

Правила оформления реферата регламентированы. Объем – не более 10-15 стр. машинописного текста, напечатанного в формате Word 7,0, 8,0; размер шрифта – 14; интервал – 1,5, формат бумаги А4, сноски – постраничные, сплошные; поле (верхнее, нижнее, левое, правое) – 2 мм; выравнивание – по ширине; ориентация книжная; шрифт Times New Roman Cyr.

Работа должна иметь поля; каждый раздел оформляется с новой страницы. Титульный лист оформляется в соответствии с установленной формой.

На первой странице печатается план реферата, включающий в себя библиографическое описание; введение, разделы и параграфы основной части, раскрывающие суть работы, заключение; список литературы; приложения.

В конце реферата представляется список использованной литературы с точным указанием авторов, названия, места и года ее издания.

Критерии и показатели оценивания реферата

Таблица 2. Критерии и показатели, используемые при оценивании учебного реферата по дисциплине “История математики”

Критерии	**Показатели**
Степень раскрытия сущности проблемы Макс. - 10 баллов	– соответствие плана теме реферата; – соответствие содержания теме и плану реферата; – полнота и глубина раскрытия основных понятий проблемы; – обоснованность способов и методов работы с материалом; – умение работать с литературой, систематизировать и структурировать материал; – умение обобщать, сопоставлять различные точки зрения по рассматриваемому вопросу, аргументировать основные положения и выводы.
Обоснованность выбора источников Макс. - 5 баллов	– круг, полнота использования литературных источников по проблеме; – привлечение новейших работ по проблеме (журнальные публикации, материалы сборников научных трудов и т.д.).
Соблюдение требований к оформлению. Макс. - 5 баллов	– правильное оформление ссылок на используемую литературу; – грамотность и культура изложения; – владение терминологией и понятийным аппаратом проблемы; – соблюдение требований к объему реферата; – культура оформления: выделение абзацев.
Грамотность Макс. - 5 баллов	– отсутствие орфографических и синтаксических ошибок, стилистических погрешностей;

	– отсутствие опечаток, сокращений слов, кроме общепринятых; – литературный стиль.

Защита реферата

Рефераты обычно представляются на заключительном этапе изучения дисциплины как результат итоговой самостоятельной работы студента. Защита реферата осуществляется или на аудиторных занятиях, предусмотренных учебным планом, или на зачете как один из вопросов билета (последнее определяется преподавателем).

Если реферат подразумевает публичную защиту, то выступающему следует заранее подготовиться к реферативному сообщению, а преподавателю и возможным оппонентам - ознакомиться с работой.

Реферативное сообщение отличается от самого реферата прежде всего объемом и стилем изложения, т.к. учитываются особенности устной научной речи и публичного выступления в целом. В реферативном сообщении содержание реферата представляется подробно (или кратко) и, как правило, вне оценки, т.е. изложение приобретает обзорный характер и решает коммуникативную задачу (передать в устной форме информацию, которая должна быть воспринята слушателями). Учитывая публичный характер высказываний, выступающий должен:

- составить план и тезисы выступления;

- кратко представить проблематику, цель, структуру и т.п.;

- обеспечить порционную подачу материала не в соответствии с частями, разделами и параграфами, а сегментировать в зависимости от новизны информации;

- соблюдать четкость и точность выражений, их произнесение; обращать внимание на интонацию, темп, громкость и т.п. особенности публичного выступления;

- демонстрировать подготовленный характер высказываний, допуская, как в любой другой устной речи, словесную импровизацию.

Темы рефератов по дисциплине “История математики”

1. Старинные системы записи чисел.
2. Геометрия Древнего Египта.
3. Математика Древнего Китая.
4. Математические задачи Древнего Вавилона.
5. Математика и нумерация народов Майя.
6. Математика ацтеков и инков.
7. Алфавитная система счисления у древних греков.
8. Милетская школа.
9. Пифагорейская школа.
10. Апории Зенона.
11. Демокрит и его математическая деятельность.
12. Гиппий Элидский и его математическая деятельность.
13. Луночки Гиппократа Хиосского.
14. Математические труды Архита Тарентского.
15. Платон его математическая деятельность.
16. Метод исчерпывания по Евдоксу.
17. Аристотель и его математическое наследие.
18. Математическое наследие Евклида.
19. Математические труды Архимеда.
20. Математические труды Гипатии.
21. Математические труды Эратосфена.
22. Аполлоний Пергский его математическая деятельность.
23. Математика в эпоху эллинизма.
24. Клавдий Птолемей его математическая деятельность.
25. Математические труды Герона.
26. Диофант. Арифметика Диофанта.
27. Папп Александрийский его математическая деятельность.
28. Математика в средневековой Индии.
29. Вклад арабских математиков в решение квадратных уравнений.
30. Математические труды аль-Хорезми.
31. Омар Хайям – поэт, философ, математик.
32. “Ренессанс XII века” и математика.
33. Математика средневековой Руси.
34. Эпоха Возрождения: рождение буквенной символики.
35. Живопись и геометрия в эпоху Возрождения.
36. XVI век: история открытия формул корней алгебраических уравнений третьей и четвертой степени.
37. История изобретения логарифмов.
38. Задача квадратуры (вычисление площадей).
39. Задачи и проблемы геометрии: построения с помощью циркуля и линейки.
40. Великие математики Бернулли.
41. Возникновение аналитической геометрии.
42. Создание дифференциального и интегрального исчисления.
43. История развития анализа бесконечно малых.
44. История “Великой теоремы Ферма”.
45. Кавальери и его метод неделимости. Арифметика Кавальери.
46. Джон Валлис его математическая деятельность.
47. Математические труды Карла Вейерштрасса.
48. Математические труды Вильяма Гамильтона.
49. Математические труды Давида Гильберта.
50. Рихард Дедекинд его математическая деятельность.

51. Даламбер его математическая деятельность.
52. Математические труды Геделя.
53. История развития вариационного исчисления.
54. История развития дифференциальной геометрии.
55. История развития начертательной и проективной геометрии.
56. Основания геометрии: история открытий.
57. Математическое наследие Леонардо Эйлера.
58. Математические открытия Гаусса.
59. Математические открытия Абеля.
60. Математические открытия Эвереста Галуа.
61. Развитие теории вероятностей и комбинаторного метода.
62. Математическая деятельность Огюстена – Луи Коши.
63. Создание теории функций комплексного переменного.
64. Начала топологии.
65. История основной теоремы алгебры.
66. Норберт Винер и история развития кибернетики.
67. История открытия “неевклидовой” геометрии.

ОЦЕНИВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ “ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ” В БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ

Вид деятельности студента	**Баллы**	
	min	**max**
Посещение лекции	1	1
Посещение семинарского занятия	1	1
Выступление с докладом на семинаре	5	10
Решение математических задач в группе	3	5
Публичная демонстрация решения математической задачи (ответ у доски)	3	5
Написание и защита реферата	13	25
Итоговое тестирование (зачет)	11	20

Итоговый балл получается простым сложениям набранных баллов по формам контроля, а также складываются баллы за посещение занятий: лекций - 1 балл, практических занятий 1 балл.

Для положительной оценки (зачтено) необходимо набрать более 50% от максимальной суммы баллов, а также преодолеть пороговые значения по всем видам контроля.

Итоговая проверка знаний студентов, не набравших в течение семестра необходимых баллов для положительной оценки, осуществляется в письменной (итоговый тест) и устной форме (вопросы к зачету по дисциплине). Перечень вопросов, образец тестовых заданий содержится в рабочей программе и сообщается обучающимся заранее. Тесты раздаются непосредственно во время зачета и включают материал по всем темам курса, указанным в тематическом плане. Для получения оценки «зачтено» необходимо правильно выполнить более 50%, менее 50% правильных заданий – оценка «не зачтено».

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Николаева, Е.А. История математики от древнейших времен до XVIII века [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е.А. Николаева. - Электронные текстовые данные. - Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2012. - 112 с. - Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=232389

2. Полякова Т., С. История математики: Европа XVII - начало XVIII вв.: краткий очерк [Электронный ресурс]: учебное пособие / С. ПоляковаТ. ; Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет», Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Министерство образования и науки Российской Федерации. - Электронные текстовые данные. - Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2015. - 126 с. : ил. - Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=445263

3. Бронникова, Л. М. История математики [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л. М. Бронникова ; Алтайский гос. пед. ун-т. - Электронные текстовые данные. - Барнаул : АлтГПУ, 2016. - 120 с. - Библиогр.: с. 98. - Режим доступа: https://icdlib.nspu.ru/view/icdlib/4882/read.php

4. Просветов, Г. И. История математики [Текст] : учебно-практическое пособие / Г. И. Просветов. - Москва : Альфа-Пресс, 2011. - 95, [1] с. - Библиогр.: с. 94. - ISBN 978-5-94280-517-3 Количество: 10

5. Мамонтова, Т. С. История развития математики [Электронный ресурс] : учебное пособие / Т. С. Мамонтова ; Ишимский гос. пед. ин-т. – Эл. текстовые

данные. - Ишим : Ишим. гос. пед. ин-т, 2011. - 124 с. : ил. - Режим доступа: https://icdlib.nspu.ru/view/icdlib/3893/read.php

Дополнительная литература

1. Кольман Э. История математики в древности / Э. Кольман, А. П. Юшкевич. - Электронные текстовые данные. - Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. - 231 с. - Режим доступа: http://www.e-reading.mobi/djvureader.php/137833/5/Kol%27man_-_Istoriya_matematiki_v_drevnosti.html
2. Колмогоров, А.Н. Математика в ее историческом развитии / А.Н. Колмогоров. – Электронные текстовые данные. – Москва : Наука, 1991. – 223 с. – Режим доступа: http://bookre.org/reader?file=790876&pg=223
3. Бобынин, В.В. Математика древних египтян [Текст] : по папирусу Ринда / В. В. Бобынин. - 2-е изд. - Москва : URSS, 2011. – 198 с.
4. Рыбников, К.А. История математики / К.А. Рыбников. – Москва : Издательство Московского университета, 1963. – 334 с.
5. Глейзер, Г.И. История математики в школе. IV – VI класс / Г.И. Глейзер. – Москва: Просвещение, 1981. – 239 с.
6. Чистяков В.Д. Три знаменитые задачи древности / В.Д. Чистяков. – Москва : Просвещение, 1963. – 100 с. – Режим доступа: http://bookre.org/reader?file=652589&pg=4
7. Прасолов В.В. Три классические задачи на построение / В.В. Прасолов. – Москва : Наука, 1992. – 81 с. – Режим доступа: http://bookre.org/reader?file=729515&pg=3