Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кемеровский государственный университет» Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики

Кафедра математики, физики и математического моделирования

В.Б. Гридчина

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий) для обучающихся по направлению подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, профиль Безопасность технологических процессов и производств

Новокузнецк

2020

Гридчина В.Б.

Высшая математика: Методические рекомендации по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий) по направлению подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, профиль Безопасность технологических процессов и производств / В.Б. Гридчина - Новокузнецк ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2020. – 33 с. - Текст: непосредственный.

В методические рекомендации включены: основные теоретические сведения по разделам: "Матрицы и определители" и "Системы линейных уравнений" с примерами решения типовых задач; 20 вариантов индивидуальных заданий; список основной и дополнительной литературы.

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 3 от 22.10.2020

Заведующий каф. МФММ
______ / Е.В.Решетникова

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 20.03.01 Техносферная безопасность (профиль Безопасность технологических процессов и производств) и направлены на оказание помощи студентам по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий) по темам: "Матрицы и определители" и "Системы линейных уравнений" дисциплины "Высшая математика".

Основной целью данных методических рекомендаций является методическое обеспечение реализации федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по указанным направлениям в части освоения студентами дисциплины "Высшая математика" в соответствии с рабочей программой.

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы являются одной из форм проверки и оценки усвоенных студентом знаний по разделам: "Матрицы и определители" и "Системы линейных уравнений", а так же средством самоконтроля. Выполнять их следует в соответствии с графиком учебного процесса и руководствоваться сроками сдачи.

В методические рекомендации включены: основные теоретические сведения по разделам: "Матрицы и определители" и "Системы линейных уравнений" с примерами решения типовых задач; 20 вариантов индивидуальных заданий; список основной и дополнительной литературы.

Данные методические материалы позволяют преподавателю качественно организовать работу на практических занятиях, а студенту подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам и успешно выполнить индивидуальную самостоятельную работу.

1. Матрицы и определители

1.1. Основные сведения о матрицах

<u>Определение.</u> Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Размерность такой матрицы обозначается m×n.

Если число строк матрицы равно числу столбцов (m=n), то матрица называется квадратной.

Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется единичной матрицей.

Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется диагональной матрицей.

1.2. Операции над матрицами

1. Сложение матриц

Суммой матриц A и B называется матрица C, каждый элемент которой находится по формуле: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Можно складывать только матрицы одинаковой размерности.

2. Умножение матрицы на число

Операция умножения матрицы на действительное число сводится к умножению каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Умножения матриц

Произведением матрицы А размерности m×n и матрицы В размерности n×p называется матрица С размерности m×p, каждый элемент которой находится по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \ .$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, число столбцов первой из которых равно числу строк второй.

Матрицу A^T называют транспонированной к матрице А, если элементы каждой строки матрицы А записать в том же порядке в столбцы матрицы A^T.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

<u>Пример 1</u>

Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 2x + 5E, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение:</u>

$f(A) = A^2 - 2A + 5E,$

Найдем $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 & 7 \\ 13 & 11 & 12 \\ 7 & -12 & 12 \end{pmatrix}$;

$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

$5E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$;

$$f(A) = \begin{pmatrix} 6 & -13 & 7 \\ 13 & 11 & 12 \\ 7 & -12 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 1 \\ 9 & 8 & 10 \\ 1 & -10 & 13 \end{pmatrix}.$$

1.3. Определители

Определение. Определителем квадратной матрицы A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \quad \text{где}$$

$M_{1к}$ – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

1.4. Свойства определителей

1. det A = det A^T;
2. det (AB) = detA·detB

3. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

4. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

5. Столбцы (строки) матрицы называются линейно зависимыми, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

6. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю.

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число.

Разложение определителя по элементам ряда.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, получающийся из данного вычеркиванием *i*-той строки и *j*-того столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Теорема Лапласа. Определитель равен сумме произведений элементов какого-либо ряда на их алгебраические дополнения.

Пример 2

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение:

Используя свойства определителя, накопим нули в первом столбце:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 11 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

По теореме Лапласа получим: $\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 11 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -5 \\ -1 & 5 & -5 \\ 11 & -5 & -5 \end{vmatrix} = -240$

1.5. Обратная матрица

Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Для нахождении обратной матрицы применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji}- минор элемента a_{ji} матрицы A.

Пример 3

Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

Решение:

det A = 4 - 6 = -2.

$M_{11}=4$; $M_{12}= 3$; $M_{21}= 2$; $M_{22}=1$

$x_{11}= -2$; $x_{12}= 1$; $x_{21}= 3/2$; $x_{22}= -1/2$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Пример 4

Решить матричное уравнение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение примет вид: $A \cdot X = B$. Откуда $X = A^{-1} \cdot B$.

Так как обратная матрица A^{-1} найдена в примере 3, то

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & -4 & -1 \\ -2 & 7/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Системы линейных уравнений

2.1. Основные понятия

Система n уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. Если система не имеет ни одного решения, то она называется несовместной.

Система называется определенной, если она имеет только одно решение и неопределенной, если более одного.

Если $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$, то система называется однородной. Однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

2.2. Метод обратной матрицы

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

<u>Пример 5</u>

Решить систему матричным способом.

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 6, \\ 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 20, \\ 3X_1 - 2X_2 - 5X_3 = 6. \end{cases}$$

<u>Решение:</u>

Запишем систему уравнений в матричной форме: $A \times X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Матрица-решение имеет вид: $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем матрицу A^{-1} по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения, соответствующие элементам a_{ij}.

Вычислим определитель матрицы А. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0.$

Найдем алгебраические дополнения A_{ij} матрицы А.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 + 12) = -2.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -(10 + 6) = -16.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 9 = -14.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 6) = -4.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1.$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 6) = 10.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7.$$

Тогда A^{-1} примет вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{58} \cdot \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{58} \cdot \begin{pmatrix} 23 & 16 & 1 \\ 2 & 14 & -10 \\ 13 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу X:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{58} \cdot \begin{pmatrix} 23 & 16 & 1 \\ 2 & 14 & -10 \\ 13 & 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{58} \cdot \begin{pmatrix} 23\cdot 6+16\cdot 20+1\cdot 6 \\ 2\cdot 6+14\cdot 20-10\cdot 6 \\ 13\cdot 6+4\cdot 20-7\cdot 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{58} \cdot \begin{pmatrix} 138+320+6 \\ 12+280-60 \\ 78+80-42 \end{pmatrix} = \frac{1}{58} \cdot \begin{pmatrix} 464 \\ 232 \\ 116 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $X_1 = 8$, $X_2 = 4$, $X_3 = 2$.

Ответ. $X_1 = 8$, $X_2 = 4$, $X_3 = 2$.

2.3. Метод Крамера

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Теорема. Система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример 6

Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 6, \\ 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 20, \\ 3X_1 - 2X_2 - 5X_3 = 6. \end{cases}$$

Решение:

Вычислим основной определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot(-5) + (-2)\cdot(-4)\cdot3 + 3\cdot2\cdot(-2) - 3\cdot3\cdot3 - 1\cdot(-4)\cdot(-2) - (-2)\cdot2\cdot(-5) =$$

$$= -15 + 24 - 12 - 27 - 8 - 20 = -58 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение.

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 6\cdot3\cdot(-5) + (-2)\cdot(-4)\cdot6 + 3\cdot20\cdot(-2) - 3\cdot3\cdot6 - 6\cdot(-4)\cdot(-2) -$$

$$- (-2)\cdot20\cdot(-5) = -90 + 48 - 120 - 54 - 48 - 200 = -464$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot20\cdot(-5) + 6\cdot(-4)\cdot3 + 3\cdot2\cdot6 - 3\cdot20\cdot3 - 1\cdot(-4)\cdot6 - 6\cdot2\cdot(-5) =$$

$$= -100 - 72 + 36 - 180 + 24 + 60 = -232$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot6 + (-2)\cdot20\cdot3 + 6\cdot2\cdot(-2) - 6\cdot3\cdot3 - 1\cdot20\cdot(-2) - (-2)\cdot2\cdot6 =$$

$$= 18 - 120 - 24 - 54 + 40 + 24 = -116$$

Находим решение системы, используя формулы Крамера:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-464}{-58} = 8, \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-232}{-58} = 4, \quad X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-116}{-58} = 2.$$

Таким образом, решение системы: $X_1 = 8$, $X_2 = 4$, $X_3 = 2$.

2.4. Метод Гаусса

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения
2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \quad \text{где } d_{1j} = a_{1j}/a_{11},\ j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \qquad i = 2, 3, \ldots, n; \qquad j = 2, 3, \ldots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Пример 7

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 6, \\ 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 20, \\ 3X_1 - 2X_2 - 5X_3 = 6. \end{cases}$$

Решение:

Все элементарные преобразования, связанные с последовательным исключением будем проводить с расширенной матрицей системы:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\2&3&-4&20\\3&-2&-5&6\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ II+I\cdot(-2)\\ III+I\cdot(-3)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\0&7&-10&8\\0&4&-14&-12\end{array}\right)II\cdot\frac{1}{7}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\0&1&-\frac{10}{7}&\frac{8}{7}\\0&4&-14&-12\end{array}\right)III+I\cdot(-4)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\0&1&-\frac{10}{7}&\frac{8}{7}\\0&0&-\frac{58}{7}&-\frac{116}{7}\end{array}\right)III\cdot\left(-\frac{7}{58}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\0&1&-\frac{10}{7}&\frac{8}{7}\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}X_1-2X_2+3X_3=6,\\ X_2-\frac{10}{7}X_3=\frac{8}{7},\\ X_3=2.\end{cases}\qquad\begin{cases}X_1=2X_2-3X_3+6,\\ X_2=\frac{10}{7}X_3+\frac{8}{7},\\ X_3=2.\end{cases}\qquad\begin{cases}X_1=2X_2-3X_3+6,\\ X_2=\frac{10}{7}\cdot2+\frac{8}{7}=\frac{28}{7}=4,\\ X_3=2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}X_1=2\cdot4-3\cdot2+6=8,\\ X_2=4,\\ X_3=2.\end{cases}$$

Таким образом, $X_1=8$, $X_2=4$, $X_3=2$.

3. Внеаудиторная самостоятельная работа (в форме индивидуальных заданий) по темам: «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений»

3.1. Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5E, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 10 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5E, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \\ -4 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5E, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -3. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5E, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = -1, \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 = -4, \\ 4X_1 + X_2 + 4X_3 = -2. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы A:

$$f(x) = x^2 - 5x + 4E, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 31, \\ 5X_1 + X_2 + 2X_3 = 20, \\ 3X_1 - X_2 + X_3 = 9. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - x + 3E, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера;

б) методом Гаусса;

в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 - X_3 = 4, \\ 3X_1 + 4X_2 - 2X_3 = 11, \\ 3X_1 - 2X_2 + 4X_3 = 11. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3E, \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 1, \\ 8X_1 + 3X_2 - 6X_3 = 2, \\ 4X_1 + X_2 - 3X_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ -4 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3E, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 7X_1 - 5X_2 = 31, \\ 4X_1 + 11X_3 = -43, \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = -20. \end{cases}$$

Вариант 9

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ -9 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3E, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4X_2 + 2X_3 = 8, \\ 2X_1 - X_2 - 3X_3 = -4, \\ X_1 + 5X_2 + X_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 10

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ -4 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы A:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3E, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} X_1 - 4X_2 - 2X_3 = -3, \\ 3X_1 + X_2 + X_3 = 5, \\ 3X_1 - 5X_2 - 6X_3 = -9. \end{cases}$$

Вариант 11

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 9 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы A:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5E, \qquad A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Вариант 12

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 7 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5E, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 7, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$$

Вариант 13

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ -4 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы A:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5E, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -1 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -2. \end{cases}$$

Вариант 14

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 2x + 5E, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = 3, \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 = 4, \\ 4X_1 + X_2 + 4X_3 = 8. \end{cases}$$

Вариант 15

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 5x + 4E, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 5, \\ 5X_1 + X_2 + 2X_3 = 7, \\ 3X_1 - X_2 + X_3 = 4. \end{cases}$$

Вариант 16

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - x + 3E, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 - X_3 = 1, \\ 3X_1 + 4X_2 - 2X_3 = 1, \\ 3X_1 - 2X_2 + 4X_3 = 7. \end{cases}$$

Вариант 17

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -3 \\ -3 & 8 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3E, \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ 8X_1 + 3X_2 - 6X_3 = 2, \\ 4X_1 + X_2 - 3X_3 = 1. \end{cases}$$

Вариант 18

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ -4 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3E, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 7X_1 - 5X_2 = 7, \\ 4X_1 + 11X_3 = 4, \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 6. \end{cases}$$

Вариант 19

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 & -5 \\ -4 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы А:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3E, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -7 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4X_2 + 2X_3 = 6, \\ 2X_1 - X_2 - 3X_3 = -1, \\ X_1 + 5X_2 + X_3 = 2. \end{cases}$$

Вариант 20

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ -6 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти значение многочлена *f(x)* от матрицы A:

$$f(x) = x^2 - 5x + 3E, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 8 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера;
б) методом Гаусса;
в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} X_1 - 4X_2 - 2X_3 = -1, \\ 3X_1 + X_2 + X_3 = 4, \\ 3X_1 - 5X_2 - 6X_3 = -3. \end{cases}$$

4. Рекомендуемая литература:

Основная учебная литература

1. Рудык, Б.М. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебн. пособие / Б.М. Рудык – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2013. – 318 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=363158

Дополнительная учебная литература

1. Шершнев, В.Г. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии [Электронный ресурс]: учебн. пособие / В.Г. Шершнев – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2014. – 168 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=318084

2. Индивидуальные задания по высшей математике: [Электронный ресурс]: учебн. пособие. В 4 ч. Ч. 1 Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А.П. Рябушко – 7-е изд. - Электрон. текстовые дан. – Минск : Выш. шк., 2013. – 304 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=508859

3. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум [Электронный ресурс]: учебн. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2015. – 352 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=476097

4. Ячменѐв, Л. Т. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебник / Л. Т. Ячменѐв. - Электронные текстовые данные. - Москва : РИОР : Инфра-М, 2013. – 752 с. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=344777

5. Зимина, О. В. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / О. В. Зимина, А. И. Кириллов, Т. А. Сальникова ; под ред. А. И. Кириллова. — Электронные текстовые данные. – Москва : Физматлит, 2006. – 368 с. - Режим

доступа: https://e.lanbook.com/book/59344