Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Позднякова

ГЕОМЕТРИЯ

Элементы векторной алгебры. Системы координат на плоскости и в пространстве

Методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе (в форме индивидуальных заданий)
для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика»

Новокузнецк

2019

УДК 514.742(072)
ББК 22.151.5я73
П 47

Позднякова Е.В.

П 47 Геометрия. Элементы векторной алгебры. Системы координат на плоскости и в пространстве: методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе (в форме индивидуальных заданий) для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика») / Е.В. Позднякова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2019 – 58 с.

В работе изложены методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе студентов по темам «Элементы векторной алгебры», «Системы координат на плоскости и в пространстве»: основные теоретические факты по данным темам, примеры решения геометрических задач векторным и координатным методами, варианты индивидуальной самостоятельной работы и методические рекомендации по ее решению и оформлению, оценивание работы в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика»

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 9 от 05.04.2019

Заведующий каф. МФММ
__________ / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 8 от 11.04.2019

Председатель методической комиссии ФИМЭ
__________________/ Г.Н. Бойченко

УДК 514.742(072)
ББК 22.151.5я73
П 47

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика») и направлено на оказание помощи студентам в выполнении внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий) по темам «Элементы векторной алгебры», «Системы координат на плоскости и в пространстве» дисциплины «Геометрия».

Одним из фундаментальных понятий современной математики является понятие вектора, которое возникло как математическая абстракция объектов, характеризующихся величиной и направлением. Впервые это понятие нашло применение в механике: векторными величинами являются скорость, ускорение, сила, момент силы и т.д. Высокая степень наглядности и простота геометрических операций над векторами привели к тому, что понятие вектора нашло всеобщее признание и применение в кинематике, статике, динамике точки и динамике системы, а также в теории потенциала и в гидродинамике.

На векторной основе излагаются многие разделы математики: от элементарных (комплексные числа) до более сложных (линейная алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрия, линейное программирование, функциональный анализ), которые, в свою очередь, проникают в такие области науки и техники, как биология, экономика и др.

В настоящее время понятие вектора стало одним из основных понятий, изучаемых в школьном курсе математики.

Раздел математики, в котором изучаются свойства операций над векторами, называется *векторным исчислением*; раздел векторного исчисления, в котором изучаются простейшие операции над векторами, называется *векторной алгеброй*.

Векторный метод решения задач и доказательства теорем (как частный случай математического моделирования) в качестве формальной математической модели содержит векторные соотношения и выглядит следующим образом:

1) перевод содержания теоремы (задачи) на язык векторов: введение в нее векторов, связанных с рассматриваемыми геометрическими фигурами; выбор системы координат (если это необходимо) и базисных векторов; разложение всех введенных векторов по базисным;

2) составление системы векторных равенств (равенства) или уравнений (уравнения);

3) преобразование векторных равенств (решение уравнений);

4) замена векторных равенств (уравнений) алгебраическими уравнениями и их решение;

5) обратный перевод полученных результатов на геометрический язык

Метод координат - это универсальный метод решения задач, который обеспечивает тесную связь между алгеброй и геометрией. В отношении школьного курса геометрии можно сказать, что в некоторых случаях метод координат дает возможность строить доказательства и решать многие задачи более рационально, красиво, чем чисто геометрическими способами.

Сущность метода координат как метода решения задач состоит в том, что:

- задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, можно решать геометрическую задачу средствами алгебры;
- обратно, пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и, таким образом, применять геометрию к решению алгебраических задач.

Чтобы решать задачи как алгебраические, так и геометрические методом координат, необходимо выполнение 3 этапов:

1) перевод задачи на координатный (аналитический) язык;

2) преобразование аналитического выражения;

3) обратный перевод, т. е. перевод с координатного языка на язык, в терминах которого сформулирована задача.

Основные задачи изучения тем “Элементы векторной алгебры” и “Системы координат на плоскости и в пространстве” в вузовском курсе геометрии следующие:

1) сформировать понимание значимости данных тем в будущей профессиональной деятельности учителя математики;
2) ознакомить с основными понятиями и методами векторной алгебры;
3) сформировать представление о применении векторного метода и метода координат для решения задач элементарной геометрии, физики, а также задач прикладного характера.

В методические рекомендации включено:

1) справочный материал (основные понятия, свойства, теоремы, формулы);
2) примеры решения геометрических задач с применением методов векторной алгебры и метода координат;
3) варианты внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий);
4) требования к выполнению и оформлению самостоятельной работы;
5) список рекомендуемой литературы.

Теоретические сведения об основных фактах векторной алгебры и о методе координат представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям, выполнения домашних, индивидуальных и контрольных заданий.

Применение методов векторной алгебры и метода координат иллюстрируется задачами разного уровня сложности. Решения задач подробны, снабжены достаточными пояснениями и чертежами.

В настоящее время в системе высшего образования пристальное внимание уделяется организации самостоятельной работы студентов. В пособии сделан акцент на внеаудиторную индивидуальную самостоятельную работу обучающихся. Такая деятельность предполагает выполнение индивидуальных заданий разного уровня сложности, а именно: доказательство свойств или утверждений, рассмотренных на лекциях без доказательства, решение разноуровневых задач, выполнение задания исследовательского характера. В пособии представлены требования к выполнению таких заданий, определена система оценивания последних.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает классические и современные источники; указана литература основная и дополнительная.

Таким образом, данные методические материалы позволяют получить студенту целостное представление о содержании тем “Элементы векторной алгебры”, “Метод координат на плоскости и в пространстве” и логике их развертывания, эффективно подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам, успешно выполнить индивидуальную самостоятельную работу. Кроме того, пособие может оказаться полезным при написании курсовых и выпускных квалификационных работ, а также при прохождении производственной (педагогической) практики в старших классах.

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ (ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВОЙСТВА, ТЕОРЕМЫ, ФОРМУЛЫ)

Понятие вектора

Пусть дан отрезок *AB*. Если считать точку *A* началом, а точку *B* – концом, то отрезок *AB* называется *направленным* и обозначается $\overline{AB}$.

Иначе направленный отрезок называется *вектором* и обозначается $\overrightarrow{AB}$. Длина отрезка *AB* называется длиной или *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$, обозначается как $|\overrightarrow{AB}|$.

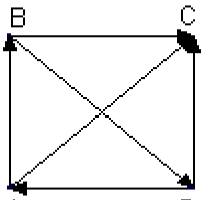


Рис. 1

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ считаются *равными*, если они имеют одно направление и их длины равны. Если векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ имеют противоположные направления, а их длины равны, то они называются *противоположными*. На рис.1 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$.

Если отрезки *MN* и *PQ* параллельны или лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ называются *коллинеарными*. Обозначаются как $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{PQ}$.

Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют одно и то же направление, то они называются *сонаправленными*. Обозначаются как $\overrightarrow{AB} \downarrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

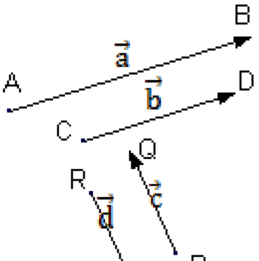


Рис.2

Если векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RK}$ имеют противоположные направления, то они называются *противоположно направленными*. Обозначаются как $\overrightarrow{PQ} \downarrow\uparrow \overrightarrow{RK}$. (рис. 2)

Векторы обозначаются и малыми буквами: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

Если $|\vec{a}|=1$, то вектор называется *единичным*. Если $|\vec{a}|=0$, то вектор $\vec{a}$ называется *нулевым*.

Линейные операции над векторами

Сумма и разность векторов

Пусть даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построим последовательно $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и

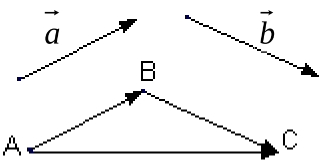


Рис.3

$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. (1) Указанный способ построения суммы векторов называется *правилом треугольника* (рис. 3).

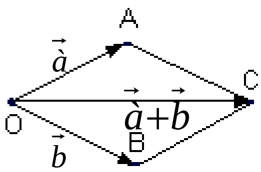


Рис.4

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то их сумму можно построить по *правилу параллелограмма*. Для этого откладываются оба вектора от одной точки, т.е. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Достраиваем фигуру до параллелограмма. $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$ (рис.4).

Свойства суммы векторов

1. $\forall\vec{a} \quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
2. $\forall\vec{a}, \forall\vec{b} \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
3. $\forall\vec{a}, \forall\vec{b}, \forall\vec{c} \quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.
4. $\forall\vec{a} \quad \exists\,\vec{a}' \mid \vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$.

Вектор $\vec{a}'$ называется *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначается: $\vec{a}'=-\vec{a}$.

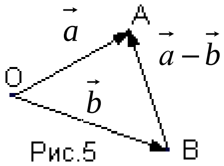


Рис.5

Разностью векторов $\vec a$ и $\vec b$ называется вектор $\vec c$, такой что $\vec a=\vec b+\vec c$. (рис.5). Обозначается $\vec c=\vec a-\vec b$. Отложим векторы $\vec a$ и $\vec b$ от точки O; $\overrightarrow{OA}=\vec a$, $\overrightarrow{OB}=\vec b$. Тогда вектор $\overrightarrow{BA}=\vec a-\vec b$.

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$. (2)

Имеет место равенство $\vec a-\vec b=\vec a+(-\vec b)$. (3)

Умножение вектора на число

Вектор $\vec p$ называется *произведением* вектора $\vec a$ на ненулевое действительное число t ($\vec p=t\cdot\vec a$), если выполняются два условия:

1) $|\vec p|=|t|\cdot|\vec a|$;

2) $\vec p\downarrow\downarrow\vec a$, если t>0 и $\vec p\downarrow\uparrow\vec a$, если t<0.

Если $\vec a=\vec 0$ или t=0, то $\vec a\cdot t=\vec 0$.

Свойства умножения вектора на число

1. $\forall\vec a \quad \vec a\cdot 1=\vec a$.
2. $\forall\vec a,\ \forall\alpha,\ \beta \quad \alpha(\beta\vec a)=(\alpha\beta)\vec a$.
3. $\forall\alpha,\ \forall\vec a,\ \forall\vec b \quad \alpha(\vec a+\vec b)=\alpha\vec a+\alpha\vec b$.
4. $\forall\alpha,\ \beta\ \ \forall\vec a \quad (\alpha+\beta)\vec a=\alpha\vec a+\beta\vec a$.

Координаты вектора

Теорема 1. Два ненулевых вектора $\vec a$ и $\vec b$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует ненулевое действительное число *t*, такое что имеет место равенство $\vec a=t\cdot\vec b$. (4)

Векторы называются *компланарными*, если они принадлежат одной плоскости или существует плоскость, которой они параллельны.

Теорема 2. Три ненулевых и неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны

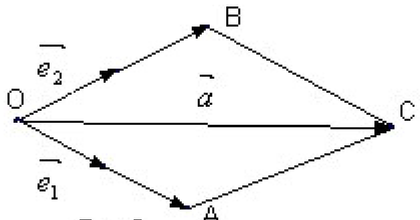


Рис.6

тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\vec{c} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}$. Говорят, что вектор $\vec{c}$ *разложен* по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Упорядоченная пара двух неколлинеарных векторов $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ называется *базисом* множества компланарных векторов (рис.6).

Теорема 3. Любой вектор множества компланарных векторов единственным образом разлагается по базису.

Имеет место равенство $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ (5). Иначе $\vec{a} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$. Упорядоченная пара чисел x и y в равенстве (5) называется *координатами* вектора в базисе $\{\vec{e_1}; \vec{e_2}\}$. Обозначается: $\vec{a}\,\{x;\, y\}$.

Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *упорядоченной тройкой,* если указано, какой из векторов первый, какой – второй, какой – третий.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ называется *базисом* трехмерного векторного пространства.

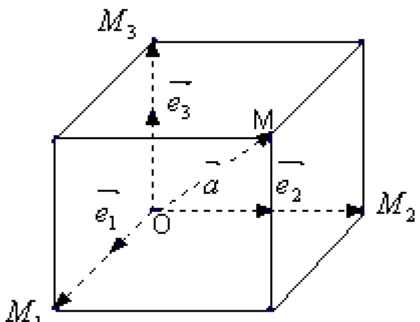


Рис.7

Теорема 4. Любой вектор трехмерного пространства единственным образом разлагается по данному базису.

$\vec{a} = \overline{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$ (6) (рис.7).

Коэффициенты разложения вектора по базису (6) называются *координатами* вектора в этом базисе. Обозначается: $\vec{a}\,\{x; y; z\}$.

Если $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = |\vec{e_3}| = 1$ и $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$, $\vec{e_1} \perp \vec{e_3}$, $\vec{e_2} \perp \vec{e_3}$, то базис называется *ортонормированным* и обозначают: $\vec{e_1} = \vec{i}$, $\vec{e_2} = \vec{j}$, $\vec{e_3} = \vec{k}$.

В дальнейшем, если не будет оговорено, будем подразумевать ортонормированный базис.

Пусть в одном и том же базисе даны векторы своими координатами: $\vec{a}\ \{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b}\ \{b_1; b_2; b_3\}$. Тогда имеют место теоремы:

Теорема 5. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1;\ a_2 = b_2;\ a_3 = b_3$.

Теорема 6. $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3\}$.

Теорема 7. $t \cdot \vec{a} = \{t \cdot a_1; t \cdot a_2; t \cdot a_3\}$.

Теорема 8. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

Проекция вектора на ось

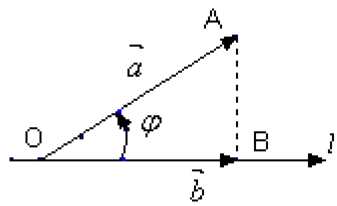
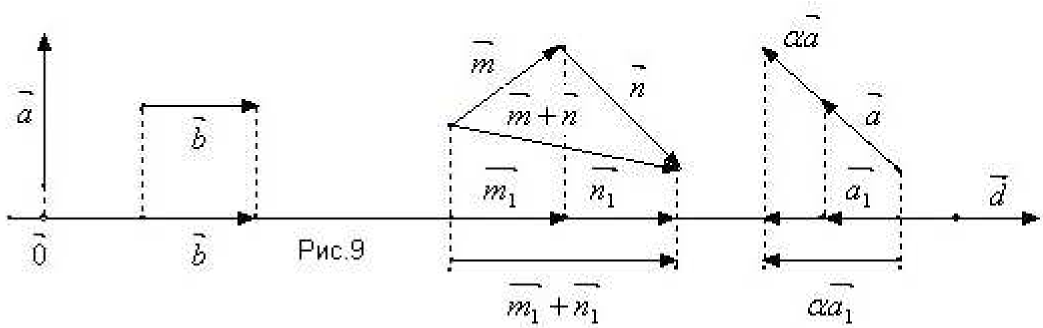


Рис.8

Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется *геометрической проекцией* вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ на ось l с вектором $\vec{b}$ (или проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$) (рис. 8).

Число $\pm|\overrightarrow{OB}|$ называется *алгебраический проекцией* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, где знак (+) берется, если $\overrightarrow{OB} \downarrow\downarrow \vec{b}$, (-) – если $\overrightarrow{OB} \downarrow\uparrow \vec{b}$. $\pm|\overrightarrow{OB}| = Пр_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$ (7).

Свойства проекции вектора на ось (рис.9)



1) Если $\vec{a} \perp \vec{d}$, то $Пр_{\vec{d}}\vec{a} = \vec{0}$.

2) Если $\vec{b} \parallel \vec{d}$, то $Пр_{\vec{d}}\vec{b} = \vec{b}$.

3) $Пр_{\vec{d}}(\vec{m} + \vec{n}) = Пр_{\vec{d}}\vec{m} + Пр_{\vec{d}}\vec{n}$.

4) $Пр_{\vec{d}}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha\ Пр_{\vec{d}}\vec{a}$.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением упорядоченной пары двух ненулевых векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$ (8).

Свойства скалярного произведения векторов

1. $(\vec{a}\cdot\vec{a}) = |\vec{a}|^2 \;\Rightarrow\; |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})}$.
2. $\forall\vec{a},\ \forall\vec{b}\quad (\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{a})$.
3. $\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}\quad \vec{a}\perp\vec{b} \;\Leftrightarrow\; (\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0$.
4. $\forall\ \alpha\neq\vec{0}\quad \alpha\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) = ((\alpha\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot(\alpha\cdot\vec{b}))$.
5. $((\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{b}) + (\vec{c}\cdot\vec{b})$.

Пусть векторы $\vec{a}\,\{a_1;a_2;a_3\}$ и $\vec{b}\,\{b_1;b_2;b_3\}$ заданы в ортонормированном базисе $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$.

1) $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (9).

2) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (10).

3) $\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (11).

Механический смысл скалярного произведения

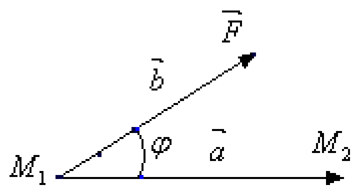


Рис.10

Пусть материальная точка перемещается под действием силы F из точки M_1 в точку M_2 (рис.10), тогда работа по перемещению этой точки равна: $A = |\vec{F}|\cdot|\overline{M_1M_2}|\cdot\cos\varphi \Rightarrow A = (\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{F}\cdot\overline{M_1M_2})$ (12).

Направляющие косинусы вектора

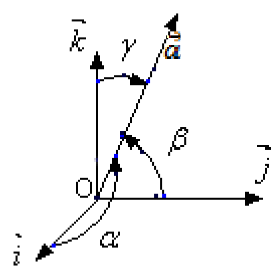


Рис.11

Пусть в ортонормированном базисе $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ дан вектор $\vec{a}\,\{x;y;z\}$ и построен в этом базисе. Обозначим: $\alpha = (\vec{i}\,\hat{}\,\vec{a})$,

$\beta = (\vec{j} \,\hat{}\, \vec{a})$, $\gamma = (\vec{k} \,\hat{}\, \vec{a})$. $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. (рис.11).

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} \quad (13).$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (14).$$

$$\vec{a} = \left\{ |\vec{a}|\cos\alpha; |\vec{a}|\cos\beta; |\vec{a}|\cos\gamma \right\} \quad (15).$$

Если $\vec{a}\,\{x; y\}$, то $\vec{a} = \left\{ |\vec{a}|\cos\alpha; |\vec{a}|\sin\alpha \right\}$ (16).

Векторное произведение векторов

Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *правой*, если после приведения векторов к общему началу вектор $\vec{c}$ будет находиться по ту сторону плоскости, образованной векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, откуда кротчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ кажется совершающимся против часовой стрелки (рис.12).

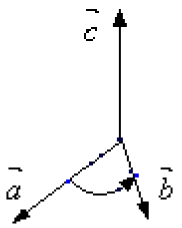


Рис. 12

Векторным произведением упорядоченной пары двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b})$.

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в указанном порядке образуют правую тройку векторов

Векторное произведение обозначается: $\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}]$.

Пусть векторы $\vec{a}\,\{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{b}\,\{b_1; b_2; b_3\}$ даны в ортонормированном базисе.

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (17)$$

$$|[\vec{a} \cdot \vec{b}]| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}) \quad (18).$$

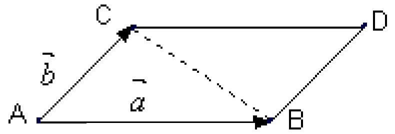


Рис.13

Пусть на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах построен параллелограмм ACDB (рис.13).

S_{ACDB} = $|[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}]|$ = $|[\vec{a} \cdot \vec{b}]|$ (19) – геометрический смысл модуля векторного произведения векторов. $S_{\Delta ABC}$ = $\frac{1}{2}$ $|[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}]|$ = $\frac{1}{2}$ $|[\vec{a} \cdot \vec{b}]|$ (20).

Свойства векторного произведения векторов

1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{0}$.
2. $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = -[\vec{b} \cdot \vec{a}]$.
3. $\alpha[\vec{a} \cdot \vec{b}] = [(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b}] = [\vec{a} \cdot (\alpha\vec{b})]$.   (21)
4. $[(\vec{a}+\vec{c}) \cdot \vec{b}] = [\vec{a} \cdot \vec{b}] + [\vec{c} \cdot \vec{b}]$.

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий вектор.

Обозначается: $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = ([\vec{a} \cdot \vec{b}]\vec{c})$.

Пусть векторы $\vec{a}\,\{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{b}\,\{b_1; b_2; b_3\}$, $\vec{c}\,\{c_1; c_2; c_3\}$ заданы координатами в ортонормированном базисе. $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (22)

Свойства смешанного произведения векторов

1. Если $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) > 0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая; если $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) < 0$, то тройка векторов – левая.
2. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})=0$.
3. $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = -(\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}) = (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a})$.
4. $(\vec{a}\ (\alpha\vec{a})\vec{c}) = 0$.
5. $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = ((\alpha\vec{a})\vec{b}\,\vec{c}) = (\vec{a}\ (\alpha\vec{b})\vec{c}) = (\vec{a}\,\vec{b}(\alpha\vec{c}))$.
6. $((\vec{a}+\vec{d})\vec{b}\,\vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{d} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})$.
7. Четыре точки *A, B, C, D* компланарны (принадлежат одной плоскости) тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) = 0$.

8. $([\vec{a}\cdot\vec{b}]\vec{c}) = (\vec{a}[\vec{b}\cdot\vec{c}])$.

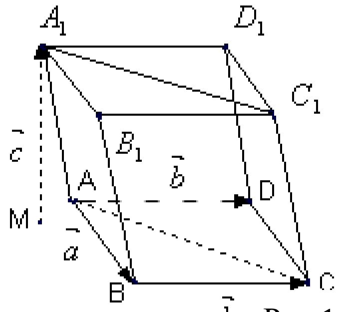


Рис.14

Геометрический смысл модуля смешанного произведения трех векторов

Построим на трех некомпланарных векторах $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ как на сторонах параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.14).

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{осн.} \cdot H = |(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})|$ (24).

Модуль смешанного произведения векторов $|(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})|$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

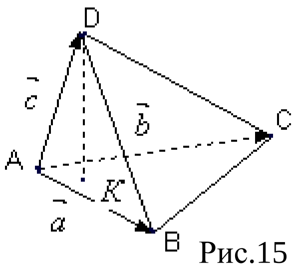


Рис.15

Пусть $\overline{A_1M} \perp (ABCD)$ и $\overline{A_1M} = H$.

$H = \dfrac{V}{S_{осн.}} = \dfrac{|(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})|}{|[\vec{a}\cdot\vec{b}]|}$ (25) $\quad V_{ABCA_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2}|[\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}]|$ (26)

$ABCD$ - тетраэдр (рис.15). $V_{тетр.} = \dfrac{1}{6}|[\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}]|$ (27). Высота

$DK = H = \dfrac{|(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})|}{|[\vec{a}\cdot\vec{b}]|}$.

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Системы координат на плоскости

Аффинная система координат

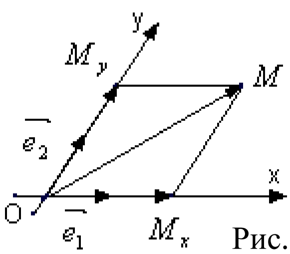
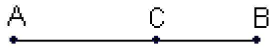


Рис.16

Упорядоченная пара осей Ox и Oy с базисными векторами $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ называется *аффинной системой координат* на плоскости (рис.16). $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{OM}_y$. $\overrightarrow{OM}$ - радиус вектор точки M.

Числа *x* и *y* – координаты точки *M*. Обозначается: $M\ (x;\ y)$. Координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ – это координаты точки *M*.

Пусть $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$. Если точка *C* делит отрезок *AB* в отношении



$\lambda \neq -1$, то $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$ и $c_1 = \dfrac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda}$, $c_2 = \dfrac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda}$ (28). Если $\lambda = 1$, т.е. *C* – середина отрезка *AB*, то $c_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, $c_2 = \dfrac{a_2+b_2}{2}$ (29).

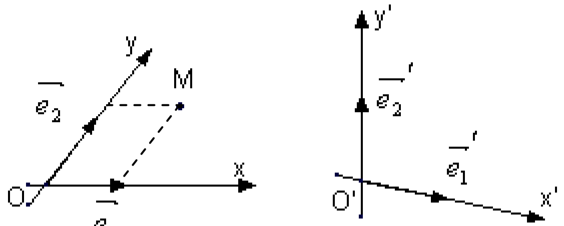


Рис.17

Пусть на плоскости даны две аффинные системы координат: *ХОУ* (старая система) и *Х′О′У′* (новая система) (рис.17). *ХОУ* определяется базисом $\{\vec{e}_1;\vec{e}_2\}$, *Х′О′У′* определяется базисом $\left\{\vec{e}_1^{\,\prime};\vec{e}_2^{\,\prime}\right\}$, причем $O'(a;b)$, $\vec{e}_1^{\,\prime}\ \{a_{11};a_{21}\}$, $\vec{e}_2^{\,\prime}\ \{a_{12};a_{22}\}$ - координаты даны относительно системы *ХОУ*. В старой системе координат точка *M* имеет координаты $(x;y)$, а в новой - $(x';y')$. Формулы преобразования координат точки *M* имеют вид: $\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a, \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + b \end{cases}$ (30).

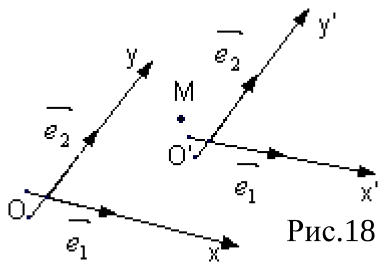


Рис.18

Если система *ХОУ* перенесена параллельно в точке $O'(a;b)$ (рис.18), то формулы такого преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} \quad (31).$$

Прямоугольная система координат

Если в системе координат *ХОУ* базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ ортогональны и по длине равны 1, то аффинная система координат называется *прямоугольной* (декартовой) системой координат. Обычно на чертеже указывают не единичные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (т.е. $\vec{i}$ и $\vec{j}$), а направление осей *ОХ* и *ОУ* и на них единицу масштаба

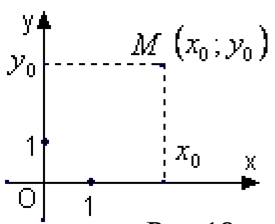


Рис.19

(рис.19). В прямоугольной системе координат решаются те же задачи, что и в аффинной, но добавляется задача о нахождении длины отрезка, а именно: если $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, то

$$|AB| = |\overline{AB}| = AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (32).$$

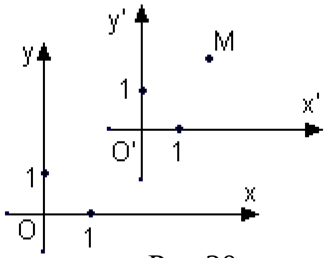


Рис.20

Если прямоугольная система координат перенесена в точку $O'(a;b)$ с сохранение базисных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$, то формулы преобразования координат точки M имеют вид (31), где $(x;\ y)$ – координаты точки в старой системе координат, а $(x';y')$ – координаты этой же точки в новой системе координат. (рис. 20)

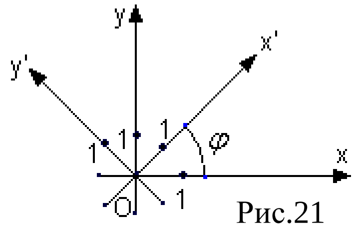


Рис.21

Повернем систему координат XOY вокруг начала координат на угол $\varphi = (OX \hat{\ } OX')$. Получим новую систему координат $X'OY'$ (рис.21). Формулы преобразования координат в этом случае имеют вид: $\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$ (33).

Если систему координат XOY повернуть вокруг начала координат на угол φ, а затем перенести ее в точку O', то получим новую систему координат $X'O'Y'$ (рис.22). Формулы преобразования координат точки имеют вид:

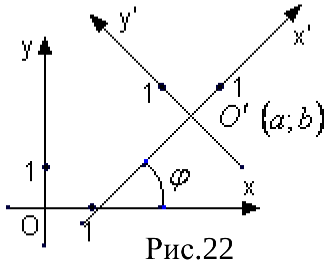


Рис.22

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + a, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + b. \end{cases} \quad (34)$$

Полярная система координат

Зададим на ориентированной плоскости ось p с началом O и вектором $\vec{i}$. Пара, состоящая из точки O и вектора $\vec{i}$ называется *полярной системой координат* и обозначается $(O\vec{i})$. Точка O называется полюсом, а ось p – полярной осью. Обозначим через α угол между p и радиусом-вектором OM (рис.23). $|OM| = \rho$.

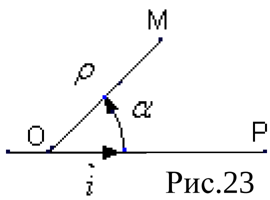


Рис.23

Упорядоченная *пара* $(\rho;\varphi)$ действительных чисел называется *полярными координатами* точки *M*. Обозначается: $M(\rho;\varphi)$. $-\pi \le \varphi \le \pi$ или $0 \le \varphi \le 2\pi$

Если $\rho < 0$, то будем считать, что парой $(\rho;\varphi)$ определяется точка $M'(|\rho|;\varphi+\pi)$.

Если $\varphi > \pi$ или $\varphi \le -\pi$, то $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, где k – целое число, такое, что $-\pi \le \varphi_0 \le \pi$.

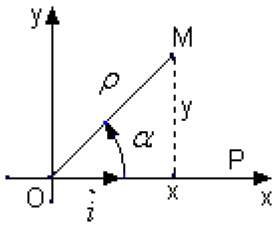


Рис.24

Пусть полярная ось совпадает с осью *OX* и точка *M* в полярной системе координат имеет координаты $(\rho;\varphi)$, а в прямоугольной $(x;y)$ (рис.24).

(35) $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$ - формула перехода от полярной системы координат к декартовой. Из (35) $\Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$ (если $x \ne 0$) (36)

Пусть в полярной системе координат даны две точки $A(\rho_1;\varphi_1)$ и $B(\rho_2;\varphi_2)$ (рис.25).

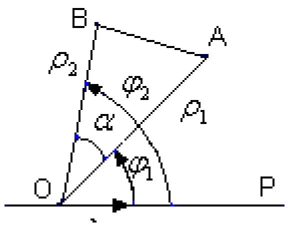


Рис.25

$AB = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$. (37)

$S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$. (38)

Системы координат в пространстве

Упорядоченная совокупность трех осей l_1, l_2, l_3, пересекающихся в точке O, с единичными векторами $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ на них, называется *аффинной системой координат в пространстве* (рис.26). $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$. Координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}\}$ называется координатами точки *M* в аффинной системе координат. Обозначается:

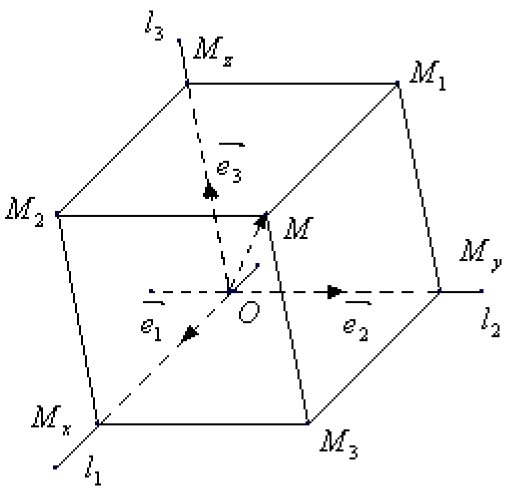


Рис. 26

$M(x;y;z)$.

Точки $M_x(x;0;0)$, $M_y(0;y;0)$, $M_z(0;0;z)$ называется проекциями точки M на оси l_1, l_2, l_3. Обычно обозначают l_1 как OX, l_2 – $OУ$, l_3 – OZ.

OX – ось абсцисс, $OУ$ – ось ординат, OZ – ось аппликат.

Точки $M_1(0;y;z)$, $M_2(x;0;z)$, $M_3(x;y;0)$ называются проекциями точки M на координатной плоскости YOZ, XOZ и XOY соответственно. Направление проекций дают оси OX, $OУ$ и OZ соответственно. Параллелепипед $OM_xM_3M_yM_zM_2MM_1$ называется координатным. Ломаные OM_xM_3M, OM_yM_3M и т.д. называются координатными ломаными. Для построения точки $M(x;y;z)$ достаточно в системе координат $OXYZ$ построить одну из координатных ломаных, например OM_xM_3M, где $OM_x = x\vec{e_1}$, $M_xM_3 = y\vec{e_2}$, $M_3M = z\vec{e_3}$.

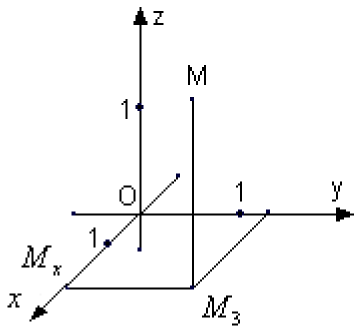


Рис.27

Частным случаем аффинной системой координат является прямоугольная декартовая система координат. Обычно её изображают так, как на рисунке 27 единицы масштаба на осях $OУ$ и OZ откладываются одинаковые, а на оси ОХ – в 2 раза меньше. Угол между осью Ох и Оу должен (на чертеже) равняться 135°.

Если в пространстве будут заданы две системы координат: $OXYZ$ – старая, $X'O'У'Z'$ – новая, причем $O'(a;b;c)$, $\vec{e_1}'\{a_{11};a_{21};a_{31}\}$, $\vec{e_2}'\{a_{12};a_{22};a_{32}\}$, $\vec{e_3}'\{a_{13};a_{23};a_{33}\}$; точка М имеет координаты $(x;y;z)$ в старой системе координат и $(x';y';z')$ в новой системе координат, то формулы преобразования координат точки M имеют вид:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a, \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b, \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + c. \end{cases} \quad (39)$$

В частности, при параллельном переносе системы координат в точку

$O'(a;b;c)$ имеем: $\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \\ z = z' + c. \end{cases}$ (40)

Пусть в прямоугольной системе координат даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. Тогда:

$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, (41)

$|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. (42)

Если точка $C(x; y; z)$ делит отрезок AB в отношении $\lambda \neq -1$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \quad (43)$$

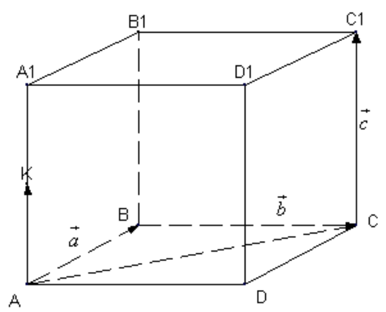
В частности, если C – середина отрезка AB, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (44)$$

Точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ и $C(x_3; y_3; z_3)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\overline{AB} = t\,\overline{AC}$ или $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$.(45)

Четыре точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ и $D(x_4; y_4; z_4)$ компланарны тогда и только тогда, когда $(\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}) = 0$ или $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$. (46)

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНЫМ И КООРДИНАТНЫМ МЕТОДАМИ

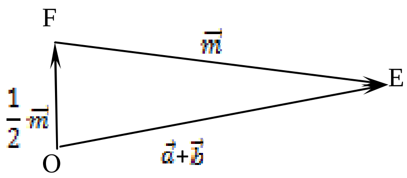


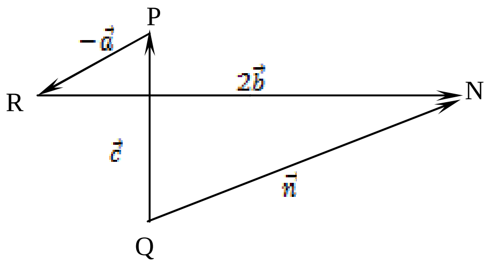
1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{c}$. Построить векторы: 1) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; 2) $\vec{n} = \vec{c} - \vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение

1) По правилу треугольника $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Т.к. $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$, то $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\vec{c}$, где K – середина AA_1. Для наглядности отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{AK}$. Тогда вектор

$$\overrightarrow{FE}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\frac{1}{2}\vec{c}=\vec{m}.$$



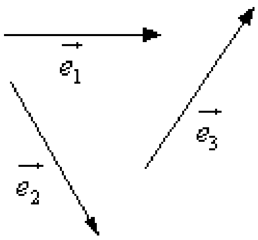


2) От произвольной точки Q отложим сначала вектор $\overrightarrow{QP}=\vec{c}$, затем от точки P вектор $\overrightarrow{PR}=-\vec{a}$, затем от точки R вектор $\overrightarrow{RN}=2\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RN}=\vec{c}-\vec{a}+2\vec{b}=\vec{n}$.

2. В аффинном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ построить векторы $\vec{a}\{-1.5;\, 2;\, 0\}$ и $\vec{b}\{3;\, -1;\, -2\}$

Решение

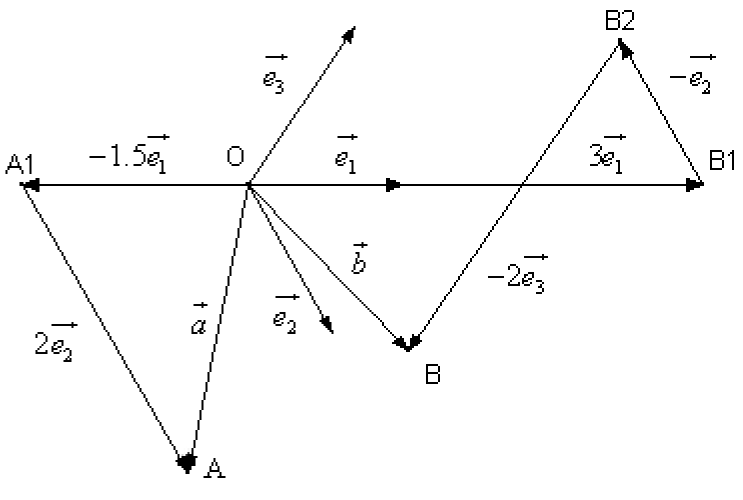
Отложим базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ от одной точки O.



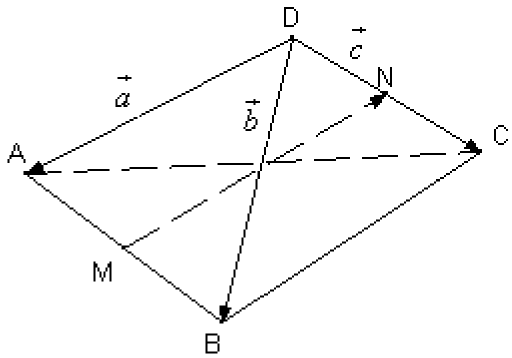
Для построения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ достаточно построить векторы $\overrightarrow{OA}=-1.5\vec{e}_1+2\vec{e}_2+0\vec{e}_3$ и $\overrightarrow{OB}=3\vec{e}_1-1\vec{e}_2-2\vec{e}_3$ (см. пример 1).

1) Строим последовательно $\overrightarrow{OA_1}=-1.5\vec{e}_1$, $\overrightarrow{A_1A}=2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$.

2) Строим аналогично $\overrightarrow{OB_1}=3\vec{e}_1$, $\overrightarrow{B_1B_2}=-\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.



3. В тетраэдре ABCD $\overrightarrow{DA}=\vec{a}, \overrightarrow{DB}=\vec{b}, \overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Точки M и N – середины ребер AB и DC соответственно. Выразить вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.



Решение

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}.$$

Ответ: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

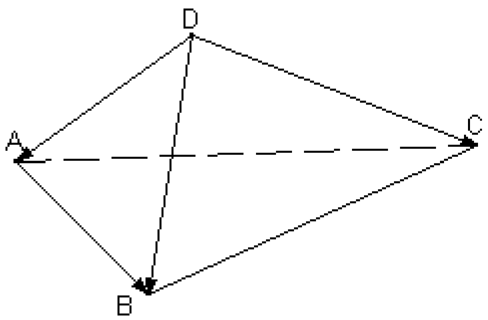
4. Даны два вектора $\vec{a}\{m;3;-1\}$ и $\vec{b}\{4;6;n\}$. Найти m и n, если известно, что векторы коллинеарны.

Решение

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{m}{4}=\frac{3}{6}=\frac{-1}{n}\Rightarrow\frac{m}{4}=\frac{3}{6}\text{ и }\frac{3}{6}=-\frac{1}{n}\Rightarrow m=2;\,n=-2.$$

Ответ: $m=2;\,n=-2$.

5. Доказать, что в правильном тетраэдре ABCD скрещивающиеся ребра взаимноперпендикулярны.



Решение

Т.к. тетраэдр правильный, то все его ребра равны между собой, все грани и основание – правильные треугольники. Обозначим длины ребер через a. Как известно $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}\right)=0$. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$. Найдем $\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}\right)$.

$$\left(\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\right)\cdot\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}\right)-\left(\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}\right)=\left|\overrightarrow{DB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|\cdot\cos\angle BDC-\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|\cdot\cos\angle ADC=$$

$=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ-a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=0.\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DC}\Rightarrow$ ребра AB и DC взаимоперпендикулярны.

6. Найти косинус угла между векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=2, \left|\vec{b}\right|=3, \widehat{\vec{a}\ \vec{b}}=60^\circ$.

Решение

$$\cos\left(\vec{p}\ \hat{}\ \vec{q}\right)=\frac{\left(\vec{p}\cdot\vec{q}\right)}{\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|}.$$

$$\left(\vec{p}\cdot\vec{q}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=4-9=-5.$$

$$\left|\vec{p}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 60^\circ+\left|\vec{b}\right|^2}=\sqrt{4+2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}+9}=\sqrt{19}.$$

$$\left|\vec{q}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 60^\circ+\left|\vec{b}\right|^2}=\sqrt{4-2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}+9}=\sqrt{7}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\left(\vec{p}\ \hat{}\ \vec{q}\right)=-\frac{5}{\sqrt{19\cdot7}}=-\frac{5\cdot\sqrt{133}}{133}.$$

Ответ: $-\frac{5\cdot\sqrt{133}}{133}$.

7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 120°, $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=1$. Найти $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)$.

Решение

$$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)=2\vec{a}^{\,2}-6\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)-3\vec{b}^{\,2}=2\vec{a}^{\,2}-6\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-3\vec{b}^{\,2}=2\left|\vec{a}\right|^2-5\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-3\left|\vec{b}\right|^2=$$

$$=2\cdot9-5\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos120^\circ-3\cdot1=18-5\cdot3\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-3=22.5.$$

Ответ: 22,5.

8. Проверить, что ABCD – трапеция, если A(3; -1; 2), B(1; 2; -1), C(-1; 1; -3), D(3; -5; 3) .

Решение

$\overrightarrow{AB}=\{1-3;\ 2-(-1);\ -1-2\}=\{-2;\ 3;\ -3\}$,

$\overrightarrow{CD}=\{3-(-1);\ -5-1;\ 3-(-3)\}=\{4;\ -6;\ 6\}$,

$\overrightarrow{BC}=\{-2;\ -1;\ -2\},\ \overrightarrow{AD}=\{0;\ -4;\ 1\}$.

Очевидно, что $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$ и $|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$, значит ABACD - трапеция

9. Даны четыре вектора $\vec{a}\{0;1;0\},\ \vec{b}\{1;0;1\},\ \vec{c}\{2;3;-2\},\ \vec{d}\{5;11;-7\}$. Доказать, что векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны и найти разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$.

Решение

$\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=0$.

$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-1\cdot(-4)=4\neq 0$. Итак, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - некомпланарны.

Пусть $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.

$x\vec{a}=\{0;\,x;\,0\},\ y\vec{b}=\{y;\,0;\,y\},\ z\vec{c}=\{2z;\,3z;\,-2z\}.$

$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\{0+y+2z;\,x+0+3z;\,0+y-2z\}=\vec{d}\{5;\,11;\,-7\}.$

Приравнивая соответствующие координаты векторов, составим систему уравнений

$$\begin{cases} y+2z=5,\\ x+3z=11,\\ y-2z=-7.\end{cases}\Rightarrow \quad \begin{matrix} y=-1\\ z=3\\ x=2\end{matrix}$$

Ответ: $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$.

10. Даны три вектора в ортонормированном базисе: $\vec{m}\{2;\,-1;\,3\},\ \vec{n}\{0;\,2;\,-1\},\ \vec{p}\{4;\,-1;\,2\}$. Найти: 1) $\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\right)$, 2) $|[\vec{n}\vec{p}]|$, 3) $\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\cdot\vec{p}\right)$.

Решение

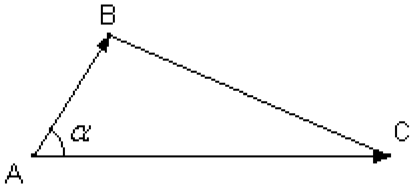
1) $\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\right)=2\cdot 0+(-1)\cdot 2+3\cdot(-1)=0-2-3=-5$.

2) $\left[\vec{n}\,\vec{p}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}\right\}=\{3;\,-4;\,-8\}$

$|[\vec{n}\vec{p}]|=\sqrt{3^2+(-4)^2+(-8)^2}=\sqrt{89}$.

3) $\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\cdot\vec{p}\right)=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=2\cdot 3+4+3\cdot(-8)=-14$.

Ответ: 1) -5; 2) $\sqrt{89}$; 3) -14.



11. Даны вершины треугольника A(3; 2; -3), B(5; 1; -1), C(1; -2; 1). Определить его внутренний угол при вершине A.

Решение

$$\cos\alpha = \frac{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|},\ \overrightarrow{AB}\{2;-1;2\},\ \overrightarrow{AC}\{-2;-4;4\},$$

$$\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = 2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+2\cdot 4 = 8$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3,\quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{3\cdot 6} = \frac{4}{9}$$

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{4}{9}$.

12. Найти проекцию вектора $\vec{a}\{4;-2;1\}$ на ось, составляющую с координатными осями равные тупые углы.

Решение

Найдем координаты единичного вектора $\vec{e}$ данной оси $\vec{e}\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$. Т.к. $\alpha=\beta=\gamma>90°$, то $\cos\alpha<0$. По свойству направляющих косинусов вектора имеем $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{3},\ \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\vec{e} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\},\quad \left|\vec{e}\right| = 1.$$

$$Пр_{\vec{e}}\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{e}\right) = \left|\vec{a}\right|\cdot\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{e}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{e}\right|} = \left(\vec{a}\cdot\vec{e}\right) = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

Ответ: $-\sqrt{3}$

13. Найти площадь треугольника ABC, если $A(-2;1;3),\ B(1;2;5),\ C(0;-1;0)$.

Решение

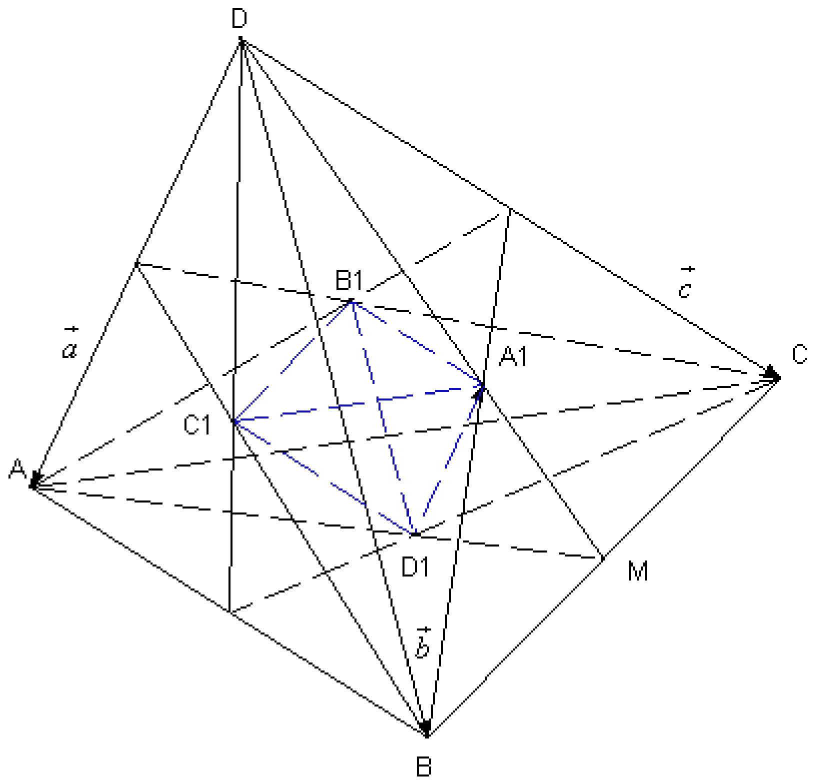
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right]\right|,\ \overrightarrow{AB} = \{3;1;2\},\ \overrightarrow{AC} = \{2;-2;-3\},$$

$$\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \left\{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right\} = \{1;13;-8\},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{1+169+64} = \frac{1}{2}\sqrt{234}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{234}$.

14. В тетраэдре ABCD точки A_1, B_1, C_1, D_1 – центры тяжести треугольников BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. Определить отношение объема V тетраэдра ABCD и объема V_1 тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$.



Решение

Пусть $\overrightarrow{DA}=\vec{a},\ \overrightarrow{DB}=\vec{b},\ \overrightarrow{DC}=\vec{c},\ \overrightarrow{D_1A_1}=\vec{a}_1,\ \overrightarrow{D_1B_1}=\vec{b}_1,\ \overrightarrow{D_1C_1}=\vec{c}_1$.

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|, V_{1,\ A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1\cdot\vec{c}_1\right|$. Выразим вектор $\overrightarrow{D_1A_1}=\vec{a}_1$ через векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Замечаем, что D_1 и A_1 принадлежат плоскости треугольника ADM, причем D_1 делит AM в отношении $\frac{AD_1}{D_1M}=\frac{2}{1}$ (по свойствам медиан). Аналогично $\frac{DA_1}{A_1M}=\frac{2}{1}$.

Значит ΔDAM подобен Δ $A_1D_1M_1$ с коэффициентом подобия k=3:1=3 $\Rightarrow DA=3D_1A_1,\ \overrightarrow{DA}=-3\overrightarrow{D_1A_1}\Rightarrow\vec{a}_1=-\frac{1}{3}\vec{a}$. Аналогично $\vec{b}_1=-\frac{1}{3}\vec{b},\ \vec{c}_1=-\frac{1}{3}\vec{c}$. Тогда

$V_1=\frac{1}{6}\left|\left(-\frac{1}{3}\vec{a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{c}\right)\right|=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{27}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|=\frac{1}{27}V\Rightarrow V:V_1=27:1$.

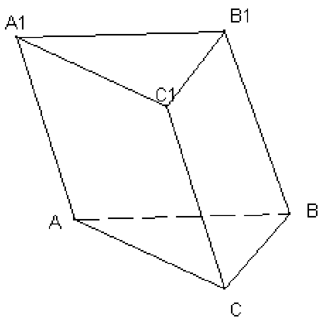
Ответ: 27:1.

15. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, где $A(-2;-2;0),\ B(-1;2;1),\ C(4;-1;-3),\ A_1(0;2;6)$. Найти: 1) длину бокового ребра AA_1; 2) площадь основания ABC; 3) высоту призмы, опущенную из точки A_1 на основание ABC.

Решение

1) $|AA_1| = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = \sqrt{(0+2)^2 + (2+2)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{56}$.

2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right]\right|, \overrightarrow{AB} = \{1; 4; 1\}, \overrightarrow{AC} = \{6; 1; -3\},$



$$\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \left\{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}\right\} = \{-13; 9; -23\},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-13)^2 + 9^2 + (-23)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{779}.$$

3) H – высота призмы, входит в формулу объема призмы $V = S_{осн} \cdot H \Rightarrow H = \frac{V}{S_{осн}}$, но $V = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA_1}\right)\right|$. Найдем объем призмы. $\overrightarrow{AA_1}\{2; 4; 6\}$.

$$\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA_1}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 18 - 4 \cdot 42 + 1 \cdot 22 = -128.$$

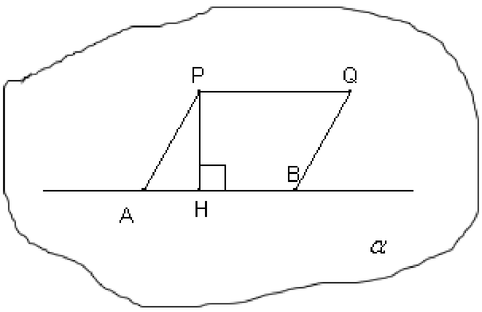
$$V = \frac{1}{2} \cdot 128 = 64 \Rightarrow H = \frac{64}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{779}} = \frac{128}{\sqrt{779}} = \frac{128\sqrt{779}}{779}.$$

Ответ: 1) $\sqrt{56}$; 2) $0{,}5\sqrt{779}$; 3) $\frac{128\sqrt{779}}{779}$.

16. В пространстве дана прямая AB и точка P, не принадлежащая AB. Известно, что $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $P(p_1, p_2, p_3)$. Найти расстояние от точки P до прямой AB.

Решение

Точка P и прямая AB определяют единственную плоскость α. Построим в α параллелограмм APQB и его высоту PH. Тогда расстояние до прямой AB и есть эта высота.



$S_{ABQP} = \left|\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}\right]\right| \cdot PH \Rightarrow PH = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$

Таким образом $\rho(P, AB) = PH$.

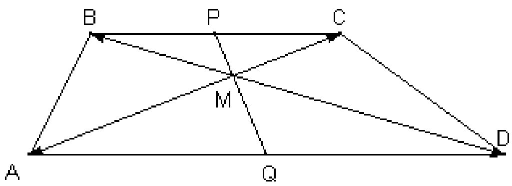
Пусть $A(1;-1;2)$, $B(1;3;-1)$, $P(5;-6;2)$. Используем полученную формулу.

$$\overrightarrow{AB}=\{0;\,4;\,-3\},\ \overrightarrow{AP}=\{4;\,-5;\,0\},\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{0+16+9}=5,\ \left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & -3\\ 4 & -5 & 0\end{vmatrix}=\{-15;\,-12;\,16\}$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\right]\right|=\sqrt{225+144+256}=25,\qquad \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{25}{5}=5.$$

Ответ: $\rho(P,\,AB)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=5.$

17. Прямая проходит через точки P и Q – середины противоположных сторон BC и AD четырехугольника ABCD и через точку M пересечения его диагоналей. Доказать, что ABCD – трапеция (или параллелограмм).



Решение

Т. к. $M\in AC$, то $\overrightarrow{MC}=\alpha\overrightarrow{MA}$, аналогично $\overrightarrow{MD}=\beta\overrightarrow{MB}$. В ΔBMC MP – медиана, значит $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\alpha\overrightarrow{MA}\right)$. Аналогично $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}\right)$.

Т. к. $M\in PQ$, то

$$\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{MQ}\Rightarrow\overrightarrow{MB}+\alpha\overrightarrow{MA}=\lambda\left(\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}\right)\Rightarrow(1-\beta\lambda)\overrightarrow{MB}+(\alpha-\lambda)\overrightarrow{MA}=\vec{0}.\ (*)$$

Т.к. $\overrightarrow{MB}$ не коллинеарен $\overrightarrow{MA}$, то равенство (*) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}1-\beta\lambda=0,\\ \alpha-\lambda=0.\end{cases}\Rightarrow\lambda=\alpha,\ \beta=\frac{1}{\alpha}.$$

Из ΔMBC $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}-\alpha\overrightarrow{MA}$.

Из ΔAMD $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}-\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{\alpha}\left(\overrightarrow{MB}-\alpha\overrightarrow{MA}\right)\Rightarrow\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{CB}\Rightarrow$ стороны DA и CB параллельны, а значит ABCD – трапеция.

Если α=-1, то $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}\Rightarrow$ ABCD – параллелограмм.

18. Определить, принадлежат ли точки $A(-5;6;-2)$, $B(2;-1;3)$, $C(0;0;1)$, $D(-1;2;0)$ одной плоскости.

Решение

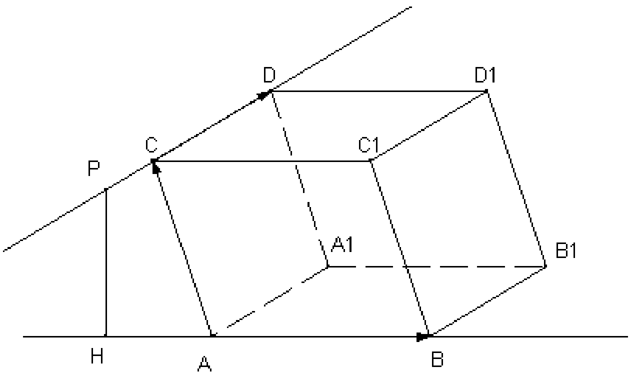
Если A, B, C, D принадлежат одной плоскости, то смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ равно нулю.

$\overrightarrow{AB} = \{7; -7; 5\}, \overrightarrow{AC} = \{5; -6; 3\}, \overrightarrow{AD} = \{4; -4; 2\}$

$$\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 7 & -7 & 5 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 0 + 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 = 6 \neq 0.$$

Т. к. $\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right) \neq 0$ значит, точки не лежат в одной плоскости.

19. Скрещивающиеся прямые AB и CD даны координатами своих точек $A(a_1; a_2; a_3), B(b_1; b_2; b_3), C(c_1; c_2; c_3), D(d_1; d_2; d_3)$. Найти кратчайшее расстояние между этими прямыми.



Решение

Пусть PH – это общий перпендикуляр прямых AB и CD. Тогда кратчайшее расстояние между этими прямыми равно длине PH.

Построим параллелепипед $ABB_1A_1CDC_1D_1$ на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$ как на сторонах. Тогда длина PH численно равна высоте h этого параллелепипеда.

Имеем $V = S_{осн} \cdot h$ и $V = \left|\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}\right)\right| \Rightarrow h = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}\right]\right|} = \rho(AB, CD)$.

Конкретно, пусть $A(-5; 6; -2), B(2; -1; 3), C(0; 0; 1), D(-1; 2; 0)$, $\overrightarrow{AB} = \{7; -7; 5\}, \overrightarrow{CD} = \{-1; 2; -1\}, \overrightarrow{AC} = \{5; -6; 3\}$.

$$\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -7 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \{-3; 2; 7\}$$

$$\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 7 & -7 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 7 \cdot 0 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot (-4) = -6$$

$$\left|\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}\right)\right| = 6, \quad \left|\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}\right]\right| = \sqrt{9 + 4 + 49} = \sqrt{62} \Rightarrow \rho(AB, CD) = \frac{6}{\sqrt{62}} = \frac{3\sqrt{62}}{31}.$$

Ответ: $\rho(AB, CD) = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right]\right|}$

20. Доказать, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$, удовлетворяющие условию $\left[\vec{p}\cdot\vec{q}\right]+\left[\vec{q}\cdot\vec{r}\right]+\left[\vec{r}\cdot\vec{q}\right]=\vec{0}$, компланарны.

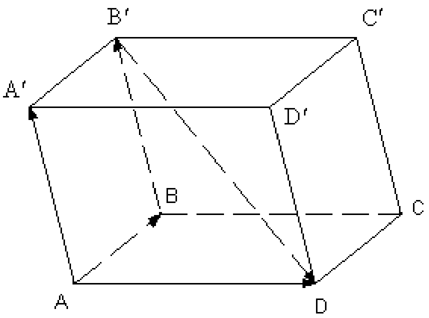
Доказательство

Умножим данное равенство скалярно на вектор $\vec{r}$:

$\left(\left[\vec{p}\cdot\vec{q}\right]\cdot\vec{r}\right)+\left(\left[\vec{q}\cdot\vec{r}\right]\cdot\vec{r}\right)+\left(\left[\vec{r}\cdot\vec{q}\right]\cdot\vec{r}\right)=\left(\vec{0}\cdot\vec{r}\right)$

По свойству смешанного произведения имеем, что $\left(\left[\vec{q}\cdot\vec{r}\right]\cdot\vec{r}\right)=0$ и $\left(\left[\vec{r}\cdot\vec{q}\right]\cdot\vec{r}\right)=0 \Rightarrow$ $\left(\left[\vec{p}\cdot\vec{q}\right]\cdot\vec{r}\right)=\left(\vec{p}\cdot\vec{q}\cdot\vec{r}\right)=0$, а это и означает, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ компланарны.

21. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}\{4; 3; 0\}, \overrightarrow{AD}\{2; 1; 2\}, \overrightarrow{AA'}\{-3; -2; 5\}$. Найти: 1) косинус угла φ_1 между ребром AB и диагональю $B'D$; 2) косинус угла φ_2 между гранями ABCD и $ADD'A'$.



Решение

1) $\varphi_1 = \left(AB \,\hat{}\, B'D\right) = \left(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{B'D}\right)$,

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \{-2; -2; 2\}$,

$\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AA'} = \{1; 0; -3\}$.

$$\cos\varphi_1 = \frac{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B'D}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B'D}\right|} = \frac{4+0+0}{\sqrt{16+9+0}\cdot\sqrt{1+9}} = \frac{4}{5\cdot\sqrt{10}} = \frac{2\cdot\sqrt{10}}{25}.$$

2) Пусть вектор $\vec{m}\perp(ABCD)$ и $\vec{n}\perp(ADD'A')$, тогда $\varphi_2 = \left(\vec{m} \,\hat{}\, \vec{n}\right)$.

Т. к. $\vec{m}\perp(ABCD) \Rightarrow \vec{m}\perp\overrightarrow{AB}$ и $\vec{m}\perp\overrightarrow{AD} \Rightarrow \vec{m}\parallel\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right]$. Примем за $\vec{m}$ именно $\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right]$.

$$\vec{m} = \left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \{6; -8; -2\} = 2\cdot\{3; -4; -1\}.$$

Аналогично

$$\vec{n}\perp(ADD'A') \Rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{AD} \text{ и } \vec{m}\perp\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \{9; -16; -1\}.$$

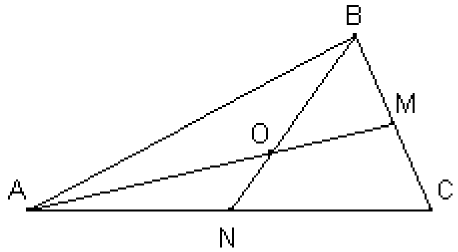
$$\cos\varphi_2 = \cos\left(\vec{m} \ \hat{} \ \vec{n}\right) = \frac{\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\right)}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|} = \frac{54+128+2}{2\cdot\sqrt{9+16+1}\cdot\sqrt{81+256+1}} = \frac{184}{2\cdot\sqrt{26}\cdot\sqrt{338}} =$$

$$= \frac{184}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 13\cdot\sqrt{2}} = \frac{46}{13\cdot\sqrt{13}} = \frac{46\sqrt{13}}{169}$$

Ответ: $\cos\varphi_1 = \dfrac{2\cdot\sqrt{10}}{25}$; $\cos\varphi_2 = \dfrac{46\sqrt{13}}{169}$.

22. Дан треугольник ABC координатами своих вершин $A(x_1;\, y_1),\, B(x_2;\, y_2),\, C(x_3;\, y_3)$. Найти координаты центра тяжести O этого треугольника.

Решение



Как известно, в ΔABC точка пересечения медиан есть его центр тяжести O. M – середина BC, значит $M\left(\dfrac{x_2+x_3}{2};\, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$. Точка O делит отрезок AM в отношении $\lambda = 2:1 = \dfrac{AO}{OM}$, но

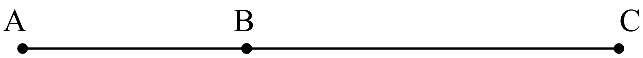
$$x = \frac{x_1+\lambda x_m}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1+\lambda y_m}{1+\lambda} \Rightarrow x = \frac{x_1 + 2\dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Ответ: $O\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3};\, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

23. Отрезок AB внешним образом делится точкой C, причем AB в 3 раза меньше BC. Найти координаты C, если $A(2;-5),\, B(0;6)$.

Решение

$$BC = 3AB \Rightarrow AC = 4AB,\ \lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{4}{3}.\ x = \frac{x_1+\lambda x_m}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1+\lambda y_m}{1+\lambda} \Rightarrow x = \frac{2-\dfrac{4}{3}\cdot 0}{1-\dfrac{4}{3}} = -6,$$



$$y = \frac{-5-\dfrac{4}{3}\cdot 6}{1-\dfrac{4}{3}} = 39.$$

Ответ: $C(-6;\, 39)$.

24. Прямая проходит через точки $M(-10;-1), N(2;-6)$. Не записывая уравнение прямой найти координаты точки пересечения прямой с осью абсцисс.

Решение

Пусть $MN \cap Ox = P(x;0), \lambda = \frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}}, x_p = \frac{x_m + \lambda x_n}{1+\lambda}, y_p = \frac{y_m + \lambda y_n}{1+\lambda}$. Т. к. $y_p = 0$, то

$$0 = \frac{-1+\lambda\cdot(-6)}{1+\lambda} \Rightarrow -6\lambda = 1, \lambda = -\frac{1}{6} \Rightarrow x_p = \frac{-10-\frac{1}{6}\cdot 2}{-1\frac{1}{6}} = -\frac{62}{5} = -12.4.$$

Ответ: $P(-12{,}4;0)$.

25. Найти геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек $A(2;-5), B(5;-1)$ есть величина постоянная равная 20,5.

Решение

Обозначим текущую точку как $M(x;y)$. По условию $AM^2 + BM^2 = 20{,}5$.

$$AM^2 = (x-2)^2 + (y+5)^2,\ BM^2 = (x-5)^2 + (y+1)^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+5)^2 + (x-5)^2 + (y+1)^2 = 20{,}5$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 + x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 20{,}5 \Rightarrow$$

$2x^2-14x+2y^2+12y+55=20{,}5 \Rightarrow$

$2(x-3{,}5)^2 + 2(y+3)^2 = 8$ или $(x-3{,}5)^2 + (y+3)^2 = 4$. Это окружность с центром в точке $C(3.5;-3)$ и радиуса 2. Заметим, что С – это середина отрезка АВ, т. к. $3{,}5 = \frac{2+5}{2}, -3 = \frac{-5-1}{2}$.

26. Заданы формулы преобразования аффинных координат $\begin{cases} x = 2x' - y' + 1, \\ y = x' + y' - 2. \end{cases}$

Определить координаты нового начала и координаты новых базисных векторов.

Решение

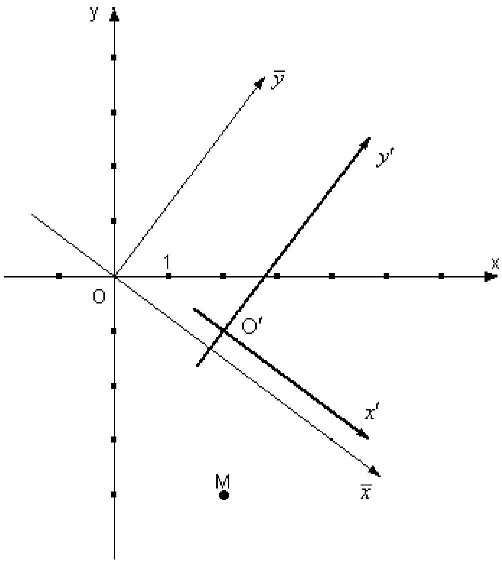
Из формул преобразования координат сразу имеем, что $O'(1;-2), \vec{e_1'} = \{2;1\}, \vec{e_2'} = \{-1;1\}$.

27. Прямоугольная система координат XOY повернута вокруг начала координат на угол $\alpha = arctg\left(-\frac{3}{4}\right)$ и перенесена параллельно в точку $O'(2;-1)$.

Написать формулы преобразования координат. Найти координаты точки $M(2;-4)$ в новой системе координат. Сделать чертеж.

Решение

Формулы преобразования имеют вид $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{cases}$



$\alpha = arctg\left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow tg\alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow$ угол поворота такой, что ось Ox проходит по четвертой четверти. В ней $\sin\alpha < 0, \cos\alpha > 0$.

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Из этих формул получаем, что $\sin\alpha = -\frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$.

$O'(2;-1) \Rightarrow a = 2, b = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' + 2, \\ y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' - 1. \end{cases}$ $M(2;-4)$ - точка дана в старой системе координат $\Rightarrow x = 2,\ y = -4$. $\begin{cases} \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' + 2 = 2, \\ -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' - 1 = -4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x' + 3y' = 0, \\ -3x' + 4y' = -15. \end{cases}$ решив систему, получаем, что $x' = 1.8;\ y' = -2.4$. Чтобы построить новую систему координат, строим угол α так, чтобы $tg\alpha = -\frac{3}{4}$. Для этого строим точку $K(4;-3) \Rightarrow OK$ - луч, такой, что $OX \,\hat{}\, O\overline{X} = \alpha, O\overline{Y} \perp O\overline{X}$. Теперь оси $O\overline{X}$ и $O\overline{Y}$ переносим в точку $O'(2;-1)$. Получили систему $X'O'Y'$.

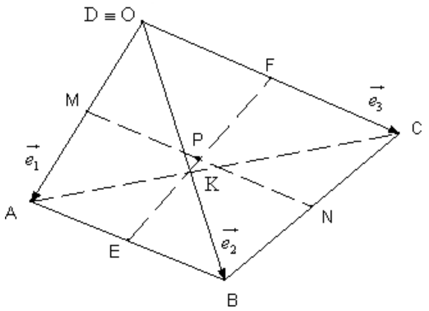
28. Определить координаты нового начала и угол α, на который повернуты оси, если формулы преобразования координат имеют вид $\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 1, \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'. \end{cases}$

Решение

$a=-1,\ b=0 \Rightarrow O'(-1;\ 0).\ \cos\alpha=\frac{1}{2},\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right) \Rightarrow \alpha=-60^\circ$.

Ответ: $O'(-1;\ 0),\ \alpha=-60^\circ$.

29. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.



Решение

Введем аффинную систему координат с началом в точке O и базисными векторами $\vec{e_1}=\overrightarrow{OA},\ \vec{e_2}=\overrightarrow{OB},\ \vec{e_3}=\overrightarrow{OC}$. Найдем координаты точек в этой системе координат $O(0;\ 0;\ 0),\ A(1;\ 0;\ 0),\ B(0;\ 1;\ 0),\ C(0;\ 0;\ 1),\ M\left(\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right),\ N\left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. Пусть P – середина отрезка $MN \Rightarrow P\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right),\ E\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right),\ F\left(0;\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$. Пусть K – середина отрезка $EF \Rightarrow K\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$. Т. к. координаты точек P и K совпадают, значит $P\equiv K$, что и доказывает данное в условии утверждение.

30. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(1;\ -3;\ 7)$ и $B(5;\ 7;\ -5)$.

Решение

$M\in OY \Rightarrow M(0;\ y;\ 0).\ MA=MB \Rightarrow MA^2=MB^2 \Rightarrow (0-1)^2+(y+3)^2+(0-7)^2=(0-5)^2+(y-7)^2+(0+5)^2$

$1+y^2+6y+9+49=25+y^2-14y+49+25 \Rightarrow y=2$.

Ответ: $M(0;\ 2;\ 0)$.

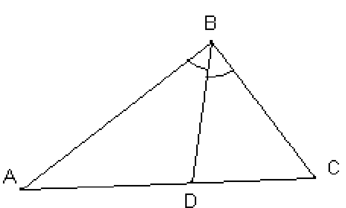
31. Даны вершины треугольника $A(1;\ 2;\ -1),\ B(2;\ -1;\ 3),\ C(-4;\ 7;\ 5)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

Решение

По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника имеем $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{26},\ BC=\sqrt{(-4-2)^2+(7+1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{104} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda=\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}=\sqrt{\frac{26}{104}}=\frac{1}{2}$. Найдем координаты точки D по формулам



$x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$, где A – первая точка, C – вторая точка.

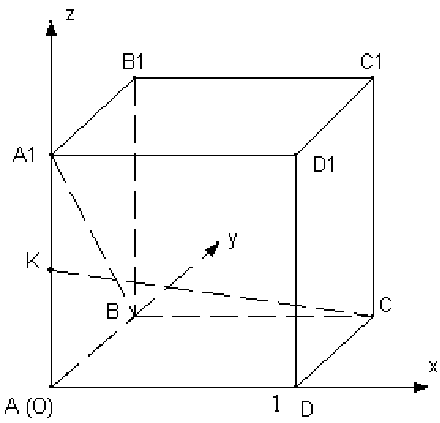
$x=\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot(-4)}{1+\frac{1}{2}}=-\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{2+\frac{1}{2}\cdot 7}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{11}{3}$, $z=\dfrac{-1+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}}=1$. $D\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$. Вычислим длину BD

$$BD=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{11}{3}+1\right)^2+(1-3)^2}=\frac{\sqrt{296}}{3}=\frac{2\sqrt{74}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

32. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K – середина ребра AA_1. Найдите угол между прямыми A_1 B и CK.

Решение



Введем прямоугольную систему координат OXYZ так, что O – это точка A, Ox – это AD, Oy – AB, Oz – AA_1. ребро куба пускай имеет длину, равную 1. Найдем координаты точек A_1, B, C, K.

$A_1(0;\,0;\,1)$, $B(0;\,1;\,0)$, $C(1;\,1;\,0)$, $K\left(0;\,0;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

$(A_1B)\,\hat{}\,(CK)=\overrightarrow{A_1B}\,\hat{}\,\overrightarrow{CK}=\alpha$.

$\cos\alpha=\dfrac{\left(\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{CK}\right)}{\left|\overrightarrow{A_1B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CK}\right|}$. $\overrightarrow{A_1B}=\{0;\,1;\,-1\}$, $\overrightarrow{CK}=\left\{-1;\,-1;\,\dfrac{1}{2}\right\}$.

$$\left(\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{CK}\right)=0\cdot(-1)+1\cdot(-1)+(-1)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{3}{2},$$

$$\left|\overrightarrow{A_1B}\right|=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\ \left|\overrightarrow{CK}\right|=\sqrt{1+1+0{,}25}=\frac{3}{2}$$

$\cos\alpha=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=135^\circ$. Если требуется определить острый угол, то будет 45°.

Ответ: 45°.

33. В пространстве даны две аффинные системы координат: O′(1,-2,1), $\overrightarrow{e_1'}\{0,1,-2\}$, $\overrightarrow{e_2'}\{1,1,0\}$, $\overrightarrow{e_3'}\{2,2,-1\}$. Записать формулы преобразования координат и найти координаты точки А в старой системе, если известны ее координаты $(-2;3;4)$ в новой системе координат.

Решение

Формулы преобразования имеют вид $\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a, \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b, \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + c. \end{cases}$ Имеем

$\begin{cases} x = 0\cdot x' + 1\cdot y' + 2\cdot z' + 1, \\ y = 1\cdot x' + 1\cdot y' + 2\cdot z' - 2, \\ z = -2\cdot x' + 0\cdot y' - 1\cdot z' + 1. \end{cases}$ $A(-2;3;4) \Rightarrow x' = -2,\ y' = 3,\ z' = 4 \Rightarrow x = 0+3+8+1 = 12,$

$y = -2+3+8-2 = 7,\ z = 4+0-4+1 = 1.$ $(12;7;1)$ - координаты точки А в старой системе координат.

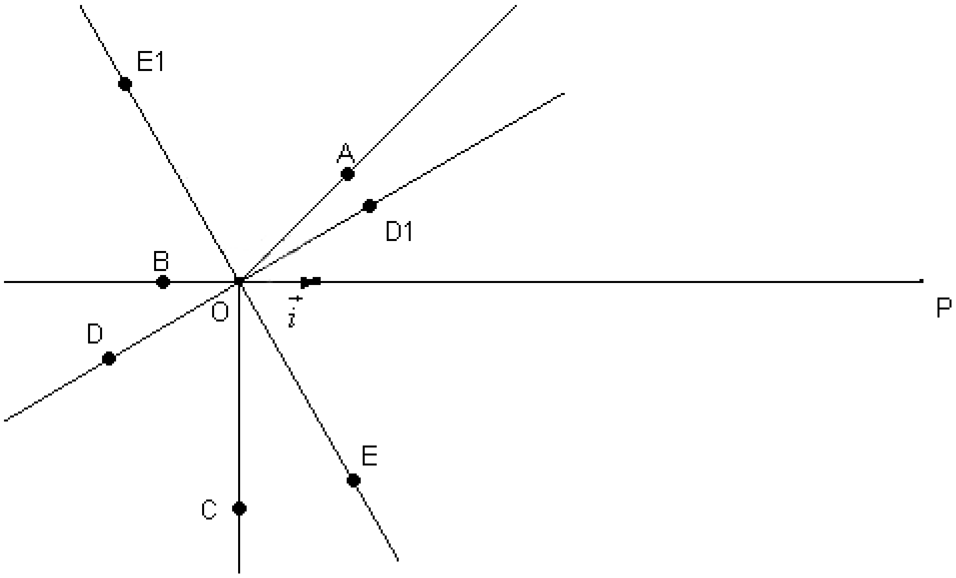
Ответ: $\begin{cases} x = 1\cdot y' + 2\cdot z' + 1, \\ y = 1\cdot x' + 1\cdot y' + 2\cdot z' - 2, \\ z = -2\cdot x' - 1\cdot z' + 1. \end{cases}$ $A(12;7;1)$.

34. В полярной системе координат на плоскости построить следующие точки: $A(2;45^\circ)$, $B(1;180^\circ)$, $C(3;-90^\circ)$, $D(-2;30^\circ)$, $E(-3;120^\circ)$.

Решение

Для построения точек А, В и С сначала строим лучи, исходящие из полюса О, под данным углом к полярной оси. Затем на этих лучах откладываем отрезки ОА=2, ОВ=1, ОС=3, где единицей масштаба является длина единичного вектора $\vec{i}$ полярной оси.

Для построения точек D и E сначала строим точки $D_1(2;30^\circ)$, $E_1(3;120^\circ)$ и затем их отображаем в точки D и E центрально-симметрично относительно О.



35. В полярной системе координат даны точки M(4; -15^0) и $N(5;\,45^\circ)$. Найти длину отрезка MN.

Решение

$$MN = \sqrt{\rho_1{}^2 + \rho_2{}^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\,.$$

$$MN = \sqrt{16 + 25 - 2\cdot 4\cdot 5\cos(45^\circ + 15^\circ)} = \sqrt{41 - 2\cdot 20\cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{21}\,.$$

Ответ: $\sqrt{21}$

36. В полярной системе координат даны точки $A\left(3;\,-\frac{\pi}{8}\right)$ и $B\left(\sqrt{3};\,\frac{5\pi}{24}\right)$. Найти площадь треугольника OAB, где O – полюс.

Решение

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\left|\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right|.$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} = 2{,}25\,.$$

Ответ: 2,25.

37. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовой прямоугольной системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. В полярной системе координат даны точки

$M_1\left(2; \dfrac{\pi}{3}\right), M_2\left(3; -\dfrac{\pi}{4}\right), M_3(1; -\pi), M_4\left(4; \dfrac{2\pi}{3}\right)$. Определить декартовы координаты этих точек.

Решение

Формулы перехода от полярной системы координат к декартовой имеют вид $x = \rho\cos\alpha,\ y = \rho\sin\alpha$.

$$M_1\left(2; \frac{\pi}{3}\right): \begin{cases} x = 2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}, \\ y = 2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}. \end{cases} \Rightarrow x = 2\cdot\frac{1}{2} = 1,\ y = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow M_1\left(1; \sqrt{3}\right),$$

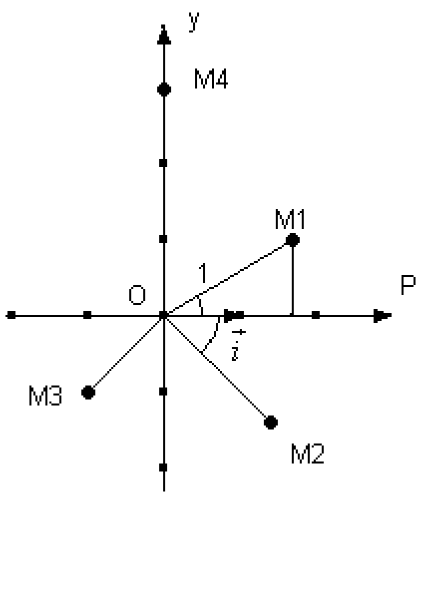
$$M_2\left(3; -\frac{\pi}{4}\right): \begin{cases} x = 3\cdot\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right), \\ y = 3\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases} \Rightarrow M_2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$M_3(1; -\pi): \begin{cases} x = 1\cdot\cos(-\pi), \\ y = 1\cdot\sin(-\pi). \end{cases} \Rightarrow M_3(-1; 0),$$

$$M_4\left(4; \frac{2\pi}{3}\right): \begin{cases} x = 4\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}, \\ y = 4\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}. \end{cases} \Rightarrow M_4\left(-2; 2\sqrt{3}\right).$$

Ответ: $M_1\left(1; \sqrt{3}\right)$, $M_2\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_3(-1; 0)$, $M_4\left(-2; 2\sqrt{3}\right)$.

38. Полярная ось $\left(O; \vec{i}\right)$ совпадает с осью Ox прямоугольной системы координат. Точки $M_1\left(\sqrt{3}; 1\right), M_2\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right), M_3(-1; -1), M_4(0; 3)$ даны своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат. Определить полярные координаты этих точек.



Решение

Сделаем сначала чертеж, т. е. построим точки в декартовой системе координат. $\rho^2 = x^2 + y^2, tg\varphi = \dfrac{y}{x}$. Чтобы правильно определить угол, необходимо обращать внимание на то, в какой четверти находится точка.

$M_1\left(\sqrt{3};1\right):\rho=\sqrt{3+1}=2,\, tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Т. к. M_1 находится в I четверти, то $\varphi=\frac{\pi}{6}\Rightarrow M_1\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$.

$M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right):\rho=\sqrt{2+2}=2,\, tg\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$. Т. к. $M_2\in IV$ четверти, то $\varphi=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow M_2\left(2;-\frac{\pi}{4}\right)$.

$M_3\left(-1;-1\right):\rho=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\, tg\varphi=\frac{-1}{-1}=1$. Т. к. $M_3\in III$ четверти, то $\varphi=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow M_3\left(\sqrt{2};\frac{5\pi}{4}\right)$.

$M_4\left(0;3\right)\in Oy\Rightarrow\varphi=90^\circ$ èëè $\varphi=\frac{\pi}{2},\,\rho=3\Rightarrow M_4\left(3;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $M_1\left(2;\frac{\pi}{6}\right),\ M_2\left(2;-\frac{\pi}{4}\right),\ M_3\left(\sqrt{2};\frac{5\pi}{4}\right),\ M_4\left(3;\frac{\pi}{2}\right)$.

39. Линии заданы своими уравнениями в прямоугольной системе координат. Записать уравнения этих линий в полярной системе координат, если полярная ось $\left(O;\vec{i}\right)$ совпадает с осью Ox: 1) y=2; 2) x=5; 3) $x^2+y^2=4$;

4) $(x-1)^2+y^2=1$; 5) $x^3+y^3=3xy$.

Решение

Подставим в уравнение вместо x и y соответственно $\rho\cos\varphi$ è $\rho\sin\varphi$ и после необходимых преобразований получим уравнения линий в полярной системе координат.

1) $y=2\Rightarrow\rho\sin\varphi=2\Rightarrow\rho=\frac{2}{\sin\varphi}\left(\varphi\neq\pi k\right)$.

2) $x=5\Rightarrow\rho\cos\varphi=5\Rightarrow\rho=\frac{5}{\cos\varphi}\left(\varphi\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$.

3) $x^2+y^2=4\Rightarrow\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4$ èëè $\rho^2=4\Rightarrow\rho=2$.

4) $\left(x-1\right)^2+y^2=1\Rightarrow x^2-2x+y^2=0\Rightarrow\rho^2\cos^2\varphi-2\rho\cos\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\rho^2-2\rho\cos\varphi=0\Rightarrow\rho=2\cos\varphi$.

5) $x^3+y^3=3xy \Rightarrow \rho^3\cos^3\varphi+\rho^3\sin^3\varphi=3\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi \Rightarrow \rho=\dfrac{3\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$.

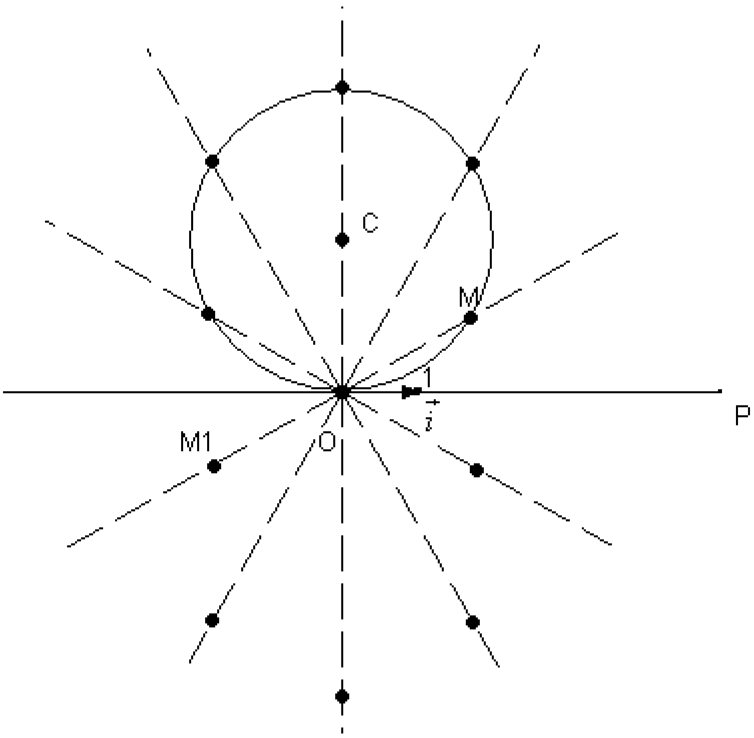
Ответ: 1) $\rho=\dfrac{2}{\sin\varphi}$; 2) $\rho=\dfrac{5}{\cos\varphi}$; 3) $\rho=2$; 4) $\rho=2\cos\varphi$; 5) $\rho=\dfrac{3\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$.

40. Построить линию $\rho=4\sin\varphi$ в полярной системе координат. Значения φ брать из промежутка [0, 2π] с шагом $h=\dfrac{\pi}{6}$. Записать уравнение линии в прямоугольной системе координат.

Решение

Составим таблицу значений функции $\rho=4\sin\varphi$

φ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
sinφ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\rho=4\sin\varphi$	0	2	3.6	4	3.6	2	0	-2	-3.6	-4	-3.6	-2	0



Если $\rho>0$, то точка строится обычным образом (по определению). Если $\rho<0$, то сначала строится точка $M_1(|\rho|;\varphi)$ и отображается симметрично относительно полюса O в точку $M(\rho;\varphi)$.

Замечаем, что все точки лежат на окружности с центром в точке C и радиусом r=2.

$\rho=4\sin\varphi$. Умножим уравнение на $\rho \Rightarrow \rho^2=x^2+y^2, \rho\sin\varphi=y \Rightarrow x^2+y^2=4y$ èëè $x^2+(y-2)^2=4$.

Ответ: $x^2+(y-2)^2=4$.

ВНЕАУДИТОРНАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА (В ФОРМЕ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ) ПО ТЕМАМ «ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ», «СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ»

Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных заданий

Самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общепрофессиональных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к практическим занятиям, семинарам, сдаче зачетов и экзаменов.

Самостоятельная работа по геометрии направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по геометрии;
- приобретение дополнительных знаний и умений по темам «Элементы векторной алгебры», «Системы координат на плоскости и в пространстве»;
- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

В работе представлено 20 вариантов заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними. В каждом из двадцати вариантов содержится пять задач.

В первом задании требуется доказать некоторое свойство или утверждение, которое было рассмотрено на лекции без доказательства. Для успешного выполнения задания студенту необходимо поработать с соответствующими литературными источниками [1], [2] (основная). Предполагается проведение семинарского занятия, где каждый студент представляет решение своего первого задания.

Второе задание соответствует уровню применения знаний в стандартной ситуации. Третье задание соответствует уровню применения знаний в ситуации с некоторыми особенностями. За правильное выполнение первых двух заданий выставляется по два балла, что соответствует оценке “удовлетворительно”. Третье задание оценивается в три балла. За правильное выполнение первых трех заданий ставится оценка “хорошо”.

Четвертое задание соответствует уровню применения знаний в нестандартной ситуации. Его выполнение требует от студента творческого поиска, серьезных волевых и умственных усилий. Решение четвертого задания оценивается в 4 балла. Если правильно решены первые четыре задания, студент успешно выступил на семинаре, то за самостоятельную работу он получает оценку “отлично”. Существенную помощь в решении задач 2 – 4 могут оказать внимательное изучение и анализ пунктов “Элементы векторной алгебры (основные понятия, свойства, теоремы, формулы)”, “Системы координат на плоскости и в пространстве” и “Применение векторной алгебры и метода координат к решению геометрических задач” настоящего пособия.

Пятое задание – это задание исследовательского характера. Заметим, что исследование – это деятельность, связанная с решением творческой исследовательской задачи и предполагающая наличие основных этапов, характерных для научного исследования: наблюдение определенных вещей, явлений или процессов; создание гипотезы на основе наблюдаемых фактов и зависимостей между ними; проверка гипотезы, которая осуществляется посредством вывода из гипотезы заключений или экспериментом.

Выполнение пятого задания не является обязательным и оценивается в пять баллов. Его решение может быть связано с целью:

- получить дополнительные баллы и повысить рейтинг студента;
- включить задание в курсовую или выпускную квалификационную работу;
- включить его в копилку заданий для практической работы в будущей профессиональной деятельности;
- удовлетворения познавательных потребностей, приобщения к исследовательской деятельности.

Особенно полезными при выполнении пятого задания могут оказаться литературные источники [1], [3] (дополнительная).

Система оценивания индивидуальных заданий представлена в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий) в БРС

№ задания	Характеристика задания	Критерии оценивания	Баллы
1	Задача на доказательство. Применение знаний в стандартных ситуациях. Доказательство свойств операций над векторами, линейно независимой системы векторов, проекции вектора на ось, скалярного, векторного, смешанного произведения векторов.	Логично и последовательно выполнены все шаги доказательства, рассуждения имеют четкое обоснование	2
		Доказательство в целом выполнено верно, но имеются недочеты в обосновании или логике построения доказательства	1
2	Классическая учебная задача на вычисление, преобразование или доказательство по теме “Элементы векторной алгебры”. Применение знаний в стандартных ситуациях.	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения.	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно или из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ	1
3	Задача на вычисление или доказательство повышенного уровня сложности по темам “Элементы векторной алгебры”, “Системы координат на плоскости и в пространстве”. Применение знаний в ситуациях с некоторыми	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно или из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ	2

	особенностями.	Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок вычислительного или логического характера.	1
4	Стереометрическая задача на вычисление или доказательство повышенного уровня сложности, для решения которой необходимо применить векторный метод или метод координат. Применение знаний в нестандартных ситуациях.	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения. Представлен наглядный, грамотный чертеж	4
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно или из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ.	3
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок вычислительного или логического характера.	2
		Решение сведено к рассмотрению частного случая, для которого оно является верным	1
5	Исследовательская задача, предполагающая применение метода координат для изучения замечательных кривых. Применение знаний в нестандартных ситуациях. Задача не является обязательной для решения.	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения. Представлен наглядный, грамотный чертеж	5
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно или из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ. Представлен наглядный, грамотный чертеж	4
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок вычислительного или логического характера. Представлен наглядный чертеж кривой	3
		Решение сведено к рассмотрению частного случая, для которого оно является верным. Представлен наглядный чертеж кривой	2
		Представлено уравнение кривой (без вывода уравнения) и наглядный грамотный чертеж	1

ИТОГО	максимум (без задачи 5) – 11
	максимум (с задачей 5) - 16

Требования к выполнению и оформлению самостоятельной работы

1. Самостоятельная работа выполняется в отдельной тетради или на скрепленных тетрадных листах синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя).

2. На обложке тетради должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название раздела дисциплины, номер варианта.

Например: ***Самостоятельная работа (в форме индивидуальных заданий) по темам “Элементы векторной алгебры”, “Системы координат на плоскости и в пространстве” студентки факультета информатики, математики и экономики I курса группы МФ-19 Ивановой Татьяны Александровны***

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы.

4. В самостоятельной работе предлагается 5 заданий. Первые три являются обязательными для выполнения. Четвертая и пятая задачи – повышенной сложности, студент решает их по желанию. Правильное решение повышает рейтинг студента и влияет на экзаменационную отметку. Самостоятельная работа, которая содержит меньше трех заданий, а также задачи не своего варианта, не будет зачтена.

5. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы.

6. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями.

7. Чертежи следует выполнять аккуратно карандашом, используя чертежные инструменты. Чертеж рекомендуется делать крупно, применяя при необходимости цветные карандаши.

8. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то в кратчайший срок студент должен исправить все замечания, которые указал преподаватель, в этой же тетради.

9. Самостоятельная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком. Преподаватель имеет право не принимать работу на проверку во время сессии.

Варианты самостоятельной работы

Вариант 1

1. Доказать сочетательное свойство операции суммы векторов: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

2. Упростить векторные выражения:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{D_1A_1}$;

б) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$, если $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{DD_1}$.

3. Образуют ли векторы $\vec{a}\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$, $\vec{b}\left\{0;\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $\vec{c}\left\{-\frac{4}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}}\right\}$ ортонормированный базис?

4. В тетраэдре ОАВС плоские углы при вершине О – прямые. Используя векторы, найти угол между биссектрисами углов АОВ и ВОС.

5. *Циклоидой называется траектория, описываемая точкой М окружности радиуса r, катящейся без скольжения по данной прямой l.* Приняв прямую *l* за ось

абсцисс, а начальное положение точки М за начало координат, написать уравнение циклоиды и построить ее по точкам.

Вариант 2

1. Доказать свойство операции умножения вектора на число: $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

2. Даны векторы $\vec{a}\{1;0;2\}$, $\vec{b}\{1;2;0\}$, $\vec{c}\{3;-1;2\}$. При каком (k) векторы $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{c}$ ортонормированны?

3. Доказать, что для любых ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ число $(6\vec{a}+\vec{b})^2-(3\vec{a}+2\vec{b})^2+3\vec{b}^2$ неотрицательно.

4. Доказать, что если в тетраэдре две пары противоположных ребер взаимно перпендикулярны, то и третья пара ребер взаимно перпендикулярна.

5. *Эпициклоидой называется траектория, описываемая точкой М окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внешней стороне другой окружности радиуса R.* Написать параметрическое задание эпициклоиды, приняв центр О неподвижной окружности за начало прямоугольной декартовой системы координат, а за параметр – угол φ=∠COA, где C – центр катящейся окружности, а A – точка на положительной полуоси Ox.

Вариант 3

1. Доказать свойство операции умножения вектора на число: $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

2. Доказать, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо соотношение $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = 2\left|\vec{a}\right|+2\left|\vec{b}\right|^2$.

3. В тетраэдре OABC точка М – центр тяжести ΔABC. Выразить вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

4. Доказать, что точка O – центр тяжести ΔABC тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

5. *Кардиоидой называется траектория, описываемая точкой М окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внешней стороне другой окружности того же радиуса.* Написать параметрическое задание кардиоиды, приняв центр О неподвижной окружности за начало прямоугольной декартовой системы координат, а за параметр – угол $\varphi=\angle COA$, где С – центр катящейся окружности, а А – точка на положительной полуоси Ох. Построить кардиоиду по точкам.

Вариант 4

1. Доказать свойство системы линейно зависимых векторов: *При n>1 система векторов* $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ *линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные векторы системы.*

2. Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a}\wedge\vec{b})=120^0$, найти значение α, при котором векторы $\vec{p}=\alpha\vec{a}+17\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ ортогональны.

3. В правильном тетраэдре ABCD с ребром а найти расстояние от вершины D до основания ABC.

4. Дана четырехугольная пирамида SABCD, ребра DA, DC и DS взаимно перпендикулярны и имеют длины DA = 3, DC = 5, DS = 12. Основанием пирамиды служит прямоугольник ABCD, на стороне AB которого взята точка K так, что AK = 4. Используя метод координат, найти угол между плоскостями SDK и SBC.

5. *Гипоциклоидой называется траектория, описываемая точкой М окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R.* Приняв центр О неподвижной окружности за начало прямоугольной декартовой системы координат, а за параметр – угол $\varphi=\angle COP$, где С – центр катящейся окружности, а Р – точка положительной полуоси Ох, написать параметрическое уравнение гипоциклоиды.

Вариант 5

1. Доказать свойство системы линейно зависимых векторов: *Если часть данной системы векторов линейно зависима, то и вся система векторов линейно зависима.*

2. Вычислить площадь параллелограмма ABCD, если $\overrightarrow{AB} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle CAB = 30^0$.

3. ABCD – произвольный четырехугольник. Точки M и N – середины сторон BC и DA соответственно. Доказать, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}\right)$.

4. В данном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки P, Q и R являются центрами граней, не содержащих точку D. Найти отношение объема V пирамиды DPQR к объему V_0 данного параллелепипеда.

5. *Астроидой называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R=4r.* Приняв центр O неподвижной окружности за начало прямоугольной декартовой системы координат, а за параметр – угол φ=∠COP, где C – центр катящейся окружности, а P – точка положительной полуоси Ox, написать параметрическое уравнение астроиды. Построить астроиду по точкам.

Вариант 6

1. Доказать свойство системы линейно зависимых векторов: *Система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.*

2. Вычислить площадь ΔABC, если A(3;4;-1), B(2;0;1), C(-3;5;4).

3. Доказать, что вектор $\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ ортогонален вектору $\vec{c}$.

4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M и N – центры тяжести треугольников A_1BD и B_1D_1C. Доказать, что точки M и N лежат на диагонали AC_1 параллелепипеда и делят эту диагональ на три равные части. (Используйте метод координат).

5. Дана прямая *l* и точка S, отстоящая от нее на расстоянии $a \neq 0$. Через точку S проводятся всевозможные прямые, на каждой из которых от точки B пересечения с прямой *l* откладывается в обе стороны отрезок, равный *b*. Геометрическое место

концов этих отрезков называется *конхоидой Никомеда*. Приняв точку S за полюс полярной системы и направив полярную ось перпендикулярно к прямой *l*, написать уравнение конхоиды Никомеда и построить ее по точкам.

Вариант 7

1. Доказать следующее свойство коллинеарных векторов: *Векторы* $\vec{a}$ *(a₁, a₂) и* $\vec{b}$ *(b₁, b₂) коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

2. Найти $|[\vec{a}\vec{b}]|$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=10$, $(\vec{a}\vec{b}) = -15$.

3. Вычислить величину угла, образованного векторами $\vec{s}$ и $\vec{t}$, зная что векторы $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ и $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ ортогональны и $|\vec{s}|=|\vec{t}|=1$

4. Дан ΔABC и произвольная тоска M пространства. Доказать, что точка O – центр тяжести ΔABC тогда и только тогда, когда $3\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

5. *Конхоидой данной кривой называется кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении полярного радиуса каждой точки данной кривой на постоянный отрезок* b. Если *ρ=f(φ)* – уравнение данной кривой в полярных координатах, то *ρ=f(φ)*± b – уравнение конхоиды. *Улиткой Паскаля* называется конхоида окружности, если за полюс O выбрана точка на окружности. Написать уравнение улитки Паскаля, приняв диаметр, проходящий через точку O, за полярную ось.

Вариант 8

1. Доказать свойство скалярного произведения векторов: $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$

2. Даны векторы $\vec{u}\{1;0;3\}$, $\vec{v}\{4;0;z\}$. При каком значении z вектор $[\vec{u}\vec{v}]$ коллинеарен оси Oy?

3. В равностороннем треугольнике ABC с длинной стороны, равной 1, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$. Вычислить $(\vec{a}\vec{b}) + (\vec{b}\vec{c}) + (\vec{c}\vec{a})$.

4. AH – высота ΔABC. Выразить вектор $\overrightarrow{AH}$ через вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

5. Пусть F_1 и F_2 – две фиксированные точки, b – постоянное число и F_1F_2=2c. *Овалом Кассини* называется геометрическое место точек M, для которых $F_1M \cdot F_2M = b^2$. Приняв прямую F_1F_2 за ось абсцисс, а середину отрезка F_1F_2 - за начало координат, написать уравнение кривой.

Вариант 9

1. Доказать свойство скалярного произведения векторов: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

2. Даны векторы $\vec{a}\{0;1;2\}$, $\vec{b}\{-2;-1;0\}$. При каком значении z вектор $\vec{c}\{3;4;z\}$ ортогонален вектору $[\vec{a}\vec{b}]$?

3. В ортонормированном базисе даны вектора $\vec{a}\{3;0;-1\}$, $\vec{b}\{2;4;3\}$, $\vec{c}\{-1;3;2\}$, $\vec{d}\{2;0;1\}$. Найти $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$ и $([\vec{a}\vec{c}]\cdot[\vec{b}\vec{d}])$.

4. Доказать, что прямые, соединяющие середины скрещивающихся ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке.

5. Пусть F_1 и F_2 – две фиксированные точки, b – постоянное число и F_1F_2=2b. *Лемнискатой Бернулли* называется геометрическое место точек M, для которых $F_1M \cdot F_2M = b^2$. Приняв прямую F_1F_2 за ось абсцисс, а середину отрезка F_1F_2 - за начало координат, написать уравнение кривой. Построить кривую по уравнению.

Вариант 10

1. Доказать свойство векторного произведения векторов: $[(\alpha\vec{a})\vec{b}] = \alpha[\vec{a}\vec{b}]$.

2. Даны три точки A(0;-1;2), B(-3;0;4), C(2;3;-5). Найти:

1) $\left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$,

2) $\left|\left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) * \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\right|$.

3. Доказать, что для любых трех точек A, B, C справедливо соотношение $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right] = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right]$.

4. На стороне AB ΔABC дана точка P, через которую проведена прямая a, параллельная медиане CD. $A_1 = a \cap BC$, $B_1 = a \cap AC$. Доказать, что $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

5. Луч *l*, исходящий из неподвижной точки O, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Точка M, имея начальное положение в точке O, движется по лучу *l* равномерно со скоростью υ. Траектория точки M называется *спиралью Архимеда*. Приняв точку O за полюс, написать уравнение спирали Архимеда в полярной системе координат. Построить кривую по точкам.

Вариант 11

1. Доказать свойство смешанного произведения векторов: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$

2. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить векторы:

1) $\vec{a}+\vec{b}$;

2) $\vec{a}-\vec{b}$;

3) $\vec{b}-\vec{a}$.

Рассмотреть три случая: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$.

3. В прямоугольной декартовой системе координат даны две точки A(1;2;-3) и B(0;-4;5). Найти на оси Ox такую точку C, чтобы площадь треугольника ABC была равна 1,5 квадратным единицам.

4. Средняя линия четырехугольника ABCD пересекает его диагонали в различных точках P и Q. Доказать, что если $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN}$, где M и N – середина сторон AD и BC, то четырехугольник ABCD – трапеция.

5. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно. (Воспользоваться методом координат).

Вариант 12

1. Доказать свойство смешанного произведения векторов: $\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\alpha\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

2. В аффинном базисе $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ построить векторы $\vec{a}\{0;-3;2\}$, $\vec{b}\left\{2;\frac{1}{2};0\right\}$, $\vec{c}\{-1;2;3\}$.

3. Найти длину высоты BD треугольника ABC, если известны его вершины A(-5;6;-2), B(-1;1;-2), C(-1;-3;1).

4. Отрезок OH является высотой тетраэдра OABC. Выразить вектор $\overrightarrow{OH}$ через векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.

5. *Кривой Штейнера называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R=3r.* Приняв центр O неподвижной окружности за начало прямоугольной декартовой системы координат, а за параметр – угол $\varphi=\angle COP$, где C – центр катящейся окружности, а P – точка положительной полуоси Ox, написать параметрическое уравнение кривой Штейнера. Построить кривую по точкам.

Вариант 13

1. Доказать свойство смешанного произведения векторов: $(\vec{a}+\vec{d})\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}+\vec{d}\vec{b}\vec{c}$

2. Точка C делит отрезок AB в отношении $-\frac{1}{2}$. Найти координаты точки C, если A(-;6;1), B(2;-4;6).

3. Найти углы, образованные диагональю куба с диагоналями граней этого куба, исходящими из той же вершины.

4. Доказать, что если вектора $[\vec{a}\vec{b}]$, $[\vec{b}\vec{c}]$ и $[\vec{c}\vec{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

5. *Овалами Декарта называется геометрическое место точек, расстояния каждой из которых от двух фиксированных точек F и F_1, называемых фокусами умноженные на данные числа, имеют постоянную сумм ($mMF+nMF_1$)=c.* Приняв точку F за полюс, прямую FF_1 за полярную ось, а расстояние FF_1 обозначив через d, написать полярное уравнение овалов. Получить уравнение овалов Декарта в прямоугольной системе координат.

Вариант 14

1. Доказать, что координаты центра тяжести однородного треугольника ABC, где $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ находятся по формулам: $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

2. В прямоугольной декартовой системе координат OXYZ построить точки A(-3;-4;0), B(1;3;-2), C(0;2;-3) и найти длины отрезков AB и AC.

3. Найти проекцию вектора $\vec{a}\{4;-3;2\}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

4. Объем правильной пирамиды с длиной ребра а равен $\frac{1}{6}a^3$. Найти величину плоского угла при вершине пирамиды.

5. *Каппой называется геометрическое место точек касания касательных, проведенных из начала координат к окружности радиуса r, центр которой перемещается по оси абсцисс. (Кривая, сходная по своей форме с греческой буквой "каппа").* Приняв начало прямоугольной декартовой системы координат за полюс, получить полярное уравнение каппы. Построить кривую по точкам. Найти уравнение кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

Вариант 15

1. Доказать свойство смешанного произведения векторов: *Если* $\vec{a}\,||\,\vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$

2. Построить точки $M\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$, $N\left(3;-\frac{\pi}{4}\right)$, $P\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$, $Q(-1;\pi)$ в полярной системе координат. Найти координаты этих точек в прямоугольной системе координат, если ось OX совпадает с полярной осью р.

3. Даны две точки A(10;-1;2) и B(0;1;2). Найти проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями Oy и Oz углы $\beta = 120^0$ и $\gamma = 60^0$, а с осью Ox – тупой угол.

4. Длина диагонали куба равна а. Вычислить расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба. (Введите систему координат).

5. Кривая, называемая *строфоидой,* представляет собой геометрическое место точек, построенных следующим образом: дана фиксированная точка А и фиксированная прямая *l*, причем AC=*a* – перпендикуляр, опущенный из точки А на эту прямую; вокруг точки А вращается луч, на котором откладываются отрезки

BM и BM_1 от точки его пересечения с данной прямой, причем так, что $BM=BM_1=CB$; геометрическое место точек M и M_1 и будет строфоидой. Принимая точку A за полюс, а прямую AC за полярную ось, получить полярное уравнение строфоиды. Построить кривую по точкам. Найти уравнение кривой в декартовой системе координат.

Вариант 16

1. Доказать свойство векторного произведения векторов: $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]=[\vec{a}\vec{c}]+[\vec{b}\vec{c}]$.

2. Точки $M\left(4;-\frac{\pi}{6}\right)$ и $P\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$ даны в полярной системе координат ($O\vec{i}$). Найти длину отрезка MN и площадь треугольника OMN.

3. Векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Доказать, что $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\left[\vec{b}\vec{c}\right]=\left[\vec{c}\vec{a}\right]$.

4. Доказать, что для любых четырех точек пространства A, B, C, D имеет место соотношение $\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right)=0$.

5. Пусть дана окружность с диаметром OA=2*a* и касательная AB к ней. Через точку O проведем луч OB и на нем отложим отрезок OM=BC. Построенная таким образом точка M принадлежит *циссоиде*. Приняв точку O за полюс, получить полярное уравнение циссоиды. Построить кривую по точкам. Найти ее уравнение в прямоугольной декартовой системе координат.

Вариант 17

1. Доказать свойство проекции вектора на ось: $\text{Пр}_l(\vec{a}-\vec{b})=\text{Пр}_l\vec{a}-\text{Пр}_l\vec{b}$.

2. Записать уравнение кривой $\rho=10\sin\varphi$ в прямоугольных координатах

3. Прямая MN пересекает координатные плоскости XOY, YOZ и XOZ соответственно в точках P, Q и R. Найти координаты точек P, Q и R, если M(4;-3;1), N(2;1;-5). Решить задачу, используя формулы деления отрезка в данном отношении.

4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти, какую часть объема данного параллелепипеда составляет объем тетраэдра AB’D’C.

5. Дана окружность радиуса r и на ней точка A. Найти геометрическое место точек, делящих всевозможные хорды, проведенные через точку A, в одном и том же отношении λ.

Вариант 18

1. Доказать свойство проекции вектора на ось: $Пр_l(\alpha\vec{a})=\alpha Пр_l\vec{a}$.

2. Вершины однородной треугольной пластики находятся в точках $M_1(2;-4)$, $M_2(1;0)$, $M_3(3;9)$. Определить координаты центра тяжести этой пластики.

3. Дан четырехугольник ABCD координатами своих вершин A(2;-3;1),
B(-1;1;1), C(-4;5;6), D(2;-3;6). Доказать, что это плоская фигура и найти площадь ABCD.

4. В окружность вписан правильный треугольник ABC. Пусть точка D – произвольная точка окружности. Доказать, что $DA^2+DB^2+DC^2$ есть величина постоянная, не зависящая от выбора точки D.

Указание: Применить метод координат.

5. На окружности радиуса r взята точка O, вокруг которой вращается прямая, пересекающая окружность в переменной точке B. На этой прямой, по обе стороны от точки B, откладываются отрезки $BM_1=BM_2=AB$, где A – другой конец диаметра, проходящего через точку O. Определить линии, описываемые очками M_1 и M_2 при вращении прямой OB. *(Написать уравнение искомого ГМТ в полярной системе координат, приняв точку O за полюс, а диаметр, проходящий через не, - за полярную ось; затем перейти к прямоугольной декартовой системе координат).*

Вариант 19

1. Доказать, что если вектор $\vec{a}$(a_1; a_2; a_3) задан своими координатами в ортонормированном базисе, то его справедлива формула: $|\vec{a}|=\sqrt{\grave{a}_1^2+\grave{a}_2^2+\grave{a}_3^2}$.

2. Вершины четырехугольника находятся в точках A(1;-3;-2), P(8;0;-4), C(4;8;-3), D(-3;5;-1). Доказать, что ABCD – параллелограмм.

3. Определить координаты новых единичных векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

1) $\begin{cases} x = x' - 3y' + z', \\ y = x' + y' + 1, \\ z = x' - 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = -x' + 1, \\ y = -y' + 1, \\ z = z' + 1. \end{cases}$

Выполнить чертежи в системе координат.

4. Найдите геометрическое множество точек плоскости M, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B есть величина постоянная, равная квадрату длины данного отрезка p, то есть $AM^2 - BM^2 = p^2$.

5. На прямой *l* даны три точки A, B, C так, что точка B лежит между A и C. По одну сторону от прямой *l* построены равносторонние треугольники AMB и BNC. Точки P и Q – середины отрезков MC и AN. Каков вид треугольника BPQ?

Вариант 20

1. Доказать, что система линейно независимых векторов не содержит нулевого вектора.

2. Даны вершины треугольника ABC: A(2;-1;4), B(3;2;-6), C(-5;0;2). Найти координаты вектора $\overrightarrow{AM}$, если AM – медиана треугольника. Вычислить длину AM.

3. Найти величину угла α при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что его равные медианы взаимно перпендикулярны.

4. Составить уравнение множества точек, для которых сумма квадратов расстояний до точек A(0;0;0), B(1;0;0), C(0;1;0), D(0;0;1) равна 16. Какую фигуру определяет искомое уравнение?

5. Пусть радиус OA=r начинает равномерно вращаться с угловой скоростью $\frac{\pi}{2\text{Ò}}$ вокруг центра, а прямая, перпендикулярная к AD ($O \in AD$), одновременно начинает равномерно передвигаться от точки A к точке D со скоростью $\frac{r}{T}$. Тогда точка M их пересечения будет описывать *квадратрису*. Исходя из определения, получить полярное уравнение квадратрисы. Найти уравнение кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Атанасян, С.Л. Геометрия 1 [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский. — Электронные текстовые данные — Москва : Лаборатория знаний, 2017. — 334 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/94095. — Загл. с экрана.
2. Атанасян, С.Л. Геометрия 2 [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский, В.Г. Ушаков. — Электронные текстовые данные — Москва : Лаборатория знаний, 2015. — 547 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/66314 . — Загл. с экрана.

Дополнительная литература

1. Добрина, Е. А. Замечательные кривые [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. А. Добрина, О. А. Саввина.- Электронные текстовые данные. - Елец: ЕГУ им. И. А. Бунина, 2005. - 74 с. - Режим доступа: http://www.znanium.com/. — Загл. с экрана.
2. Авилова, Л.В. Практикум и индивидуальные задания по векторной алгебре и аналитической геометрии (типовые расчеты) [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.В. Авилова, В.А. Болотюк, Л.А. Болотюк. — Электронные текстовые данные. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 288 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/37330. — Загл. с экрана.
3. Савелов, А.А. Плоские кривые / А.А. Савелов. - Москва : Изд-во физико-математической литературы, 1960. - 295 с.