471086fad29a3b30e244c728abc3661ab35c9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Кафедра математики, физики и математического моделирования

Л.А.Осипова

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе (в форме индивидуальных заданий)
для обучающихся по направлению подготовки
44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям)
Профиль «Компьютерный дизайн»

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.88:512.64](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.143я73
О 74

Осипова Л.А.
О 74 Линейная алгебра и аналитическая геометрия: методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе (в форме индивидуальных заданий) для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям) (профиль «Компьютерный дизайн») / Л.А.Осипова. Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 58 с.

В работе изложены методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе студентов по темам «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений»: основные теоретические факты по данным темам, примеры решения типовых задач, варианты индивидуальной самостоятельной работы и методические рекомендации по ее решению и оформлению, оценивание работы в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям), профиль «Компьютерный дизайн»

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № 8 от 16.03.2020
Заведующий каф. МФММ
__________ / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики
Протокол № 8 от 18.05.2020
Председатель методической комиссии
ФИМЭ
________________/ Г.Н. Бойченко

УДК [378.147.88:512.64](072) 64
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.143я73
О 45

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям) (профиль «Компьютерный дизайн») и направлены на оказание помощи студентам в выполнении внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий) по темам «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений» дисциплины «Линейная алгебра».

Целью изучения дисциплины «Линейная алгебры» является подготовка к обучению математике, научной работе в области алгебры и учебно-методической работе в общеобразовательных учреждениях.

Линейная алгебра — раздел алгебры, изучающий объекты линейной природы: векторные (или линейные) пространства, линейные отображения, системы линейных уравнений, среди основных инструментов, используемых в линейной алгебре — определители, матрицы, сопряжение.

Определитель матрицы фигурирует не только в линейной алгебре, но и в аналитической геометрии, математическом анализе и других разделах математики. Таким образом, без навыка решения определителей просто не обойтись.

Решение систем линейных алгебраических уравнений — одна из классических задач линейной алгебры, во многом определившая её объекты и методы. Кроме того, линейные алгебраические уравнения и методы их решения играют важную роль во многих прикладных направлениях, в том числе в линейном программировании, эконометрике.

Целью методических рекомендаций является содействие в организации процесса самостоятельной работы студентов в ходе изучения линейных алгебраических уравнений, которая является следствием правильно организованной учебной деятельности на аудиторных занятиях. Для этого преподавателю необходимо целенаправленно формировать у студентов план учебных действий, как некоторую схему освоения учебного предмета.

Основные задачи изучения тем «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений» в вузовском курсе линейной алгебры следующие:

1) сформировать понимание значимости данных тем в будущей профессиональной деятельности учителя математики;
2) ознакомить с основными понятиями и методами линейной алгебры;
3) сформировать представление о применении матриц, определителей и систем линейных алгебраических уравнений для решения задач линейной алгебры, векторной алгебры, математического анализа, а также задач прикладного характера.

В методические рекомендации включено:

1) справочный материал (основные понятия, свойства, теоремы, формулы);
2) примеры решения основных типовых задач;
3) особенности оценивания самостоятельной работы в балльно-рейтинговой системе;
4) варианты внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий);
5) требования к выполнению и оформлению самостоятельной работы;
6) список рекомендуемой литературы.

Теоретические сведения об основных фактах линейной алгебры представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям, выполнения домашних, индивидуальных и контрольных заданий.

Применение методов линейной алгебры иллюстрируется задачами разного уровня сложности. Решения задач подробны, снабжены достаточными пояснениями.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает классические и современные источники; указана литература основная и дополнительная.

Таким образом, данные методические материалы позволяют получить студенту целостное представление о содержании тем «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений» и логике их развертывания, эффективно подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам, успешно выполнить индивидуальную самостоятельную работу. Кроме того, пособие может оказаться полезным при написании курсовых и выпускных квалификационных работ, а также при прохождении производственной (педагогической) практики в старших классах.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Основные определения

Определение. Матрицей размера $m\times n$, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется квадратной.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется единичной матрицей.

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется диагональной матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$\mathbf{C = A + B = B + A.}$$

Операция умножения (деления) матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha\ (A+B) = \alpha A \pm \alpha B}$$

$$\boldsymbol{A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A}$$

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц.

Определение. Матрицы А и В называют согласованными, если число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.

Умножать можно только согласованные матрицы.

Определение: Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\boxed{\mathbf{A \cdot B = C}}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} .$$

Свойства операции умножения матриц.

1) Умножение матриц не коммутативно, т.е. АВ ≠ ВА даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение АВ=ВА выполняется, то такие матрицы называются перестановочными.

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$\mathbf{A \cdot E = E \cdot A = A}$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$\mathbf{A \cdot O = O;\ \ O \cdot A = O},$$

где О – нулевая матрица.

2) Операция умножения матриц ассоциативна, т.е. если определены произведения АВ и (АВ)С, то определены ВС и А(ВС), и выполняется равенство:

$$\mathbf{(AB)C=A(BC).}$$

3) Операция умножения матриц дистрибутивна по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения А(В+С) и (А+В)С, то соответственно:

$$\mathbf{A(B + C) = AB + AC}$$
$$\mathbf{(A + B)C = AC + BC.}$$

4) Если произведение АВ определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB, то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T, \text{ где}$$

индексом T обозначается транспонированная матрица.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц **det (AB) = detA·detB**.

Понятие det (определитель, детерминант) будет рассмотрено позже.

*Определение***.** Матрицу B называют транспонированной матрицей A, а переход от A к B транспонированием, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T,$$

при условии, что определено произведение матриц ABC.

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц A = $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3) = =(21).$$

Пример. Найти произведение матриц A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определители

Определение. Определителем квадратной матрицы A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}},$$

$M_{1к}$ – определитель матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1,2,\ldots,n.}$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Определитель квадратной матрицы второго порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

<u>Пример</u>

$$\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-2) - (-15) \cdot (-3) = -22 - 45 = -67$$

Аналогично определитель квадратной матрицы третьего порядка можно вычислить с помощью формулы:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

<u>Пример:</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 9 + (-7) \cdot (-2) \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - (-7) \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 4 \cdot (-2) \cdot 9 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

Вычисление определителей четвертого порядка и выше основано на свойствах определителя.

Для указанной матрицы А число M_{1k} называется дополнительным минором элемента матрицы a_{1k}. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение. Дополнительный минор произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Свойство1 Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^T;$$

Свойство 2 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 3 Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 4 При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Свойство 5 Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 6 Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 7 Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

Пример:. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det (AB).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2;   det B = 15 – 2 = 13;   det (AB) = det A ·det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 1 & 3\cdot 2 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$,   det (AB) = 7·18 - 8·19 = 126 –

– 152 = -26.

Элементарные преобразования матрицы

Определение Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элемнтам одной строки элементов другой строки;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

5) транспонирование.

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры и алгебраические дополнения

Определение Если в матрице А выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется минором матрицы А. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы А выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Определение Алгебраическим дополнением минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1, \dots, i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.

Обратная матрица

Определение Если существуют квадратные матрицы Х и А одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$\mathbf{XA = AX = E},$$

где Е - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица А, то матрица Х называется обратной к матрице А и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Обратную матрицу A^{-1} можно найти по следующей формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_*^T$, где $|A|$ – определитель матрицы A, A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Пример. Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

det A = 4 - 6 = -2.

$M_{11}=4$; $M_{12}=3$; $M_{21}=2$; $M_{22}=1$

$x_{11}=-2$; $x_{12}=1$; $x_{21}=3/2$; $x_{22}=-1/2$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обратных матриц.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}; \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются перестановочными.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4) - 1(9-1) + 2(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Ранг матрицы

Определение. В матрице порядка m×n минор порядка r называется базисным, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются базисными.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется рангом матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются эквивалентными.

Надо отметить, что равные матрицы и эвивалентные матрицы - понятия совершенно различные.

Теорема. Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \ \mathrm{Rg}A = 2.$$

Пример: Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \ \mathrm{Rg} = 2.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \mathrm{Rg} = 2.$$

Теорема о базисном миноре. В произвольной матрице А каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.

Таким образом, ранг произвольной матрицы А равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Если А- квадратная матрица и detA = 0, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равном нулю.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Определение. Система m линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются упорядоченный набор из n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в верное равенство.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. Если система не имеет ни одного решения, то она называется несовместной.

Определение. Система называется определенной, если она имеет только одно решение и неопределенной, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется основной матрицей системы, а матрица

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ называется расширенной матрицей системы

Определение. Если $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$, то система называется однородной. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

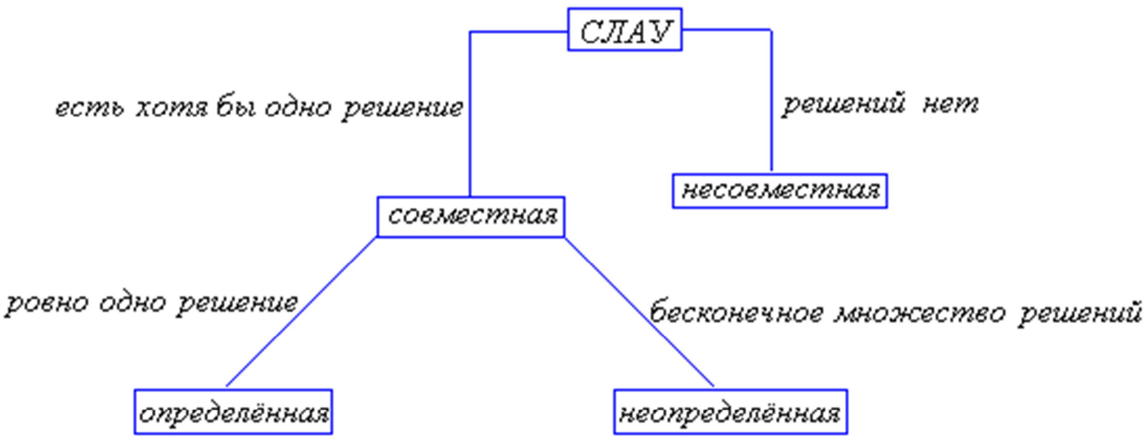

Рисунок1. Схема числа решений СЛАУ

К элементарным преобразованиям систем относятся:

1)Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Теорема (Кронекера-Капелли) Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

<u>Метод. (правило Крамера):</u>

Теорема. Система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$x_i = \Delta_i/\Delta$, где

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u>

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;$$

<u>Пример.</u> Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(\ 32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

<u>Матричный метод решения систем линейных уравнений.</u>

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{12}^{-1} = \frac{1}{30}; \quad a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$$

$$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30}; \quad a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30}; \quad a_{23}^{-1} = \frac{16}{30};$$

$$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{32}^{-1} = \frac{19}{30}; \quad a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: x =1; y = 2; z = 3.

Метод Гаусса.

Метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

и т.д.

Метод Гаусса − это метод перехода от исходной системы линейных уравнений (при помощи эквивалентных преобразований) к системе, которая решается проще, чем исходная система.

Эквивалентными преобразованиями системы линейных уравнений являются:

- перемена местами двух уравнений в системе,
- умножение какого-либо уравнения в системе на ненулевое действительное число,
- прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \quad \text{где } d_{1j} = a_{1j}/a_{11},\ j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \qquad i = 2, 3, \ldots, n; \qquad j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д. пока не закончатся уравнения.

Пример. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 \qquad\quad = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

1. Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

2. По ступенчатой матрице составим ступенчатую систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ \quad x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

3. Находим n-r=4-2=2. Замечаем, что в системе будут две независимые переменные. Пусть ими будут x_3 и x_4. Выразим остальные переменные через независимые.

$x_2 = 5x_4 - 13x_3 - 3,$

$x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1.$

Общее решение системы имеет вид $(5x_4 - 8x_3 - 1;\ 5x_4 - 13x_3 - 3;\ x_3; x_4)$.

Если положить $x_3 = x_4 = 0$, получим частное решение системы (-1; -3; 0; 0).

Фундаментальная система решений

С однородными СЛАУ связано дополнительное понятие – фундаментальная система решений. Дело в том, что если ранг матрицы системы однородной СЛАУ равен r, то такая СЛАУ имеет $n-r$ линейно независимых решений: $\varphi 1, \varphi 2, \ldots, \varphi n-r$. Любая совокупность $n-r$ линейно независимых решений однородной СЛАУ называется *фундаментальной системой (или совокупностью) решений* данной СЛАУ.

Часто вместо словосочетания "фундаментальная система решений" используют аббревиатуру "ФСР". Если решения $\varphi 1, \varphi 2, \ldots, \varphi n-r$ образуют ФСР, и X – матрица переменных данной СЛАУ, то общее решение СЛАУ можно представить в таком виде:

$X=C1\cdot\varphi 1+C2\cdot\varphi 2+\ldots+Cn-r\cdot\varphi n-r$,

где $C1, C2, \ldots, Cn-r$ – произвольные постоянные.

Пример. Найти общее решение и ФСР однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Приведем систему к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса. Для этого записываем матрицу системы (в данном случае, так как система однородная, то ее правые части равны нулю, в этом случае столбец свободных коэффициентов можно не выписывать, так как при любых элементарных преобразованиях в правых частях будут получаться нули):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований приводим данную матрицу к ступенчатому виду. От второй строки отнимаем первую, от третьей - четыре первых, от четвертой - две первых:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

Обнуляем элементы второго столбца, стоящие под главной диагональю, для этого от третьей строки отнимаем три вторых, к четвертой прибавляем вторую:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

От четвертой строки отнимем $\frac{4}{3}$ третьей и третью строку умножим на $\frac{1}{3}$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нулевые строки можно далее не рассматривать, тогда получаем, что

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Далее делаем нули над главной диагональю, для этого от первой строки отнимаем третью, а ко второй строке прибавляем третью:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

то есть получаем систему, соответствующую данной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Или, выразив одни переменные через другие, будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 6x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_2 - \frac{5}{2}x_4 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 3x_4 \end{cases}$$

Здесь x_2, x_4- независимые (или свободные) переменные (это те переменные, через которые мы выражаем остальные переменные), x_1, x_3, x_5- зависимые (связанные) переменные (то есть те, которые выражаются через свободные).

Количество свободных переменных равно разности общего количества переменных n(в рассматриваемом примере $n = 5$, так как система зависит от пяти переменных) и ранга матрицы r(в этом случае получили, что $r = 3$- количество ненулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду): $n - r = 5 - 3 = 2$

Так как ранг матрицы $r = 3$, а количество неизвестных системы $n = 5$, то тогда количество решений в ФСР $n - r = 5 - 3 = 2$(для проверки, это число должно равняться количеству свободных переменных).

Для нахождения ФСР составляем таблицу, количество столбцов которой соответствует количеству неизвестных (то есть для рассматриваемого примера равно 5), а количество строк равно количеству решений ФСР (то есть имеем две строки). В заголовке таблицы выписываются переменные, свободные переменные отмечаются стрелкой. Далее свободным переменным придаются <u>любые</u>, одновременно не равные нулю значений и из зависимости между свободными и связанными переменными находятся значения остальных переменных. Для рассматриваемой задачи эта зависимость имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 6x_4 \\ x_3 = x_2 - \frac{5}{2}x_4 \\ x_5 = 3x_4 \end{cases}$$

Тогда придавая в первом случае, например, независимым переменным значения $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ получаем, что $\begin{cases} x_1 = -1 + 6 \cdot 0 = -1 \\ x_3 = 1 - \frac{5}{2} \cdot 0 = 1 \\ x_5 = 3 \cdot 0 = 0 \end{cases}$. Полученные значения записываем в первую строку таблицы. Аналогично, беря $x_2 = 0$, $x_4 = 2$, будем иметь, что $x_1 = 12, x_3 = -5, x_5 = 6$, что и определяет второе решение ФСР. В итоге получаем следующую таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
– 1	1	1	0	0
12	0	– 5	2	6

Эти две строчки и есть фундаментальным решением заданной однородной СЛАУ.

Частное решение системы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Общее решение является линейной комбинацией частных решений:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

где коэффициенты C_1, C_2не равны нулю одновременно. Или запишем общее решение в таком виде:

$$\begin{cases} x_1 = -C_1 + 12C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = C_1 - 5C_2 \\ x_4 = 2C_2 \\ x_5 = 6C_2 \qquad\qquad C_1, C_2 \neq 0 \end{cases}$$

Придавая константам C_1, C_2определенные значения и подставляя их в общее решение, можно будет находить частные решения однородной СЛАУ.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных заданий

Самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общепрофессиональных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к практическим занятиям, семинарам, сдаче зачетов и экзаменов.

Самостоятельная работа по линейной алгебре направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по линейной алгебре;
- приобретение дополнительных знаний и умений по темам «Матрицы и определители», «Системы линейных алгебраических уравнений»;
- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

В работе представлено 10 вариантов заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними. В каждом из вариантов содержится четыре задания.

Задания построены так, чтобы охватить основное содержание темы. Можно считать, что материал студентами усвоен, если они владеют учебно-познавательными и специальными действиями на уровне применения теории матриц и определителей для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Задания 1. Направлено на проверку умения использовать теорию определителей для их вычисления.

Задания 2, 3 и 4 направлены на проверку умения применять полученные знания о матрицах и об определителях для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Оценивание работы представлено в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание домашней контрольной работы в БРС

№ задания	Характеристика задания	Критерии оценивания	Баллы
1	Вычислить определитель четвертого порядка	Задача решена полностью, выполнены два способа вычисления.	2
		Правильно и обоснованно выполнен только один из способов решения	1
2	Решить систему линейных алгебраических уравнений двумя способами: с помощью обратной матрицы; по правилу Крамера	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения в каждом способе. Получены верные ответы	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ верно представлен только один из способов решения, а второй с вычислительными ошибками.	2
		Выполнен верно только один способ решения.	1
3	Решить систему методом Гаусса	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получен верный ответы	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ имеются вычислительные ошибки.	1
4	Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных алгебраических уравнений	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ	3

		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ имеются вычислительные ошибки.	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно и имеются вычислительные ошибки.	1
ИТОГО			максимум 10

Требования к выполнению и оформлению индивидуальных заданий

1. Самостоятельная работа выполняется в отдельной тетради или на скрепленных тетрадных листах синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя).

2. На обложке тетради должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название раздела дисциплины, номер варианта.

Например: ***Индивидуальная работа 1. Вариант 1 студентки факультета информатики, математики и экономики I курса группы МФ-19 Ивановой Татьяны Александровны***

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием.

4. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы;

г) фиксировать ответ.

5. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями.

6. Самостоятельная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком. Преподаватель имеет право не принимать работу на проверку во время сессии.

Варианты индивидуальных заданий

Задание 1. Вычислить определитель 4-го порядка двумя способами (разложением по элементам первой строки, понижением порядка определителя)

Задание 2. Решить систему линейных алгебраических уравнений двумя способами:

1) с помощью обратной матрицы;

2) по правилу Крамера;

Задание 3. Решить систему методом Гаусса.

Задание 4. Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Вариант 1

1. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -10\,, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = -29, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -31\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 3\,, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 14x_4 - x_5 = -8\,, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 6\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 0\,, \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0\,, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 0\,, \\ 4x_1 + 15x_2 + 11x_3 - 8x_4 = 0\,. \end{cases}$

Вариант 2

1. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -9\,, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -7\,, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -11\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4\,, \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 1\,, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - 9x_3 - 7x_4 = 0\,, \\ x_1 + x_2 - 13x_3 - 6x_4 = 0\,, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0\,. \end{cases}$

Вариант 3

1. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2\,, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -1\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -3\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -7\,, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -3\,, \\ -x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 2\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 0\,, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0\,, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0\,. \end{cases}$

Вариант 4

1. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1\,, \\ 11x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 2\,, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1\,, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2\,, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0\,, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0\,, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0\,, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0\,. \end{cases}$

Вариант 5

1. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -9 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 5 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 41\,, \\ 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 7\,, \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 32\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2\,, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1\,, \\ -x_1 - 6x_2 - 3x_3 - x_4 = -2\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0\,, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0\,, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0\,. \end{cases}$

Вариант 6

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

2. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 5\,, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -9\,, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -13\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 6\,, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 12\,, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 5\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0\,, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\,, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0\,, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0\,. \end{cases}$

Вариант 7

1. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1\,, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -11\,, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -5\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 2\,, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2\,, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0\,, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0\,, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0\,, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0\,. \end{cases}$

Вариант 8

1. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{cases} 125x_1 + 5x_2 + 25x_3 = 1\,, \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7\,, \\ 27x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 5\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 5\,, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3\,, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 7\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0\,, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0\,, \\ -2x_1 - x_2 - 10x_3 - 5x_4 = 0\,, \\ 6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 9x_4 = 0\,. \end{cases}$

Вариант 9

1. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = -31\,, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -29\,, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 10\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1\,, \\ 6x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 9x_4 = -1\,, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 + 13x_4 = -3\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 - x_4 = 0\,, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 0\,, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 0\,, \\ 4x_1 + 8x_2 + 11x_3 + 4x_4 = 0\,. \end{cases}$

Вариант 10

1. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4\,, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 5\,, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1\,, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1\,, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 1\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\,, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0\,, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 0\,, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 0\,. \end{cases}$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная учебная литература

1. Бурмистрова Е.Б. Линейная алгебра [Электронный ресурс]:учебник и практикум для академического бакалавриата / Е.Б.Бурмистрова, С.Г.Лобанов. - Электронные текстовые данные. - Москва : Юрайт, 2017. - 421 с. - Режим доступа: http://biblio-online.ru/book/6A5A6F52-FA19-4717-80BF-2833187BA668
2. Ильин В.А. Линейная алгебра [Текст] : учебник.- Издание 6-е, стереотипное. – Москва: Физматлит, 2007.-280 с.
3. Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры [Текст] : учебник / А. И. Мальцев. - Изд. 5-е ; стер. - Москва; Санкт-Петербург Краснодар : Лань, 2009. - 470 с.

4. Рудык Б. М. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б. М. Рудык. - Электронные текстовые данные. - Москва : НИЦ Инфра-М, 2013. - 318 с. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=363158
5. Постников, М.М. Линейная алгебра. [Электронный ресурс] : учебное пособие / М. М. Постников. — Электронные текстовые данные. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 400 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/319

б) дополнительная литература

1. Ляпин, Е.С. Курс высшей алгебры. [Электронный ресурс] : учебник / Е. С. Ляпин — Электронные текстовые данные. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 368 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/246

2. Окунев, Л.Я. Высшая алгебра. [Электронный ресурс] : учебник / Л. Я. Окунев. — Электронные текстовые данные. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 336 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/289