Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е. С. Вячкин

Численные методы

*Методические указания к выполнению лабораторных работ
для обучающихся по направлениям подготовки
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем,
профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий»*

Новокузнецк

2020

Вячкин Е. С.
Численные методы: методические указания к выполнению лабораторных работ для обучающихся по направлениям подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий» / Е. С. Вячкин; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 38 с.

Методические указания содержат разработки восьми лабораторных работ раздела «Численные методы решения задач математического анализа» с подробным решением демонстрационных примеров, задания для решения на занятиях, указания к их выполнению; список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения направления 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий»

Рекомендовано
на заседании кафедры
математики, физики и математического
моделирования
22 октября 2020г.
Заведующий кафедрой

_______ / Е.В. Решетникова

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к выполнению лабораторных работ предназначены для студентов очной формы обучения направлений 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий». Дисциплина «Численные методы» включена в образовательную программу 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий» и входит в вариативную часть дисциплин.

Методические указания содержат сведения о восьми лабораторных работах раздела «Численные методы решения задач математического анализа» курса «Вычислительная математика», каждая из которых включает подробно описанное решение демонстрационного примера и задания для решения различного уровня сложности. В конце методических указаний приведен список рекомендуемой к изучению литературы.

Выполнение лабораторных работ начинается с изучения цели работы, затем необходимо подробно изучить предложенный демонстрационный пример, после чего можно приступать к решению предложенных задач.

1. Правила приближенных вычислений и оценка погрешностей при вычислении

Цель работы: используя переменные ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e***, данные с верными цифрами, вычислить значения функции ***S***, ***U***, ***V***, ***W***, ***P*** и их абсолютную и относительную погрешности. Результаты вычислений ***S***, ***U***, ***V***, ***W***, ***P*** округлить, оставив верные и одну сомнительную цифры.

ПРИМЕР. Дано: a=13,48; b=121,51; c=3,415.

Все цифры исходных данных верные. Требуется вычислить $U = ac^2 + c/\sqrt{b}$. Результаты округлить, оставив верные и одну сомнительную цифры.

Вычисляем абсолютные и относительные погрешности исходных данных. Абсолютную погрешность определяем исходя из того, что все цифры исходных данных верные. Относительную погрешность находим по формуле $\delta a = \frac{\Delta a}{|A|}$, где Δa - абсолютная погрешность приближенного числа *a*, *A* - точное число. Результаты вычислений представим в виде таблицы 1.1.

Таблица 1.1

Исходные данные	абсолютная погрешность Δ	относительная погрешность δ
13,48	0,005	0,00038
121,51	0,005	0,000042
3,415	0,0005	0,00015

Значение U вычисляется как сумма двух значений $U_1 = ac^2$ и $U_{21} = c/\sqrt{b}$.

Тогда $\Delta_U = \Delta_{U_1} + \Delta_{U_2}$, а $\delta_U = \frac{\Delta U}{|U|}$.

Вычислим Δ_{U_1} и Δ_{U_2}:

1. $U_1 = ac^2 = 157{,}2067$; $\delta_{U_1} = \delta_a + \delta_{c^2} = \delta_a + 2\delta_c = 0{,}00068$;

$$\Delta_{U_1} = \delta_{U_1}|U_1| = 0{,}1069.$$

2. $U_2 = c/\sqrt{b} = 1{,}2229$;

$$\delta_{U_2} = \delta_c + \delta_{\sqrt{b}} = \delta_c + \tfrac{1}{2}\delta_b = 0{,}00041;$$

$$\Delta_{U_2} = \delta_{U_2}|U_2| = 0{,}0005.$$

3. $U = U_1 + U_2 = 158{,}4296$;

$$\Delta_U = \Delta_{U_1} + \Delta_{U_2} = 0{,}1074 \approx 0{,}11;$$

$$\delta_U = 0{,}00068.$$

Так как $\Delta_U = 0{,}11 < 0{,}5$, то значение *U* содержит три верные значащие цифры (1, 5, 8), остальные цифры являются сомнительными. Округлим значение *U*, оставив только верные и одну сомнительную цифры. Данные представим в виде таблицы 1.2.

Таблица 1.2

Значение функции	Δ	δ
$U \approx 158{,}4296 \approx 158{,}4$	0,11	0,00068

Отчет по самостоятельной работе должен содержать:

1. Таблицу исходных данных, их абсолютных и относительных погрешностей (табл. 1.3);
2. Заданные функции *S*, *U*, *V*, *W*, *P* и формулы по которым вычисляются их абсолютные и относительные погрешности;
3. Таблицу значений функций S *S*, *U*, *V*, *W*, *P* и их абсолютных и относительных погрешностей (табл. 1.4).

Таблица 1.3

Исходные данные	Δ	δ
$a =$		
$b =$		
$c =$		
$d =$		
$e =$		

Таблица 1.4

Значение функции	Δ	δ
$S \approx$ число до округления $\approx$ $\approx$ число после округления		
$U \approx \ldots \approx \ldots$		
$V \approx \ldots \approx \ldots$		
$W \approx \ldots \approx \ldots$		
$P \approx \ldots \approx \ldots$		

Теоретическая часть

Определение. Абсолютной погрешностью Δa приближенного числа a называют абсолютную величину разности между точным числом A и его приближенным значением a:

$$\Delta a = |A - a|.$$

Если точное число A не известно, тогда вводится понятие предельной абсолютной погрешности Δ_a, т.е. границы (оценки) абсолютной погрешности

$$|A - a| \le \Delta_a .$$

Определение. Относительной погрешностью δa приближенного числа a называют отношение абсолютной погрешности Δa к модулю точного числа A ($A \neq 0$):

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|A|} .$$

Замечание. На практике $A \approx a$, поэтому $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|}$.

Определение. Предельная относительная погрешность δ_a, т.е. границы (оценки) относительной погрешности, имеет вид:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|}, \text{ причем } \frac{\Delta a}{|A|} \le \delta_a .$$

Оценка погрешностей при вычислении

1. Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел.

Пусть $u = \pm x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_n$. Тогда $\Delta_{\Sigma(\pm x_i)} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i}$,

т.е. при сложении и вычитании приближенных чисел их предельные абсолютные погрешности складываются.

2. Относительная погрешность суммы n положительных приближенных чисел не превосходит максимальной относительной погрешности слагаемых.

Пусть $u = x_1 + x_2 + ... + x_n$, причем границы относительных погрешностей приближенных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ равны $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ соответственно.

Тогда $\delta(x_1 + x_2 + ... + x_n) \le \delta^*$, где $\delta^* = \max_i \delta_{x_i}$.

3. Относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел.

Пусть $u = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$, где можно считать все сомножители положительными.

Тогда $\delta_{\Pi x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \cdot \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$.

4. При умножении и делении приближенных чисел их предельные относительные погрешности складываются.

   Пусть $u = \dfrac{x_1}{x_2}$, где $x_1, x_2 > 0$, тогда $\delta_{x_1/x_2} = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}$.

5. При умножении приближенного числа x на точный множитель k предельная относительная погрешность не изменяется, а предельная абсолютная погрешность увеличивается в $|k|$ раз:

$$u = kx, \qquad \delta_u = \delta_x \qquad \Delta_u = |k| \Delta_x .$$

6. Предельная относительная погрешность m-й степени числа в m раз больше предельной относительной погрешности самого числа

$$u = x^m, \qquad \delta_u = m\delta_x .$$

Варианты лабораторных работ

Вариант	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***Вариант***
1	3,418	7,241	18,315	32,01	0,4721	1
2	2,4154	1,3127	41,15	5,180	21,135	2
3	15,487	10,401	12,318	1,4158	7,0013	3
4	2,4172	1,3120	9,1318	18,145	21,418	4
5	17,425	10,815	11,211	2,4150	7,1327	5
6	7,4138	1,1310	9,1315	17,415	25,135	6
7	17,48	10,120	41,01	1,349	8,4251	7
8	2,817	9,3156	4,442	17,480	13,55	8
9	13,85	25,140	31,15	7,8153	9,314	9
10	7,3148	1,4145	6,317	17,18	21,10	10
11	21,18	35,48	10,10	1,418	5,4012	11
12	17,485	10,817	2,4831	25,40	3,25	12
13	3,40	7,823	9,312	0,9192	17,42	13
14	13,481	15,40	27,31	2,3155	1,2001	14
15	7,0809	3,2540	9,35	17,011	25,148	15
16	3,0714	7,4142	1,32	14,810	21,799	16
17	14,418	10,875	13,301	1,41	9,1310	17
18	3,7118	9,340	8,75	17,455	25,785	18
19	0,4152	1,34	7,2530	12,485	25,327	19
20	7,42	3,2521	2,0045	21,348	14,500	20
21	3,4180	2,3754	9,00	18,015	21,524	21
22	17,418	21,310	35,001	7,35	3,4849	22
23	9,1240	1,3504	2,3104	13,275	21,32	23
24	18,348	27,218	40,10	4,1841	9,1945	24
25	7,415	1,3495	8,1920	17,485	25,371	25
26	12,237	27,790	30,14	7,1318	9,9571	26
27	17,835	21,113	11,004	3,140	1,0204	27
28	5,142	4,3560	12,27	7,1213	0,9991	28
29	2,5472	0,248	24,513	1,12	16,2510	29
30	0,2456	7,4182	3,651	13,84	12,50	30

Вариант	***S***	***U***	***V***	***W***	***P***	***Вариант***
1	$2a-3b+4c$	ade	b/d	$(a^3b^2c^2e)/d^2$	$a^3b+dc+e$	1
2	$3a+5b-2d$	abe	a/d	$(a^2b^3d^2c)/e^2$	$ab^3+bc+ed$	2
3	$4a+5b-2c$	ace	b/e	$(ab^2d^3)/\sqrt{ce}$	$ad-e^2+bc$	3
4	$2a+10b-c$	bce	c/e	$(b^4c^2e)/(a^3d)$	a^2d+b^3e-c	4
5	$2c-a+7b$	abd	c/d	$(ab^2e^2)/(cd^3)$	ad^2-b+ce	5
6	$4c-5b+8a$	abe	d/c	$(a^3b^2c^2)/(de)$	$ad+b^3e+c$	6
7	$2c+5b-2a$	ade	c/e	$(ab^2e^2)/(dc)$	$ae+d^2c+b$	7
8	$5b+4c-2a$	ace	d/a	$(a^3b^2d)/(c^3e)$	$ad+be+c^2$	8
9	$5b-2c+a$	ade	a/e	$(a^2d^2b)/(ce^3)$	ad^2+bc+e	9
10	$10b+3c-2a$	ace	e/a	$(ab^3e)/(c^3d)$	b^3e+a^2+cd	10

11	$2b+2a+5c$	ade	b/e	$(abd^3)/(ce)$	bd^2+ac-e	11
12	$2a-d+3b$	ace	d/b	$(\sqrt{a}\,bc^2)/(de^2)$	ac^2-e^2+bd	12
13	$10a-c+4b$	ade	c/a	$(a^2ec)/(b^2d^3)$	$ac+e-b^2d$	13
14	$5a+b-2c$	adb	b/d	$(ad^2b)/(e^3c)$	$ab+d^2c-e^4$	14
15	$3a+b-2c$	ace	d/c	$(a^2b^3d)/(ce)$	$ac-d^2+bc$	15
16	$10a-5c+3b$	acd	d/b	$(a^2c^2e)/(b^2d)$	$c^2e+bd-a^2$	16
17	$5a-b+3c$	ace	b/e	$(ad^3e^2)/(bc)$	$ae+b^2+cd$	17
18	$10a+5b-c$	bcd	d/b	$(a^2be)/(c^2d)$	$a^2c+bd+e$	18
19	$7a+8b-c$	acd	d/c	$(ab^2e)/(c^2d)$	ac^2-bd+e	19
20	$2c+7b-a$	acd	d/a	$(b^2c^3e)/(a^2d)$	$a^2c+be-d$	20
21	$7a+4c-3b$	ade	e/c	$(a^3ce)/(b^2d)$	a^2d+e+b^2c	21
22	$2a+3b-c$	abd	c/a	$(ace^2)/(d^3b)$	ae^3+d^2+bc	22
23	$3b+9c-a$	ade	e/a	$(ab^2d)/(c^2e)$	$ad+b^2e+c^3$	23
24	$2a+4b-c$	abc	b/c	$(acd^2)/(be^2)$	$ae+d^2+bc$	24
25	$5a+10b-c$	ace	e/c	$(a^2ec)/(b^3d)$	a^2c+b^3e-d	25
26	$6a+2b+c$	abc	c/b	$(a^2e)/(bcd^2)$	ad^2+be-c	26
27	$3c-2b+c$	dec	b/c	$(e^3ac)/(b^2\sqrt{d})$	d^2a+be^3+c	27
28	$6a-5b-d$	acd	a/b	$(ab^3c)/(d^2e)$	$ab+c^2d-e^3$	28
29	$4a+5b+d$	bcd	b/d	$(a^2b\sqrt{e})/(c^3d)$	a^2d-b^2c+e	29
30	$3a-2b+c$	ade	d/e	$(ab^2c^3)/(de)$	ab^2-dc+e	30

2. Обработка результатов наблюдений методом наименьших квадратов

Цель работы: используя метод наименьших квадратов, найти многочлены первой и второй степеней, аппроксимирующие функцию, заданную таблично. Построить заданные точки и аппроксимирующие кривые.

ПРИМЕР. Функция *f(x)* задана таблично

Таблица 2.1

i	0	1	2	3	4	5	6
x	-3	-1	0	1	2	3	4
y	2,9	1,0	-0,2	-1,5	-0,4	0,5	2,0

Для аппроксимации заданной таблично функции *f(x)* многочленом первой степени $F(x) = P_1(x) = a_0 + a_1 x$, необходимо составить систему следующего вида

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i, \\ a_0\sum_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

и решить ее относительно a_0, a_1.

Для аппроксимации заданной таблично функции *f(x)* многочленом второй степени $F(x) = P_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, необходимо составить следующую систему

$$\begin{cases} b_0(n+1) + b_1\sum_{i=0}^{n} x_i + b_2\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i, \\ b_0\sum_{i=0}^{n} x_i + b_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + b_2\sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ b_0\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + b_1\sum_{i=0}^{n} x_i^3 + b_2\sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

и решить ее относительно b_0, b_1, b_2.

Вычисление коэффициентов приведенных систем располагаем в виде таблицы 2.2.

Таблица 2.2

i	x_i	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	y_i	$x_i\,y_i$	$x_{i2}y_i$
0	-3	9	-27	81	2,9	-8,7	26,1
1	-1	1	-1	1	1,0	-1,0	1
2	0	0	0	0	-0,2	0	0
3	1	1	1	1	-1,5	-1,5	-1,5
4	2	4	8	16	-0,4	-0,8	-1,6
5	3	9	27	81	0,5	1,5	4,5
6	4	16	64	256	2,0	8,0	32,0
Σ	6	40	72	436	4,3	-2,5	60,5

Для нахождения коэффициентов a_0, a_1 многочлена первой степени, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 7a_0 + 6a_1 = 4.3 \\ 6a_0 + 40a_1 = -2.5 \end{cases}.$$

Отсюда $a_0 \approx 0{,}766$; $a_1 \approx -0{,}177$. Следовательно, $P_1(x) = 0{,}766 - 0{,}177x$.

Для нахождения коэффициентов b_0, b_1, b_2 многочлена второй степени, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 7b_0 + 6b_1 + 40b_2 = 4.3 \\ 6b_0 + 40b_1 + 72b_2 = -2.5 \\ 40b_0 + 72b_1 + 436b_2 = 60{,}5 \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим: $b_0 \approx -0{,}458$, $b_1 \approx -0{,}454$, $b_2 \approx 0{,}256$.

Следовательно, $P_2(x) = -0{,}458 - 0{,}454x + 0{,}256x^2$.

Графики полученных многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$, а также заданные табличные точки, представлены графически на рисунке 1.

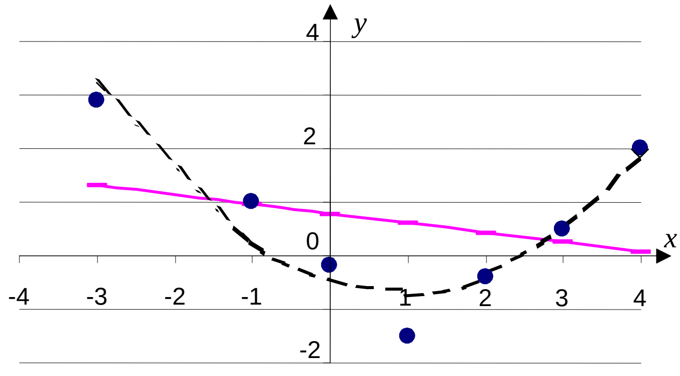

Рисунок 1. Аппроксимация результатов наблюдений

● - результаты наблюдений;

—— аппроксимация многочленом первого порядка;

_ _ _ аппроксимация многочленом второго порядка.

Отчет по самостоятельной работе должен содержать:

1. Таблицу исходных данных 2.1;
2. Таблицу расчета коэффициентов 2.2 для систем;
3. Системы линейных уравнений для расчета параметров многочленов первой и второй степеней, решение этих систем;
4. Запись многочленов первой и второй степеней в аналитическом виде;
5. График с исходными данными и аппроксимирующими кривыми.

Варианты лабораторных работ

1	***x***	0	1	2	3	4	5	6
	y	0,2	0,6	1,0	1,2	1,4	1,6	1,7
2	***x***	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	3,1	2,8	2,5	2,0	1,7	2,2	2,9
3	***x***	-6	-4	-3	-1	0	1	3
	y	2,5	1,2	0,4	-0,5	-1,3	-0,2	1,1
4	***x***	0	1	2	3	4	5	6
	y	0,5	0,8	1,3	1,7	1,9	2,5	2,2
5	***x***	-3	-2	-1	0	1	2	4
	y	1,7	1,2	1,0	0,5	-0,2	0,5	0,8
6	***x***	-1	0	1	2	3	4	5
	y	3,1	2,8	2,4	2,1	1,9	2,2	2,6
7	***x***	1	2	3	4	5	6	7
	y	1,8	1,2	0,2	-0,9	-1,9	0,4	2,4
8	***x***	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	1,7	1,9	2,4	2,7	3,1	3,1	2,5

9	***x***	0	1	2	3	4	5	6
	y	1,4	2,0	2,3	2,9	2,5	2,3	2,0
10	***x***	-1	0	1	2	3	4	5
	y	-1,8	-1,5	-1,1	-1,3	-1,4	-1,6	-1,9
11	***x***	-3	-2	-1	0	1	3	4
	y	1,0	1,7	3,3	5,1	4,6	3,0	1,9
12	***x***	0	1	2	3	4	5	6
	y	2,1	3,0	3,4	3,7	3,2	2,9	1,1
13	***x***	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	-0,3	0,5	0,8	1,8	0,8	0,4	0,0
14	***x***	0	1	2	3	4	5	6
	y	1,6	1,9	2,3	2,5	2,8	3,4	2,5
15	***x***	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	0,3	-0,5	-1,5	-0,5	-0,1	0,2	1,2
16	***x***	-3	-2	-1	0	1	2	4
	y	4,8	4,2	3,7	3,4	3,0	3,6	5,0
17	***x***	0	1	2	3	4	5	6
	y	3,5	3,2	2,9	2,1	3,0	3,4	3,9
18	***x***	-1	0	1	2	3	4	5
	y	-6,1	-5,8	-5,2	-4,8	-4,5	-5,0	-5,6
19	***x***	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	1,1	0,2	-0,4	-1,0	-1,4	-1,0	-0,2
20	***x***	0	1	2	3	4	5	6
	y	-1,2	-0,5	-0,2	0,3	-0,7	-1,1	-1,4
21	***x***	-3	-1	0	1	3	4	6
	y	1,7	3,3	5,1	6,6	5,6	4,0	3,5
22	***x***	0	1	2	3	4	5	6
	y	1,7	1,9	2,5	2,9	3,4	2,8	2,2
23	***x***	-4	-2	-1	0	1	2	3
	y	-1,8	-0,5	-0,2	0,5	1,0	1,2	0,3
24	***x***	-1	0	1	2	3	4	5
	y	3,1	4,5	4,9	5,7	5,2	4,2	3,0
25	***x***	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	-0,3	0,5	1,5	0,5	0,3	-0,2	-1,2
26	***x***	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

	y	-2,4	-3,5	-4,1	-3,4	-2,3	-1,5	-0,7
27	***x***	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	6,4	4,1	3,5	2,6	1,3	-0,2	1,7
28	***x***	-1	0	1	2	3	4	5
	y	1,6	3,2	4,8	5,5	4,1	3,7	2,4
29	***x***	0	1	2	3	4	5	6
	y	-1,7	-0,5	-0,1	0,9	1,8	0,8	0,3
30	***x***	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	1,3	1,8	2,5	3,1	3,7	2,2	1,9

3. Выявление наилучшей аппроксимации для результатов наблюдений

Цель работы: используя метод наименьших квадратов для опытных данных лабораторной работы №2, определить наилучшую аппроксимацию из набора $P_1(x) = ax + b$, $P_2(x) = ax^2 + cx + b$, $U(x) = ax^b$, $V(x) = ae^{bx}$. Построить заданные точки и наилучшую аппроксимирующую кривую.

Рекомендации к выполнению задания

Аппроксимирующие многочлены первой и второй степеней $P_1(x) = ax + b$, $P_2(x) = ax^2 + cx + b$ для исходных данных рассчитаны в результате выполнения лабораторной работы №2.

Для определения параметров степенной и показательной аппроксимирующих зависимостей $U(x) = ax^b$ и $V(x) = ae^{bx}$ применяется метод линеаризации.

Для определения параметров степенной аппроксимации $U(x) = ax^b$ необходимо выполнить следующие действия:

1. составить новую таблицу значений 3.1, прологарифмировав значения *x*, *y* из исходной таблицы 2.1;

Таблица 3.1

$\tilde{x}$ **=*lnx***							
U*=*lny							

2. По таблице 3.1, используя метод наименьших квадратов, найти параметры *A* и *B* приближающей линейной функции $U = A\tilde{x} + B$;
3. Используя обозначения *b*=*A*, *lna*=*B*, найти значения параметров *a*, *b* и подставить их в функцию $U(x) = ax^b$.

Для определения параметров показательной аппроксимации $V(x) = ae^{bx}$ этого необходимо выполнить следующие действия:

1. составить новую таблицу значений 3.2, прологарифмировав значения *y* из исходной таблицы 2.1;

Таблица 3.2

x							

V=lny							

2. По таблице 3.2, используя метод наименьших квадратов, найти параметры А и В приближающей линейной функции $F = Ax + B$;
3. Используя обозначения $b=A$, $lna=B$, найти значения параметров a, b и подставить их в функцию $V(x) = ae^{bx}$.

Для оценки качества каждой из построенных аппроксимаций заполняется таблица 3.3., содержащая суммы квадратов отклонений заданных опытных данных от найденных кривых:

$$S1 = \sum_{i=0}^{n}(P_1(x_i) - y_i)^2,\ S2 = \sum_{i=0}^{n}(P_2(x_i) - y_i)^2,$$

$$S3 = \sum_{i=0}^{n}(U(x_i) - y_i)^2,\ S4 = \sum_{i=0}^{n}(V(x_i) - y_i)^2.$$

В качестве лучшей аппроксимации выбирается та, которая дает наименьшую сумму квадратов отклонений.

Таблица 3.3

i	*yi*	*P1(xi)*	*(P1(xi)-yi)2*	*P2(xi)*	*(P2(xi)-yi)2*	*U(xi)*	*(U(xi)-yi)2*	*V(xi)*	*(V(xi)-yi)2*
Σ	-	-		-		-		-	

Отчет по самостоятельной работе должен содержать:

1. Таблицу опытных данных 2.1;
2. Аналитические функции многочленов первой и второй степеней;
3. преобразованную таблицу значений 3.1 для определения параметров степенной аппроксимации, таблицу расчета параметров линейной зависимости $U = A\tilde{x} + B$, запись системы линейных уравнений и определение из нее коэффициентов А и В, формулы по которым вычисляются параметры степенной аппроксимации, аналитическую запись определенной степенной функции;
4. преобразованную таблицу значений 3.3 для определения параметров показательной аппроксимации, таблицу расчета параметров линейной зависимости $V = Ax + B$, запись системы линейных уравнений и определение из нее коэффициентов А и В, формулы по которым

вычисляются параметры показательной аппроксимации, аналитическую запись определенной показательной функции;

5. таблицу 3.3 квадратов отклонений заданных опытных данных от найденных кривых;
6. выводы по определению наилучшей аппроксимации;
7. график и опытных данных и наилучшей аппроксимирующей зависимости.

Варианты лабораторных работ

x	0,58	0,76	0,99	1,14	1,53	2,02	2,26
y по вариантам							
1	1,4	2,49	3,60	4,24	7,09	13,18	15,36
2	1,98	2,2	3,69	4,50	6,65	8,67	10,26
3	1,0	1,9	2,95	4,18	9,04	17,56	23,14
4	1,54	1,98	1,96	2,89	5,24	9,05	10,76
5	1,17	1,65	2,58	2,56	4,43	6,32	6,80
6	0,61	1,68	1,98	3,04	6,58	12,14	15,64
7	0,13	0,32	1,08	0,69	1,89	4,19	6,17
8	0,38	0,3	1,32	1,28	2,51	6,82	10,59
9	0,34	0,59	0,17	1,04	0,76	2,45	3,17
10	0,8	0,69	0,16	0,93	0,91	2,58	2,84
11	0,91	0,06	0,85	0,57	0,57	1,76	2,85
12	0,03	0,8	0,95	0,73	1,02	4,11	5,94
13	0,56	0,88	0,20	1,22	1,05	3,64	6,48
14	0,92	0,19	0,96	1,33	1,05	4,07	6,39
15	0,11	0,11	0,11	0,08	0,09	0,03	0,04
16	0,46	0,39	0,56	0,96	0,65	1,54	1,94
17	0,61	0,38	0,54	1,04	0,77	1,53	1,97
18	0,48	0,43	0,70	0,98	0,63	1,53	2,07
19	0,37	0,43	0,47	0,61	0,53	0,73	0,73
20	0,38	0,37	0,48	0,48	0,55	0,71	0,79
21	0,39	0,43	0,39	0,42	0,49	0,58	0,56
22	0,34	0,27	0,40	0,47	0,42	0,51	0,48
23	0,44	0,28	0,36	0,51	0,43	0,49	0,57
24	0,31	0,31	0,40	0,34	0,37	0,49	0,47
25	0,38	0,28	0,35	0,49	0,36	0,69	0,81

4. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Цель работы: для функции, заданной таблично в точках x_0, x_1, x_2, x_3, построить интерполяционный многочлен Лагранжа $P_3(x)$. Используя полученный интерполяционный многочлен, приближенно вычислить значения функции в точках

$$\frac{x_0+x_1}{2},\ \frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{x_2+x_3}{2}.$$

ПРИМЕР. Необходимо построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблицей 4.1

Таблица 4.1

i	0	1	2	3
x	1,1	1,5	2,0	2,6
y(x)	0,0953	0,4055	0,6931	0,9555

Для построения интерполяционного многочлена воспользуемся формулой $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} Y_i(x) y_i$ при $n=3$, где $Y_i(x)=\dfrac{\prod_{i\neq k}(x-x_k)}{\prod_{i\neq k}(x_i-x_k)}$ - базисные функции.

Имеем: $P_3(x)=\sum_{i=0}^{3} Y_i(x) y(x_i)=\dfrac{(x-1{,}5)(x-2{,}0)(x-2{,}6)}{(1{,}1-1{,}5)(1{,}1-2{,}0)(1{,}1-2{,}6)}0{,}0953+$

$$+\frac{(x-1{,}1)(x-2{,}0)(x-2{,}6)}{(1{,}5-1{,}1)(1{,}5-2{,}0)(1{,}5-2{,}6)}0{,}4055+\frac{(x-1{,}1)(x-1{,}5)(x-2{,}6)}{(2{,}0-1{,}1)(2{,}0-1{,}5)(2{,}0-2{,}6)}0{,}6931+$$

$$+\frac{(x-1{,}1)(x-1{,}5)(x-2{,}0)}{(2{,}6-1{,}1)(2{,}6-1{,}5)(2{,}6-2{,}0)}0{,}9555\approx 0{,}064831x^3-0{,}520725x^2+1{,}798113x-1{,}338907$$

Проверим условие $P_3(x)=y(x_i)$, $(i=\overline{0{,}3})$.

При $i=0$ подставляем $x_0=1{,}1$ в полученный многочлен:

$$P_3(1{,}1)\approx 0{,}095291\approx 0{,}0953=y(1{,}1).$$

Аналогично: $i=1,\ x_1=1{,}5$, $P_3(1{,}5)\approx 0{,}405493\approx 0{,}4055=y(1{,}5)$;

$i=2,\ x_2=2{,}0$, $P_3(2{,}0)\approx 0{,}693095\approx 0{,}6931=y(2{,}0)$;

$$i=3 \quad x_3=2{,}6, \qquad P_3(2{,}6)\approx 0{,}955497\approx 0{,}9555 = y(2{,}6).$$

Используя полученный интерполяционный многочлен, вычислим приближенно $y(\frac{x_0+x_1}{2}) = y(1{,}3)$: $\qquad y(1{,}3)=P_3(1{,}3)\approx 0{,}261108\approx 0{,}2611$.

Ответ: $P_3(x)=0{,}064831x^3-0{,}520725x^2+1{,}798113x-1{,}338907$; $y(1{,}3)\approx 0{,}2611$.

Отчет по самостоятельной работе должен содержать:

1. Таблицу значений функции (табл. 4.1);
2. Основные этапы построения интерполяционного многочлена;
3. Аналитическую запись интерполяционного многочлена;
4. Проверку условия $P_3(x)=y(x_i)$, $(i=\overline{0,3})$;
5. Вычисление значений функции y(x) в точках $\frac{x_0+x_1}{2}$, $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{x_2+x_3}{2}$.

Варианты практических работ

1	***x***	1,4	1,8	2,3	2,9
	y(x)	0,3365	0,5878	0,8329	1,0647
2	***x***	2,0	2,5	2,8	3,3
	y(x)	0,6931	0,9163	1,0296	1,1939
3	***x***	4,0	4,5	4,9	5,4
	y(x)	1,3869	1,5041	1,5892	1,6864
4	***x***	1,2	1,6	2,1	2,6
	y(x)	0,1823	0,4700	0,7419	0,9555
5	***x***	2,2	2,7	3,1	3,6
	y(x)	0,7885	0,9933	1,1314	1,2809
6	***x***	3,2	3,6	4,1	4,6
	y(x)	1,1632	1,2809	1,4110	1,5261
7	***x***	3,4	3,9	4,3	4,9
	y(x)	1,2238	1,3610	1,4586	1,5892
8	***x***	1,6	2,1	2,7	3,2
	y(x)	0,4700	0,7419	0,9933	1,1632
9	***x***	2,8	3,1	3,7	4,2
	y(x)	1,0296	1,1314	1,3083	1,4351
10	***x***	3,1	3,6	4,0	4,6
	y(x)	1,1314	1,2809	1,3863	1,5261
11	***x***	1,9	2,5	2,9	3,4
	y(x)	0,6419	0,9163	1,0647	1,2238
12	***x***	1,7	2,2	2,8	3,2
	y	0,5306	0,7885	1,0296	1,1632
13	***x***	3,6	4,2	4,5	5,2

	y(x)	1,2809	1,4351	1,5041	1,6487
14	***x***	2,5	2,9	3,6	4,1
	y(x)	0,9163	1,0647	1,2809	1,4110
15	***x***	3,3	3,9	4,4	5,0
	y(x)	1,1939	1,3610	1,4816	1,6094
16	***x***	1,1	1,7	2,4	2,8
	y(x)	0,0953	0,5306	0,8755	1,0296
17	***x***	2,1	2,5	3,0	3,5
	y(x)	0,7419	0,9163	1,0986	1,2528
18	***x***	3,2	3,7	4,3	4,9
	y(x)	1,1632	1,3083	1,4586	1,5892
19	***x***	2,7	3,3	3,8	4,6
	y(x)	0,9933	1,1939	1,3350	1,5261
20	***x***	1,0	1,5	2,1	2,7
	y(x)	0,0000	0,4055	0,7419	0,9933
21	***x***	1,4	1,9	2,6	3,0
	y(x)	0,3365	0,6419	0,9555	1,0986
22	***x***	3,1	3,7	4,2	4,8
	y(x)	1,1314	1,3083	1,4351	1,5686
23	***x***	2,6	3,2	4,0	4,5
	y(x)	0,9555	1,1632	1,3863	1,5041
24	***x***	1,6	2,2	2,7	3,4
	y(x)	0,4700	0,7885	0,9933	1,2238
25	***x***	2,1	2,7	3,3	3,8
	y(x)	0,7419	0,9933	1,1939	1,3350
26	***x***	2,6	3,0	3,9	4,5
	y(x)	0,9553	1,0986	1,3610	1,5041
27	***x***	4,5	4,9	5,5	6,0
	y(x)	1,5041	1,5892	1,7047	1,7918
28	***x***	3,5	3,8	4,5	5,1
	y(x)	1,2528	1,3350	1,5041	1,6292
29	***x***	2,8	3,3	3,9	4,6
	y(x)	1,0296	1,1939	1,3610	1,5261
30	***x***	4,1	4,6	5,2	6,0
	y(x)	1,4110	1,5261	1,6487	1,7918

5. Интерполяция сплайнами

Цель работы: для функции, заданной таблично в точках x_0, x_1, x_2, x_3, построить интерполяционный многочлен $S_3(x)$, используя кубические сплайны. Вычислить приближенно значения функции в точках $\frac{x_0+x_1}{2}$, $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{x_2+x_3}{2}$.

ПРИМЕР. Построить интерполяционный многочлен, применяя кубические сплайны, для функции, заданной таблицей 5.1.

Таблица 5.1

i	0	1	2	3
x	2	3	5	7
y(x)	4	-2	6	-3

Кубические сплайны имеют вид: $S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$.

Учитывая $y_{i-1} = a_i$ и исходные данные, сплайны 3-го порядка для трех промежутков будут иметь вид:

$$S_1(x) = 4 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3, \qquad 2 \le x \le 3;$$

$$S_2(x) = -2 + b_2(x-3) + c_2(x-3)^2 + d_2(x-3)^3, \qquad 3 \le x \le 5;$$

$$S_3(x) = 6 + b_3(x-5) + c_3(x-5)^2 + d_3(x-5)^3, \qquad 5 \le x \le 7.$$

Для определения неизвестных составим систему:

– первая группа уравнений (условие равенства значений в узлах склейки сплайнов)

$$b_1 + c_1 + d_1 = -6,$$
$$2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 8,$$
$$2b_3 + 4c_3 + 8d_3 = -9;$$

– вторая группа уравнений (условие непрерывности производных в узлах склейки сплайнов)

$$b_2 - b_1 - 2c_1 - 3d_1 = 0,$$
$$b_3 - b_2 - 4c_2 - 12d_2 = 0,$$
$$c_2 - c_1 - 3d_1 = 0,$$
$$c_3 - c_2 - 6d_2 = 0;$$

– третья группа уравнений - граничные условия

$c_1 = 0,$

$c_3 + 6d_3 = 0.$

Таким образом, общая система состоит из 9 уравнений. Для записи матрицы коэффициентов, заполним таблицу 5.2.

Таблица 5.2

1 промежуток			**2 промежуток**			**3 промежуток**			
$x_0=2$		$x_1=3$	$x_1=3$		$x_2=5$	$x_2=5$		$x_3=7$	
$y_0=4$		$y_1=-2$	$y_1=-2$		$y_2=6$	$y_2=6$		$y_3=-3$	
$h_1=1$			$h_2=2$			$h_3=2$			
B_1	c_1	d_1	b_2	C_2	d_2	b_3	c_3	d_3	св. член
1	1	1	0	0	0	0	0	0	-6
0	0	0	2	4	8	0	0	0	8
0	0	0	0	0	0	2	4	8	-9
-1	-2	-3	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	-4	-12	1	0	0	0
0	-1	-3	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	-6	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	6	0

Решая систему методом Гаусса, находим неизвестные:

$b_1=-11,6$ $b_2=-0,4$ $b_3=1.62$

$c_1=5,6$ $c_2=6,6$ $c_3=-4,59$

$d_1=0$ $d_2=-1,7$ $d_3=0,76$

Сплайны соответственно на промежутках будут иметь вид

$$S_1(x) = 4 - 11{,}6(x-2) + 5{,}6(x-2)^2,$$

$$S_2(x) = -2 - 0{,}4(x-3) + 5{,}6(x-3)^2 - 1{,}7(x-3)^3,$$

$$S_3(x) = 6 + 1{,}62(x-5) - 4{,}59(x-5)^2 + 0{,}76(x-5)^3.$$

Убедимся, что найденные сплайны удовлетворяют наперед заданным свойствам. Для этого заполним таблицу 5.3.

Таблица 5.3

	x=2	***x=3***	***x=5***	***x=7***
$f(x)$	4	-2	6	-3
$S_1(x)$	4	-2	—	—
$S_2(x)$	—	-2	6	
$S_3(x)$	—		6	-3,04
$S'_1(x)$	-11,6	-0,4	—	—
$S'_2(x)$	—	-0,4	1,6	—
$S'_3(x)$	—	—	1,62	-7,62

Анализ таблицы 5.3 показывает:

достигнуто совпадение значений сплайнов в узлах их склейки, а также совпадение этих значений с табличными значениями функции $f(x)$. Практически совпадают значения производных $S'_1(x)$ и $S'_2(x)$ в узле $x=3$, а так же производных $S'_2(x)$ и $S'_3(x)$ в узле $x=5$, что обеспечивает гладкость совокупного кубического сплайна.

Отчет по самостоятельной работе должен содержать:

1. таблицу значений функции (табл. 5.1);
2. общий вид сплайнов для всех промежутков;
3. таблицу значений коэффициентов (табл. 5.2);
4. решение системы;
5. найденные сплайны для всех промежутков;
6. таблицу соответствия сплайнов заданным свойствам (табл. 5.3).

Варианты лабораторных работ

1	***x***	1,4	1,8	2,3	2,9
	y(x)	6	2	3	1
2	***x***	2,0	2,5	2,8	3,3
	y(x)	6	9	1	2
3	***x***	4,0	4,5	4,9	5,4
	y(x)	1	5	1	6
4	***x***	1,2	1,6	2,1	2,6
	y(x)	8	4	7	9
5	***x***	2,2	2,7	3,1	3,6
	y(x)	7	9	1	2
6	***x***	3,2	3,6	4,1	4,6
	y(x)	1	8	4	5
7	***x***	3,4	3,9	4,3	4,9
	y(x)	2	6	4	5
8	***x***	1,6	2,1	2,7	3,2
	y(x)	4	7	3	6
9	***x***	2,8	3,1	3,7	4,2
	y(x)	1	3	4	8
10	***x***	3,1	3,6	4,0	4,6
	y(x)	3	1	8	5
11	***x***	1,9	2,5	2,9	3,4
	y(x)	4	1	6	2
12	***x***	1,7	2,2	2,8	3,2
	y	5	7	2	6
13	***x***	3,6	4,2	4,5	5,2
	y(x)	2	5	4	7
14	***x***	2,5	2,9	3,6	4,1
	y(x)	9	1	4	2
15	***x***	3,3	3,9	4,4	5,0
	y(x)	3	1	8	6
16	***x***	1,1	1,7	2,4	2,8
	y(x)	9	3	8	2

17	***x***	2,1	2,5	3,0	3,5
	y(x)	7	9	6	8
18	***x***	3,2	3,7	4,3	4,9
	y(x)	1	3	8	5
19	***x***	2,7	3,3	3,8	4,6
	y(x)	9	3	5	6
20	***x***	1,0	1,5	2,1	2,7
	y(x)	0	4	7	3
21	***x***	1,4	1,9	2,6	3,0
	y(x)	5	9	5	6
22	***x***	3,1	3,7	4,2	4,8
	y(x)	4	8	3	6
23	***x***	2,6	3,2	4,0	4,5
	y(x)	5	6	3	5
24	***x***	1,6	2,2	2,7	3,4
	y(x)	7	5	3	8
25	***x***	2,1	2,7	3,3	3,8
	y(x)	9	3	8	5
26	***x***	2,6	3,0	3,9	4,5
	y(x)	5	6	1	10
27	***x***	4,5	4,9	5,5	6,0
	y(x)	4	2	7	1
28	***x***	3,5	3,8	4,5	5,1
	y(x)	12	5	7	2
29	***x***	2,8	3,3	3,9	4,6
	y(x)	6	1	10	5
30	***x***	4,1	4,6	5,2	6,0
	y(x)	11	6	8	1

6. Интерполяционные многочлены Ньютона

Цель работы: для функции, заданной таблично, найти приближенное значение функции в точках $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ и значение производной в точке $\bar{x}_3$.

ПРИМЕР. Функция задана таблицей 6.1. Требуется найти приближенное значение функции $f(x)$ в точках $\bar{x}_1$=1,53; $\bar{x}_2$=2,18 и значение производной функции в точке $\bar{x}_3$=2,17.

Таблица 6.1

x	***1,5***	***1,6***	***1,7***	***1,8***	***1,9***	***2,0***	***2,1***	***2,2***
f(x)	0,17609	0,20412	0,23045	0,25527	0,27875	0,30103	0,32222	0,34242

Составим таблицу конечных разностей 6.2 для исходной функции. Таблицу обрываем на четвертых разностях, так как конечные разности четвертого порядка практически постоянны.

Точка $\bar{x}_1$=1,53 находится в начале таблицы 6.1, поэтому воспользуемся первым интерполяционным многочленом Ньютона

$$f(x) \approx P_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

при $n = 4$; $x_0 = 1{,}5$; $h = 0{,}1$; $t = \dfrac{\bar{x}_1 - x_0}{h} = 0{,}3$.

Имеем

$$P_4(1{,}53) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 = \sum_{i=0}^{4} A_i \Delta^i y_0 .$$

Таблица 6.2

x	***y***	***Δy***	***Δ²y***	***Δ³y***	***Δ⁴y***
1,5	**0,17609**				
		2803			
1,6	0,20412		**-170**		
		2633		**19**	
1,7	0,23045		-151		**-2**
		2482		17	
1,8	0,25527		-134		-3
		2348		14	
1,9	0,27875		-120		-3
		2228		11	
2,0	0,30103		-109		**-1**
		2119		**10**	
2,1	0,32222		**-99**		
		2020			
2,2	**0,34242**				

Вычисления представим в виде таблицы 6.3.

Таблица 6.3

i	0	1	2	3	4

A_i	1	0,3	-0,105	0,0595	-0,040162
$\Delta_i y_0$	0,17609	0,02803	-0,00170	0,00019	-0,00002

Ответ: $f(1{,}53) \approx 0{,}184688 \approx 0{,}18469$.

Вычисления производим с шестью знаками после запятой. В ответе последний знак отбрасываем.

Точка $\bar{x}_2$=2,18 находится в конце таблицы 6.1, поэтому воспользуемся вторым интерполяционным многочленом Ньютона

$$f(x) \approx P_n(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\cdot\ldots\cdot(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

при $n = 4$; $x_n = 2{,}2$; $h = 0{,}1$; $t = \dfrac{\bar{x}_2 - x_n}{h} = -0{,}2$.

Имеем

$$P_4(2{,}18) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4} = \sum_{i=0}^{4} C_i \Delta^i y_{n-i}.$$

Вычисления представим в виде таблицы 6.4.

Таблица 6.4

i	0	1	2	3	4
C_i	1	-0,2	-0,08	-0,48	0,0336
$\Delta_i y_{n-1}$	0,34242	0,02020	-0,00099	0,00010	-0,00001

Ответ: $f(2{,}18) \approx 0{,}338455 \approx 0{,}33846$.

Вычисления производим с шестью знаками после запятой. В ответе последний знак отбрасываем.

В таблице 6.2 конечных разностей жирным шрифтом выделены конечные разности, используемые при вычислении $f(1{,}53)$ и $f(2{,}18)$.

Вычислим значение производной функции $f(x)$ в точке $\bar{x}_3$=2,17. Значение аргумента $\bar{x}_3$=2,17 находится в конце таблицы 6.1. Построим интерполяционный многочлен четвертой степени по второй интерполяционной формуле Ньютона:

$$P_4(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4}.$$

Производную функции вычисляем приближенно из соотношения:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}[\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{3t^2+6t+2}{6}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{2t^3+9t^2+11t+3}{4!}\Delta^4 y_{n-4}].$$

В данном случае $\bar{x}_3 = 2{,}17$; $h = 0{,}1$; $t = \dfrac{\bar{x}_3 - x_n}{h} = -0{,}3$.

Подставляя *h*, *t*, значения конечных разностей из таблицы 6.2 в выше приведенную формулу, получаем $f'(\bar{x}_3) \approx 0{,}20009 \approx 0{,}2001$.

Отчет по самостоятельной работе должен содержать:

1. таблицу значений функции 6.1 и таблицу её конечных разностей 6.2;
2. вычисления значения функции *f(x)* в точке $\bar{x}_1$;
3. вычисления значения функции *f(x)* в точке $\bar{x}_2$;

4. вычисления значения производной функции *f(x)* в точке $\bar{x}_3$.

Варианты лабораторных работ

Номер варианта	Функция	Точки интерполяции	Номер варианта	Функция	Точки интерполяции
1	А	1	16	А	9
2	Б	2	17	Г	6
3	В	1	18	Б	4
4	А	2	19	Д	5
5	Г	7	20	Г	10
6	В	2	21	А	8
7	Б	5	22	Д	2
8	Д	3	23	Б	7
9	А	3	24	В	10
10	Г	1	25	Г	5
11	В	6	26	Б	8
12	Д	4	27	А	5
13	Б	3	28	В	4
14	В	9	29	Г	3
15	Д	7	30	Д	10

Функция А

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	0,94608	1,02868	1,10805	1,23961	1,25623	1,32468	1,38918	1,44959	1,50582	1,55777

Функция Б

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	0,96285	1,04482	1,12351	1,19871	1,27023	1,33790	1,40159	1,46117	1,51655	1,56768

Функция В

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	0,97950	1,06083	1,13884	1,21331	1,28408	1,35096	1,41384	1,47260	1,52711	1,57735

Функция Г

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	0,99602	1,07670	1,15402	1,22777	1,29776	1,36386	1,42592	1,48384	1,53751	1,58688

Функция Д

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	1,01242	1,09244	1,16906	1,24207	1,31130	1,37660	1,43784	1,49491	1,54772	1,59623

Точки интерполяции

N	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	**N**	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
1	0,01	0,89	0,02	6	0,04	0,89	0,88
2	0,04	0,87	0,88	7	0,03	0,86	0,02

3	0,05	0,86	0,03	8	0,02	0,87	0,86
4	0,02	0,89	0,87	9	0,03	0,88	0,02
5	0,01	0,88	0,03	10	0,05	0,87	0,89

7. Численное дифференцирование

Цель работы: для функции, заданной таблично, найти значение первой и второй производных в точке $\bar{x}$.

Теоретическая часть

А. Пусть на отрезке $[a,b]$ на неравномерной сетке задана сеточная функция $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Предположим, что $f(x) \in C_2[a,b]$.

При разложении функцию $f(x)$ по формуле Тейлора относительно точки x_i, получаем **левостороннюю формулу для расчета первой производной**:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} = \frac{\Delta y_i}{h_{i+1}}, \tag{1}$$

причем оценка погрешности составит $\frac{h_{i+1}}{2} M_i$, где $M_i = \max\limits_{[x_i, x_{i+1}]} |f''(\xi)|$.

Если функцию $f(x)$ разложить по формуле Тейлора относительно точки x_{i+1}, то получим **правостороннюю формулу для расчета первой производной**:

$$f'(x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{\Delta y_i}{h}, \tag{2}$$

оценка погрешности составит $\frac{h}{2} M_i$.

Б. Пусть на отрезке $[a,b]$ на неравномерной сетке задана сеточная функция $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Предположим, что $f(x) \in C_3[a,b]$. Разложим функцию $f(x)$ при $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$ по формуле Тейлора относительно точки $x = x_{i-1}$, причем, $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$. В результате разложения находим формулу для аппроксимации **первой производной в крайней левой точке:**

$$f'(x_{i-1}) = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left(-(2 + \delta_{i+1}) f_{i-1} + \frac{(1 + \delta_{i+1})^2}{\delta_{i+1}} f_i - \delta_{i+1}^{-1} f_{i+1} \right), \tag{3}$$

оценка погрешности $\frac{h_i^2 (1 + \delta_{i+1})}{3!} M_i$, где $M_i = \max\limits_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f'''(\xi)|$.

На равномерной сетке формула (3) ($\delta_{i+1} = 1$) приводится к виду:

$$f'(x_{i-1}) = \frac{1}{2h}\left(-3 f_{i-1} + 4 f_i - f_{i+1}\right) = \frac{1}{2h}\left(3\Delta y_{i-1} - \Delta y_i\right), \tag{3a}$$

оценка погрешности составляет $\frac{h^2}{3} M_i$, $M_i = \max\limits_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f'''(\xi)|$.

Аналогично, получаем **аппроксимацию для первой производной в правой крайней точке:**

$$f'(x_{i+1})=\frac{1}{H_i^{i+1}}\left(\delta_{i+1}f_{i-1}-\frac{(1+\delta_{i+1})^2}{\delta_{i+1}}f_i+\frac{(2+\delta_{i+1})}{\delta_{i+1}}f_{i+1}\right), \qquad (4)$$

с оценкой погрешности $\frac{h_i^2}{3!}\delta_{i+1}(1+\delta_{i+1})M_i$.

Для равномерной сетки ($h=const$, $\delta_{i+1}=1$):

$$f'(x_{i+1})=\frac{1}{2h}\left(f_{i-1}-4f_i+3f_{i+1}\right)=\frac{1}{2h}\left(3\Delta y_i-\Delta y_{i-1}\right). \qquad (4а)$$

C. Пусть на отрезке $[a,b]$ на неравномерной сетке задана сеточная функция $y_i=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$. Предположим, что $f(x)\in C_3[a,b]$. Разложим функцию $f(x)$ при $x=x_i$ и $x=x_{i+1}$ по формуле Тейлора относительно центральной точки $x=x_i$. Полученные выражения для f_{i-1}, f_{i+1} и исключение из них слагаемых со второй производной приводят к следующим расчетным формулам, **аппроксимирующим первую производную в центральной точке**:

$$f'(x_i)=\frac{1}{H_i^{i+1}}\left(-\delta_{i+1}f_{i-1}+\frac{(\delta_{i+1}^2-1)}{\delta_{i+1}}f_i+\frac{1}{\delta_{i+1}}f_{i+1}\right). \qquad (5)$$

Для равномерной сетки ($h=const$, $\delta_{i+1}=1$):

$$f'(x_i)=\frac{1}{2h}\left(f_{i+1}-f_{i-1}\right)=\frac{1}{2h}\left(\Delta y_i+\Delta y_{i-1}\right), \qquad (5а)$$

оценка погрешности составляет $\frac{h^2}{3!}M_i$, $M_i=\max\limits_{[x_{i-1},x_{i+1}]}|f'''(\xi)|$.

D. Пусть на отрезке $[a,b]$ на неравномерной сетке задана сеточная функция $y_i=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$. Предположим, что $f(x)\in C_4[a,b]$. Разложим функцию $f(x)$ в точках $x=x_i$ и $x=x_{i+1}$ по формуле Тейлора до слагаемого четвертого порядка относительно шага.

Аппроксимация второй производной $f''(x_i)$ на нерегулярном шаблоне имеет вид:

$$f''(x_i)=\frac{2}{H_i^{i+1}}\left(\frac{1}{h_i}f(x_{i-1})-\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)f(x_i)+\frac{1}{h_{i+1}}f(x_{i+1})\right). \qquad (6)$$

Если сетка равномерная, то

$$f''(x_i)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta y_i-\Delta y_{i-1}\right), \qquad (6а)$$

оценка погрешности составляет $\frac{h^2}{12}M_i$, $M_i=\max\limits_{[x_{i-1},x_{i+1}]}|f^{(4)}(\xi)|$.

ПРИМЕР. Функция задана таблицей 7.1.

Таблица 7.1

x	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
f(x)	1,17609	1,00000	0,833333	0,714285	0,625000	0,55555	0,32222	0,22222

Требуется вычислить значение первой производной $f'(1{,}4)$ и второй производной $f''(1{,}4)$.

1. Так как шаг заданной сеточной функции постоянный $h = 0{,}2$, точка $x = 1{,}4$ находится внутри сетки, то для вычисления производной в этой точке воспользуемся формулой (5а). При этом центральная точка расчетного шаблона совпадает с точкой $x = 1{,}4$. Посчитаем искомое значение производной:

$$f'(1{,}4) = \frac{f(1.6) - f(1.2)}{2h} = \frac{0.625000 - 0.833333}{0.4}. \qquad (7)$$

Прежде чем выполнить вычисление, определим количество знаков, которое сохраняется при этом.

Остаточное слагаемое выбранной формулы	M_i	$f'''(x_i = 1.4) = \frac{\Delta^3 y_i}{h^3}$
$\frac{h^2}{3!} M_i$	$\max\limits_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} \lvert f'''(\xi) \rvert$	$\frac{\Delta^3 y_i}{h^3} = \frac{y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i}{h^3}$
0,0049	0,741875	$\frac{\Delta^3 y_i}{h^3} = -0{,}741875$

Так как остаточное слагаемое $0{,}0049 < 0{,}005$, то в вычислениях ожидается три верных цифры после запятой. Оставим ещё одну сомнительную цифру. По формуле (7) имеем:

$f'(1{,}4) =$ -0,521.

Фактическая абсолютная погрешность составляет:

$$\left| -0{,}521 + \frac{1}{1{,}4^2} \right| = \left| -0{,}521 + 0{,}5102 \right| = 0{,}0108,$$

а относительная погрешность равна $\frac{0{,}0108}{0{,}521} \cdot 100\% = 2{,}1\%$.

2. Для вычисления второй производной в точке $x = 1{,}4$ можно воспользоваться формулой (6а). Вычисление производится по приведенному выше алгоритму.

Отчет по самостоятельной работе должен содержать:

1. постановку задачи;
2. вычисление первой производной в точке $\bar{x}$ по всем приведенным в теоретическом разделе формулам;

3. вычисление второй производной в точке $\bar{x}$;
4. оценку абсолютной и относительной погрешности вычислений.

Варианты лабораторных работ

Номер варианта	**Функция**	**Точки интерполяции**	**Номер варианта**	**Функция**	**Точки интерполяции**
1	А	1	16	А	9
2	Б	2	17	Г	6
3	В	1	18	Б	4
4	А	2	19	Д	5
5	Г	7	20	Г	10
6	В	2	21	А	8
7	Б	5	22	Д	2
8	Д	3	23	Б	7
9	А	3	24	В	10
10	Г	1	25	Г	5
11	В	6	26	Б	8
12	Д	4	27	А	5
13	Б	3	28	В	4
14	В	9	29	Г	3
15	Д	7	30	Д	10

Функция А

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	0,94608	1,02868	1,10805	1,23961	1,25623	1,32468	1,38918	1,44959	1,50582	1,55777

Функция Б

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	0,96285	1,04482	1,12351	1,19871	1,27023	1,33790	1,40159	1,46117	1,51655	1,56768

Функция В

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	0,97950	1,06083	1,13884	1,21331	1,28408	1,35096	1,41384	1,47260	1,52711	1,57735

Функция Г

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	0,99602	1,07670	1,15402	1,22777	1,29776	1,36386	1,42592	1,48384	1,53751	1,58688

Функция Д

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	1,01242	1,09244	1,16906	1,24207	1,31130	1,37660	1,43784	1,49491	1,54772	1,59623

Точки для расчета

N	$\bar{x}$	**N**	$\bar{x}$
1	0,3	6	0,4

2	0,4	7	0,3
3	0,5	8	0,2
4	0,2	9	0,6
5	0,6	10	0,5

8. Численное интегрирование

Цель работы: вычислить заданный определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по формуле трапеции и по формуле Симпсона при n=12. Оценить погрешность полученных результатов.

ПРИМЕР. Вычислить приближенно $J = \int_0^{1,2} \frac{x}{x^4+1}dx$ по формуле трапеции и по формуле Симпсона при n=12. Оценить погрешность полученных результатов.

По условию n=12. Отсюда шаг равномерной сетки $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1,2-0}{12} = 0,1$. Дальнейшие вычисления оформляем в виде таблицы 8.1.

Таблица 8.1

i	x_i	$y_i = \frac{x_i}{x_i^4+1}$	Формула трапеций		Формула Симпсона	
			C_i	C_i'	A_i	A_i'
0	0	0	1	1	1	1
1	0,1	0,099990	2	0	4	0
2	0,2	0,199680	2	2	2	4
3	0,3	0,297589	2	0	4	0
4	0,4	0,390015	2	2	2	2
5	0,5	0,470588	2	0	4	0
6	0,6	0,531161	2	2	2	4
7	0,7	0,564470	2	0	4	0
8	0,8	0,567536	2	2	2	2
9	0,9	0,543445	2	0	4	0
10	1,0	0,500000	2	2	2	4
11	1,1	0,446410	2	0	4	0
12	1,2	0,390421	1	1	1	1
Σ			9,612189	4,767205	14,457172	7,228887
J			$\boldsymbol{J_h}$**=0,48060**	$\boldsymbol{J_{2h}}$**=0,47672**	$\boldsymbol{J_h}$**=0,481905**	$\boldsymbol{J_{2h}}$**=0,48195**
$\lvert R\rvert$			0,001297< 0,002		0,0000015< 0,000002	

Вычисляем координаты узлов сетки $x_i = a + ih$ $(i = \overline{0,12})$. В данном случае $a = 0$; $h = 0,1$. Вычисляем значения подынтегральной функции $y_i = \frac{x_i}{x_i^4+1}$ в узлах x_i.

Формула трапеции для расчета приближенного значения рассматриваемого интеграла имеет вид:

$$J_h = \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + ... + 2y_{11} + y_{12}) = \frac{1{,}2}{24}\sum_{i=0}^{12} c_i y_i .$$

В столбце C_i таблицы 8.1 проставлены коэффициенты суммы формулы трапеции. В строке Σ записано значение суммы $\sum_{i=0}^{12} c_i y_i$, в строке J – приближенное значение интеграла J_h.

Для оценки погрешности вычисляем приближенное значение определенного интеграла по формуле трапеции с шагом $2h$=0,2. При n=6 формула трапеции имеет вид:

$$J_{2h} = \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_2 + 2y_4 ... + 2y_{10} + y_{12}) = \frac{1{,}2}{12}\sum_{i=0}^{12} c_i' y_i .$$

Так как точки $x_1, x_3, x_5, ..., x_{11}$ пропускаются, полагаем для них $c_i' = 0$.

Оценить погрешность вычислений определенного интеграла по формуле трапеции с шагом h возможно, используя неравенство:

$$|R_{Tp}| \le \frac{|J_h - J_{2h}|}{3}.$$

Формула Симпсона для расчета приближенного значения рассматриваемого интеграла с шагом $h = 0{,}1$ и $n = 12$ имеет вид:

$$J_h = \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{11}) + 2(y_2 + y_4 + y_{10}) + y_{12}) = \frac{1{,}2}{36}\sum_{i=0}^{12} a_i y_i .$$

Формула Симпсона для расчета приближенного значения рассматриваемого интеграла с шагом $2h = 0{,}2$ и $n = 6$ имеет вид:

$$J_{2h} = \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_2 + 2y_4 + 4y_6 + 2y_8 + 4y_{10} + y_{12}) = \frac{1{,}2}{18}\sum_{i=0}^{6} a_i' y_i .$$

Оценка погрешности вычислений по формуле Симпсона с шагом h, рассчитывается с помощью неравенства:

$$|R_c| \le \frac{|J_h - J_{2h}|}{15}.$$

Отчет по самостоятельной работе должен содержать:

1. постановку задачи;
2. вычисления значения подынтегральной функции в точках сетки;
3. вычисление приближенного значения определенного интеграл по формуле трапеций и оценку погрешности;
4. вычисление приближенного значения определенного интеграл по формуле Симпсона и оценку погрешности.

Варианты лабораторных работ

Номер варианта	**Определенный интеграл**	**Номер варианта**	**Определенный интеграл**

1	$\int_0^{1,2} \frac{1{,}5x^2+x}{x^5+1}dx$	16	$\int_1^{3,4} \frac{x^2+1{,}5x}{x^3+7{,}1}dx$
2	$\int_2^{4,4} \frac{x-x^3}{x^4+2}dx$	17	$\int_0^{1,8} \frac{x^2+1{,}5x}{x^3+7{,}1}dx$
3	$\int_1^{2,2} \frac{2{,}2x+17}{3{,}1x^3+9{,}3x}dx$	18	$\int_2^{4,4} \frac{x^2+1{,}8}{x^3+7{,}9}dx$
4	$\int_0^{1,8} \frac{x^2-4{,}1}{x^4+1}dx$	19	$\int_0^{1,2} \frac{3{,}8x-7{,}5}{2{,}5x^2+2}dx$
5	$\int_0^{1,2} \frac{3{,}5x^2+x}{x^4+2}dx$	20	$\int_1^{2,2} \frac{1{,}8x^2-1}{x^3+1{,}2}dx$
6	$\int_2^{4,4} \frac{1-3{,}7x}{x^3+x}dx$	21	$\int_2^{3,2} \frac{3{,}1x+2{,}1}{x^3+2}dx$
7	$\int_1^{2,6} \frac{x^3+4{,}5}{x^4+5{,}4}dx$	22	$\int_1^{3,4} \frac{x^2-6{,}1}{x^4+2{,}4}dx$
8	$\int_1^{3,4} \frac{2{,}4+x^2}{x^3+8{,}1}dx$	23	$\int_2^{4,4} \frac{1{,}8+x}{x^3+4{,}8}dx$
9	$\int_1^{2,2} \frac{5{,}2x+4{,}8}{4{,}5x^2+4{,}1}dx$	24	$\int_0^{1,2} \frac{x^2+1{,}9}{x^4+3{,}1}dx$
10	$\int_0^{1,8} \frac{x^2-3{,}7}{x^5+1}dx$	25	$\int_1^{2,2} \frac{x^2+3{,}8}{x^3+7{,}1}dx$
11	$\int_2^{3,2} \frac{3{,}3x-2{,}8}{4{,}5x^3+7{,}4}dx$	26	$\int_2^{4,4} \frac{x^2-1{,}3}{1{,}2x^3+1}dx$
12	$\int_0^{1,2} \frac{x-1{,}8}{x^4+5{,}1}dx$	27	$\int_0^{1,2} \frac{5{,}7x+1{,}4}{x^3+2{,}1}dx$
13	$\int_1^{2,8} \frac{4{,}2x^2-8{,}1}{x^3+3{,}8}dx$	28	$\int_0^{1,8} \frac{3{,}8-x^2}{x^3+1{,}5}dx$
14	$\int_2^{3,2} \frac{1{,}6x-3{,}8}{1{,}2x^3+1{,}7}dx$	29	$\int_1^{3,4} \frac{4{,}5-x^2}{1{,}8x+x^3}dx$
15	$\int_1^{2,2} \frac{x^2-4{,}9}{x^3+1{,}8}dx$	30	$\int_0^{1,2} \frac{1{,}2+2x^2}{x^3+3{,}1}dx$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная учебная литература

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — Электрон. дан. — М. : Издательство "Лаборатория знаний", 2015. — 639 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/70767
2. Пантелеев,А.В. Численные методы. Практикум [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.В. Пантелеев, И.А. Кудрявцева. — М. : ИНФРА-М, 2017. — 512 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=652316

Дополнительная учебная литература

3. Гавришина, О.Н. Численные методы [Электронный ресурс]: учебное пособие / О.Н. Гавришина, Ю.Н. Захаров, Л.Н. Фомина. - Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2011. - 238 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=232352
4. Мастяева, И.Н. Численные методы [Электронный ресурс]: Учебно-практическое пособие / И.Н. Мастяева, О.Н. Семенихина.– Электрон. текстовые дан. – Москва: МЭСИ, 2003. – 241 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=90907
5. Слабнов, В.Д. Численные методы [Электронный ресурс]: лекции / В.Д. Слабнов – Электрон. текстовые дан. – Казань: Изд-во «Познание», 2012. – 192 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=364221
6. Колдаев, В.Д. Численные методы и программирование [Электронный ресурс]: учеб. пособие / под ред. проф. Л.Г. Гагариной. - Электрон. текстовые дан. – Москва : ИД «ФОРУМ» : ИНФРА-М, 2014. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread.php?book=452274
7. Савенкова, Н.П. Численные методы в математическом моделировании [Электронный ресурс]: Уч. пос./ Н.П. Савенкова,О.Г. Проворова, А.Ю. Мокин- 2 изд., исп. и доп. - М.: АРГАМАК-МЕДИА: ИНФРА-М, 2017. - 176 с. Режим доступа:http://znanium.com/bookread2.php?book=774278
8. Гулин, А.В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях[Электронный ресурс]: Учебное пособие / А.В. Гулин, О. С. Мажорова, В. А.Морозова. - М.: АРГАМАК-МЕДИА: ИНФРА-М, 2017. - 368 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=883943
9. Абакумов,М.В.Лекции по численным методам математической физики [Электронный ресурс]: Уч.пос./ М.В.Абакумов, А.В.Гулин; МГУ им. М.В.Ломоносова. Факультет вычисл. математике и кибернетики. - М.:НИЦ ИНФРА-М,2013-158 с. –Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=364601
10. Копченова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н.В. Копченова, И.А. Марон. —

Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2017. — 368 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/96854

11. ализняк, В.Е. Теория и практика по вычислительной математике [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.Е.顾 Зализняк, Г.И. Щепановская. - Электрон. текстовые дан. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=441232
12. Пантина, И. В. Пантина, И. В. Вычислительная математика [Электронный ресурс] : учебник / И. В. Пантина, А. В. Синчуков. – 2–е изд., перераб. и доп. – М.: МФПУ Синергия, 2012. – 176 с. – (Университетская серия). – Режим доступа: http://www.znanium.com/bookread.php?book=451160
13. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2011. — 672 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/2025
14. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики. [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2009. — 608 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/255