**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)**

Факультет информатики, математики и экономики

Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Позднякова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

*Методические рекомендации по выполнению контрольной работы
для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)*

*Направленность (профиль)
«Математика и Информатика»*

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.88:514](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.151.5я73
П 47

Позднякова Е.В.
П 47 Решение задач единого государственного экзамена по математике: методические рекомендации по выполнению контрольной работы для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профиль «Математика и Информатика») / Е.В. Позднякова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 43 с.

В работе изложены методические рекомендации по выполнению контрольной работы по дисциплине «Решение задач единого государственного экзамена по математике»: некоторые приемы и методы решения задач повышенного уровня сложности, варианты контрольной работы и образцы их решения, методические рекомендации по решению и оформлению работы, оценивание работы в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы, современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика и Информатика».

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 5 от 10.12.2020

Заведующий каф. МФММ
__________ / Е.В.Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 5 от 17.12.2020

Председатель методической комиссии ФИМЭ
__________/Г.Н.Бойченко

УДК [378.147.88:514](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.151.5я73
П 47

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профиль «Математика и Информатика») и направлены на оказание помощи студентам в выполнении контрольной работы по дисциплине "Решение задач единого государственного экзамена по математике", которая относится к вариативной части учебного плана и является дисциплиной по выбору.

Методические указания подготовлены на основе Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования в соответствии с учебным планом направлений подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)» (уровень бакалавриата) и рабочей учебной программы по предмету, они разработаны для студентов очной и заочной форм обучения.

Целью изучения дисциплины "Решение задач единого государственного экзамена по математике" является: формирование математической культуры студента, вооружение конкретными знаниями, умениями и навыками, дающими возможность преподавать математику в школе, осуществлять квалифицированную подготовку учащихся к государственной итоговой аттестации по математике.

В результате освоения дисциплины у обучающегося должны быть сформированы профессиональные (ПК) и специальные профессиональные (СПК) компетенции, обеспечивающие готовность к реализации образовательного процесса в предметной области "Математика":

- ПК-2: способен использовать современные методы и технологии обучения и диагностики;

- СПК-2: способен осуществлять разработку и реализацию образовательных программ основного и среднего общего образования по математике на основе специальных научных знаний в предметной области “Математика”

Студент, изучивший дисциплину «Решение задач единого государственного экзамена по математике», должен:

Знать:

- содержание и методы решения задач основных разделов элементарной математики, в том числе задач повышенного уровня сложности, включенных в задания единого государственного экзамена профильного уровня;

Уметь:

- решать задачи повышенного уровня сложности школьного курса математики на основе конструирования новых или реконструкции уже известных способов, приемов и методов;

Владеть:

- стандартными и нестандартными приемами и методами решения задач повышенного уровня сложности, включенных в задания единого государственного экзамена по математике профильного уровня.

В методические рекомендации включено:

1) некоторые приемы и методы решения математических задач повышенного уровня сложности (прием отбора корней тригонометрических уравнений с помощью числовой окружности, метод координат при решении задач стереометрии, метод рационализации при решении показательных и логарифмических неравенств, приемы решения планиметрических задач с помощью теорем Менелая и Чевы, приемы решения банковских задач на кредиты);
2) особенности оценивания контрольной работы в балльно-рейтинговой системе;
3) варианты контрольной работы и образцы их решения;
4) требования к выполнению и оформлению контрольной работы;
5) список рекомендуемой литературы

6) список современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.

Теоретические сведения по дисциплине иллюстрируются соответствующими примерами, необходимыми чертежами.

Список литературы для самостоятельной работы включает современные источники; указана литература основная и дополнительная. Помощь в изучении дисциплины могут оказать рекомендуемые профессиональные базы данных, информационные справочные системы.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ (ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ)

Задача 13. Отбор корней при решении тригонометрических уравнений с помощью числовой окружности

Алгоритм отбора корней с помощью числовой окружности:

1. Построить числовую окружность (схематично).
2. Отметить на окружности промежуток (дуга окружности) в соответствии с условием задачи.
3. Изобразить точками на числовой окружности все получившиеся корни, выделяя из них попавшие в данный промежуток.
4. Назвать эти корни в соответствии с границами промежутка.
5. Записать в ответ полученные корни.

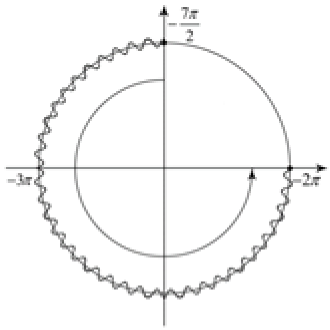


Рисунок 1. Иллюстрация к пункту 2

Рассмотрим использование предложенного алгоритма на конкретном примере. Пусть при решении уравнения был получен ответ: $\pm\arccos\left(-\frac{2}{7}\right)+2\pi n,\ \ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in z$. Нужно отобрать корни, принадлежащие промежутку $[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi]$ [1].

Решение:

1. Строим числовую окружность.
2. Отмечаем на окружности начало промежутка $-\frac{7\pi}{2}$ (рис. 1), затем движемся по

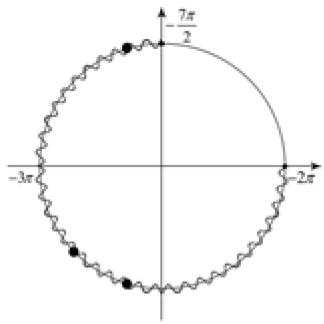


Рисунок 2. Иллюстрация к пункту 3

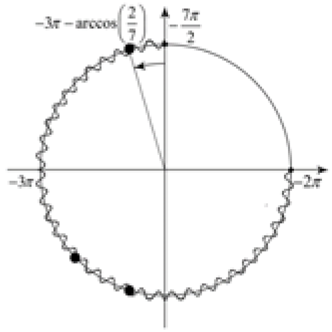


Рисунок 3. Иллюстрация к пункту 4

окружности в положительном направлении (против часовой стрелки), пока не доходим до правого конца промежутка -2π, после этого выделяем на окружности заданный промежуток. Для удобства отмечаем точку -3π, так как она находится в нашем промежутке и поможет в дальнейшей записи решения.

3. Отмечаем точками на окружности (рис. 2) только те корни, полученные при решении уравнения, которые попадают в заданный промежуток. Для удобства сначала не подписываем их.

4. В соответствии с рисунком 3, движемся от точки -3π до первой отмеченной точки. При этом замечаем, что нам нужно пройти дугу равную $\arccos\left(\frac{2}{7}\right)$, так как движение идет по часовой стрелке, то величину дуги берем со знаком «минус». Значит, первый отобранный корень равен $-3\pi - \arccos\left(\frac{2}{7}\right)$. Подписываем его на окружности и выписываем как один из отобранных корней.

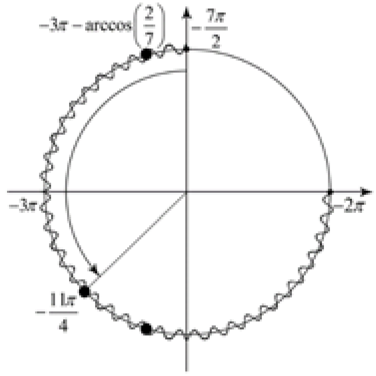


Рисунок 4. Иллюстрация к пункту 4

В соответствии с рисунком 4, во вторую отмеченную точку попадаем, когда проходим после числа -3π дугу равную $\frac{\pi}{4}$ (против часовой стрелки). Следовательно, этот корень равен $-3\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{11\pi}{4}$. Подписываем его на окружности, и выписываем в список отобранных корней.

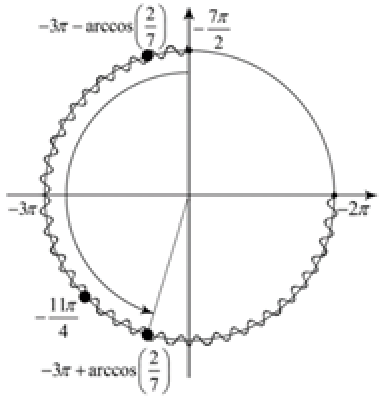


Рисунок 5. Иллюстрация к пункту 4

В соответствии с рисунком 5, в третью точку мы попадаем, когда проходим от точки -3π дугу равную $\arccos\left(\frac{2}{7}\right)$ (против часовой стрелки). Соответственно, этот корень равен $-3\pi + \arccos\left(\frac{2}{7}\right)$. Подписываем и заносим в список.

5. Так как других корней на заданном промежутке нет, записываем ответ: $-3\pi + \arccos\left(\frac{2}{7}\right)$; $-\frac{11\pi}{4}$; $-3\pi + \arccos(\frac{2}{7})$.

Задача 14. Метод координат при решении задач стереометрии

Алгоритм решения задач методом координат

1. Ввести прямоугольную систему координат (выбор зависит от объекта).
2. Выписать координаты всех необходимых точек.
3. Вычислить координаты необходимых векторов.
4. Применить формулу, выполнить вычисления.
5. Записать ответ.

Примеры удобного задания системы координат

- Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

  A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 1; 0), D(0;1;0), A_1(0; 0;1), B_1(1; 0;1), C_1(1; 1; 1), D_1(0; 1; 1). (рис.6)

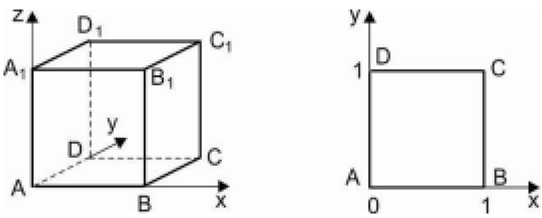


Рисунок 6. Координаты вершин единичного куба

- Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1

A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C($\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0), A_1(0; 0;1), B_1(1; 0;1), C_1($\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1). (рис.7)

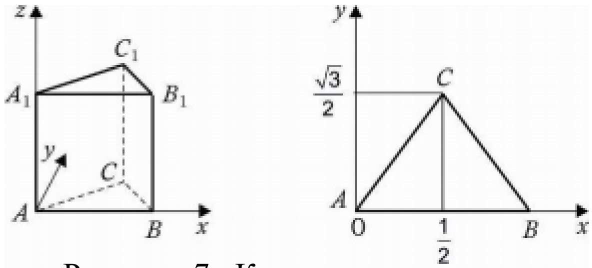


Рисунок 7. Координаты вершин правильной треугольной призмы

- Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1

A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C($\frac{3}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0), D(1; $\sqrt{3}$; 0), $E(0; \sqrt{3}; 0)$, F($-\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0), A_1(0; 0;1), B_1(1; 0;1), C_1($\frac{3}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1),

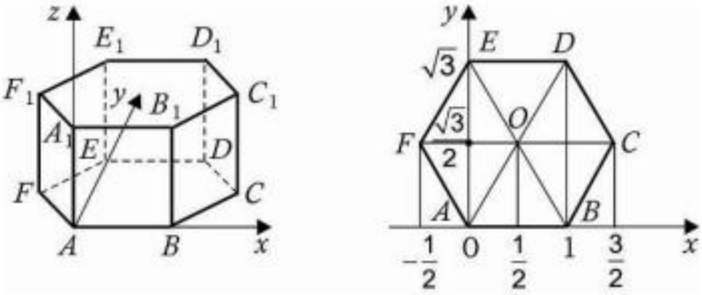


Рисунок 8. Координаты вершин правильной шестиугольной призмы

$D_1(1;\ \sqrt{3}; 0)$, $E_1(0;\ \sqrt{3}; 0)$, $F_1(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$. (рис.8)

- Правильная треугольная пирамида ABCD, все ребра которой равны 1

$A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $C(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $D(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$. (рис.9)

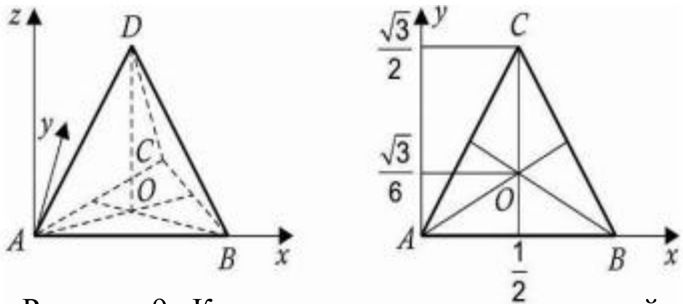


Рисунок 9. Координаты вершин правильной треугольной пирамиды

- Правильная четырехугольная пирамида SABCD, все ребра которой равны 1.

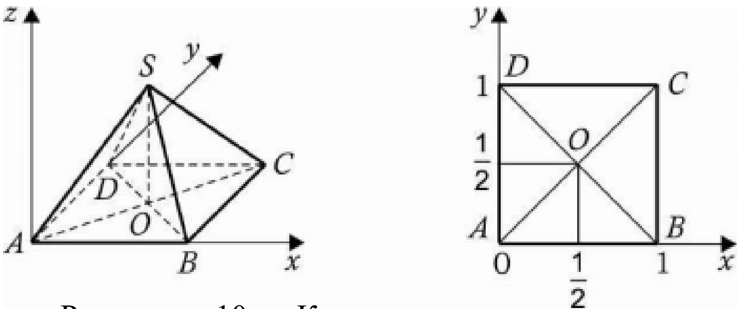


Рисунок 10. Координаты вершин правильной четырехугольной пирамиды

$A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1;1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $S(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2})$. (рис.10)

- Правильная шестиугольная пирамида SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2.

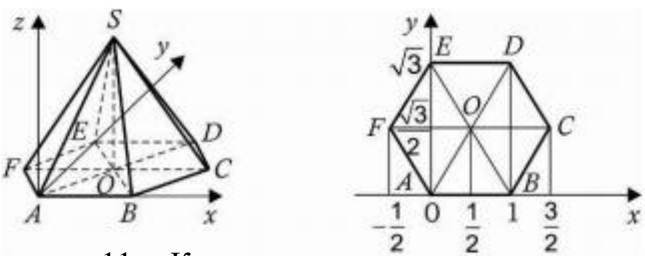


Рисунок 11. Координаты вершин правильной шестиугольной пирамиды

$A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $C(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0)$, $D(1;\ \ \sqrt{3}; 0)$, $E(0;\ \sqrt{3}; 0)$, $F(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, , $S(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{3})$. (рис.11)

Способы решения стереометрических задач методом координат

- Нахождение угла между скрещивающимися прямыми с направляющими векторами $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$

$$cos\varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

- Нахождение угла между прямой и плоскостью

$$sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$\vec{n}\,\{A, B, C\}$ – вектор нормали плоскости, $\vec{p}\{l, m, n\}$ – направляющий вектор прямой

- Нахождение угла между двумя плоскостями

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$\vec{n}_1\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$, $\vec{n}_2\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ – векторы нормали плоскостей

- Доказательство параллельности двух плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

- Доказательство перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

- Нахождение расстояния от точки до плоскости

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$(x_0;\ y_0;\ z_0) -$ координаты точки, $\vec{n}\,\{A, B, C\}$ – вектор нормали плоскости

- Нахождение расстояния между двумя параллельными плоскостями $Ax+By+Cz+D_1=0$ и $Ax+By+Cz+D_2=0$

$$d=\frac{\left|D_1-D_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

- Доказательство параллельности двух прямых с направляющими векторами $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

- Доказательство перпендикулярности двух прямых с направляющими векторами $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$:

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$

- Доказательство перпендикулярности прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскости *Ax+By+Cz+D=0:*

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$$

- Доказательство параллельности прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскости *Ax+By+Cz+D=0:*

$$Al+Bm+Cn=0$$

- Нахождение расстояния между двумя точками A($x_1;\ y_1;\ z_1$) и B($x_2;\ y_2;\ z_2$)

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Задача 1: Дана правильная треугольная призма ABCFDE, ребра которой равны 2. Точка G - середина ребра CE.

а) Докажите, что прямые AD и BG перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AD и BG.

Решение

а) Введем систему координат и определим координаты вершин призмы.

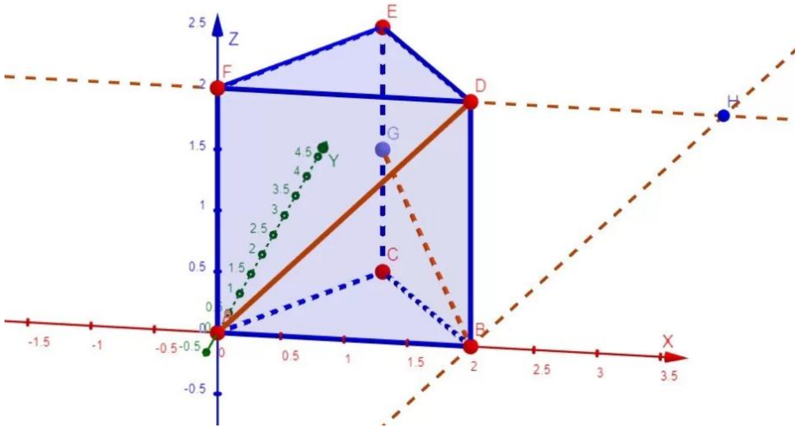


Рисунок 12. Чертеж к задаче 1

A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(2; 0; 2), G(1; $\sqrt{3}$; 1) (рис.12).

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AD}\{2;0;2\}, \overrightarrow{BG}\{-1;\ \sqrt{3};1\}$

Найдем косинус угла между этими векторами по формуле

$$cos\varphi=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

$cos\varphi=\frac{|-2+2|}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}}=0$, значит прямые AD и BG перпендикулярны.

б) Для того, чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми необходимо провести плоскость, проходящую через одну из прямых параллельно первой прямой.

Выполним параллельный перенос прямой DA в точку B. Получим прямую BH, где точка H лежит на продолжении ребра FD, потому что BH, очевидно, лежит в плоскости грани ABD, как прямая, параллельная AD, и проходящая через точку B.

Искомая плоскость, проходящая через прямую BG, и параллельная прямой AD, будет проходить через три точки: B, G и H. Координаты точек B и G мы уже находили. Найдем координаты точки H. Так как ADHE параллелограмм по построению, то DH=AB:
H(4;0,2).

Уравнение плоскости получим из системы уравнений, подставив в общее уравнение плоскости найденные координаты точек B, G и H.

$$\begin{cases} A \cdot 2 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + 1 = 0 \\ A \cdot 1 + B \cdot \sqrt{3} + C \cdot 1 + 1 = 0 \\ A \cdot 4 + B \cdot 0 + C \cdot 2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$A = -\frac{1}{2};\ B = -\frac{1}{\sqrt{3}};\ C = \frac{1}{2};\ \ D = 1$$

Уравнение плоскости: $-\frac{1}{2}\text{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{2}z + 1 = 0$

Найдем расстояние от любой точки на прямой AD до найденной плоскости, это и будет искомым расстоянием между скрещивающимися прямыми AD и BG. Очевидно, на прямой AD удобнее всего выбрать точку A(0;0;0).

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{\left|-\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Задача 15. Метод рационализации при решении показательных и логарифмических неравенств

Метод рационализации для показательной функции. Если левая часть неравенства представлена в виде произведения некоторых множителей, а справа стоит ноль, то множители вида $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ можно заменить на произведение двух скобок: $(a-1)(f(x)-g(x))$

Пример. Неравенство $(2^x-1)(0{,}25^x-16)(5x^2-9x-2)\leqslant 0$ равносильно неравенству $(2^x-2^0)(0{,}25^x-0{,}25^{-2})(5x^2-9x-2)\leqslant 0$, которое по методу рационализации можно переписать в виде $(3-1)(x-0)(0{,}25-1)(x-(-2))(5x+1)(x-2)\leqslant 0$

Метод рационализации для логарифмической функции. Последовательность решения неравенств

1) находим ОДЗ неравенства;

2) решаем неравенство, как будто ОДЗ выполнено;

3) пересекаем полученный ответ с ОДЗ и получаем итоговый ответ.

Суть метода рационализации:

1) если левая часть неравенства представлена в виде произведения некоторых множителей, а справа стоит ноль, то множители вида $log_a f(x) - log_a g(x)$ можно заменить на произведение двух скобок: $(a-1)(f(x)-g(x))$ (при условии выполнения ОДЗ);

2) если левая часть неравенства представлена в виде произведения некоторых множителей, а справа стоит ноль, то множители вида $log_a f(x)$ можно заменить на произведение двух скобок: $(a-1)(f(x)-1)$ (при условии выполнения ОДЗ).

Пример. Неравенство $(3+x-2x^2)log_{x+2}(3x+5)\geq 0$ с помощью метода рационализации можно представить в виде:

$$\begin{cases} (3+x-2x^2)(x+2-1)(3x+5-1)\geq 0 \\ x+2>0 \\ x+2\neq 1 \\ 3x+5>0 \end{cases}$$

Формулы сведения логарифмических неравенств к рациональным представлены в таблице 1.

Таблица 1. Формулы сведения логарифмических неравенств к рациональным неравенствам

$$\log_a A - \log_a B \lozenge 0 \Rightarrow (a-1)(A-B) \lozenge 0$$
$$\log_a A - 1 \lozenge 0 \Rightarrow (a-1)(A-a) \lozenge 0$$
$$\log_a A \lozenge 0 \Rightarrow (a-1)(A-1) \lozenge 0$$
$$\log_a A + B \lozenge 0 \Rightarrow (a-1)(Aa^B - 1) \lozenge 0$$
$$\log_a A - B \lozenge 0 \Rightarrow (a-1)(A - a^B) \lozenge 0$$
$$\log_a A + \log_a B \lozenge 0 \Rightarrow (a-1)(A \cdot B - 1) \lozenge 0$$
$$\log_a A \cdot \log_b B \lozenge 0 \Rightarrow (a-1)(A-1)(b-1)(B-1) \lozenge 0$$

Задача 16. Теоремы Менелая и Чевы при решении планиметрических задач

В заданиях ЕГЭ по математике профильного уровня встречаются планиметрические задачи повышенного уровня сложности, процесс решения которых значительно упрощается, если применить теорему Менелая или теорему Чевы.

Теорема Менелая:

Пусть прямая пересекает произвольный треугольник ABC, C_1 – точка ее пересечения со стороной AB, A_1 – точка ее пересечения со стороной BC и B_1 – точка ее пересечения с продолжением стороны AC. (рис. 13)

Тогда выполняется равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

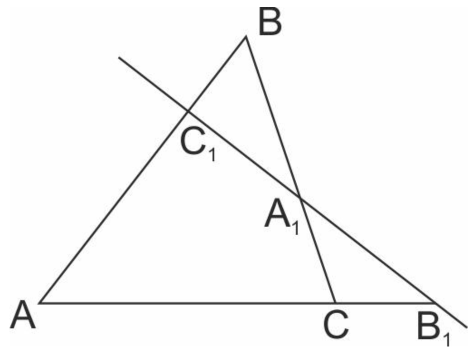


Рисунок 13. Чертеж к теореме Менелая

Обратная теорема Менелая. Пусть дан треугольник ABC. Предположим, что точка C_1 лежит на стороне AB, точка A_1 лежит на стороне BC, а точка B_1 лежит на продолжении стороны AC, и выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Тогда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Теорема Чевы

Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, при этом отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. (рис.14) Тогда выполняется равенство:

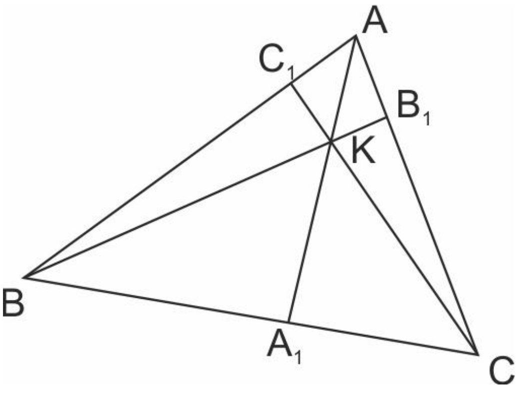


Рисунок 14. Чертеж к теореме Чевы

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Обратная теорема Чевы. Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, и выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Тогда отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Задача 2. В треугольнике ABC высота BD=5, медиана CE=6,5. Пусть K – точка пересечения BD и CE. Расстояние от точки K до стороны AC равно 1.

а) Докажите, что CD:AD=1:3

б) Найдите площадь треугольника BKC.

Решение

а) Применим теорему Менелая для треугольника ABD (рис.15):

$$\frac{BK}{KD}\cdot\frac{DC}{CA}\cdot\frac{AE}{EB}=1$$

$$\frac{4}{1}\cdot\frac{DC}{CA}\cdot\frac{1}{1}=1$$

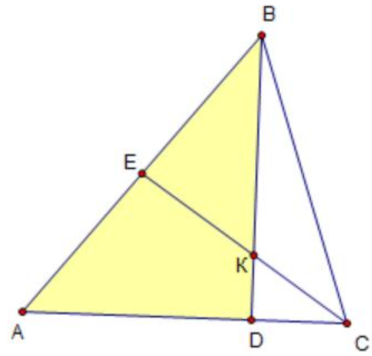


Рисунок 15. Чертеж к задаче 2 (пункт а)

$$\frac{DC}{CA} = \frac{1}{4}$$

Следовательно, $\frac{DC}{AD} = \frac{1}{3}$

б) Треугольники DKC и FEC подобны (рис.16):

$$\frac{\text{СК}}{\text{EC}} = \frac{DC}{FC} = \frac{x}{2{,}5x} = \frac{1}{2{,}5}$$

$KC = \frac{EC}{2{,}5} = \frac{6{,}5}{2{,}5}$ =2,6

Найдем DC по теореме Пифагора:

DC=$\sqrt{\text{КС}^2 - KD^2} = 2{,}4$

$$S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2} BK \cdot DC$$

$$S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2} 4 \cdot 2{,}4 = 4{,}8$$

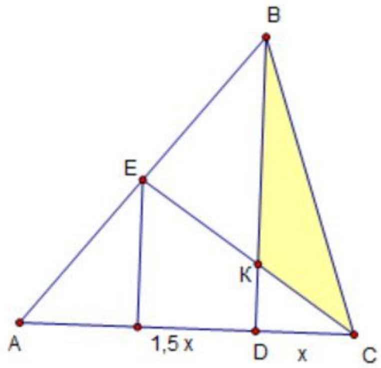


Рисунок 16. Чертеж к задаче 2 (пункт б)

Задача 17. Приемы решения банковских задач на кредиты

Одной из групп задачи 17 ЕГЭ профильного уровня являются банковские задачи на кредиты:

1) нахождение количества лет выплаты кредита;

2) вычисление процентной ставки по кредиту;

3) нахождение суммы кредита;

4) нахождение ежегодного транша.

Рассмотрим некоторые особенности решения задач этой группы. Если изначальный размер кредита обозначить за S, то процент банка примем равным за p%. Тогда ежегодная выплата по кредиту будет равна x; тогда через год после начисления процентов и выплаты суммы x размер долга составит: $S\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x$. Обозначим $k = 1 + \frac{p}{100}$. Тогда через 2 года размер долга составит: $(Sk - x)k - x$; через три года: $(Sk^2 - xk - x)k - x$; через четыре года: $(Sk^3 - xk^2 - xk - x)k - x$; через n лет: $Sk^n - x(k^{n-1} + \cdots + k^3 + k^2 + k + 1)$. Для подсчета величины в скобках иногда применяется формула суммы n членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, тогда размер долга через n лет составляет $Sk^n - \frac{x(1-k^n)}{1-k}$

.

Задача 3. 31 декабря Дмитрий взял в банке 429 000 рублей в кредит под 14,5 % годовых. Схема выплаты следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5 %), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными ежегодными платежами (то есть за 2 года)?

Решение:

Если сумма кредита – S, процентная ставка – p, ежегодный платеж (транш) – x, тогда сумма долга ежегодно увеличивается:

Год	**Сумма долга по кредиту в начале года**	**Сумма долга с начисленными процентами в конце года**	**Остаток**
1	S	$S\left(1+\frac{p}{100}\right)$ Если $k = 1 + \frac{p}{100}$, то Sk	$S\left(1+\frac{p}{100}\right)$-x Если $k = 1 + \frac{p}{100}$, то Sk-x
2	Sk-x	$(Sk-x)k = Sk^2 - xk$	$Sk^2 - xk - x$

$$Sk^2 - xk - x = 0$$

$$Sk^2 - x(k+1) = 0$$

$$x = \frac{Sk^2}{k+1}$$

$$x = \frac{429000 \cdot 1{,}145^2}{2{,}145} = 262205$$

Ответ: по 262205 рублей в год.

Большие затруднения в ходе решения вызывают задачи, в которых сумма долга уменьшается равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. В этих задачах идет речь о *дифференцированном платеже*. При таком типе платежа клиент отдает основной долг равными частями. Каждая выплата состоит из двух частей: а) выплата основного долга, которая равна сумме, взятой в кредит, деленной на количество платежей; б) проценты на оставшуюся часть долга. Первая часть платежа остается неизменной, а вторая меняется с каждым платежом. Поскольку с каждой выплатой размер оставшейся части долга уменьшается, соответственно, после каждой очередной выплаты уменьшается размер выплаты процентов по кредиту. Для нахождения суммы денег, выплаченных сверх кредита в счет уплаты процентов, удобно использовать формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии. При решении таких задач удобно использовать следующую таблицу.

№ месяца (года)	**Выплата по основному долгу**	**Выплата по процентам**
1	$\frac{S}{n}$	Sr
2	$\frac{S}{n}$	$\frac{n-1}{n}Sr$
3	$\frac{S}{n}$	$\frac{n-2}{n}Sr$
…	…	…
n	$\frac{S}{n}$	$\frac{1}{n}Sr$
итого	P	$Sr(1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{1}{n})$

S – сумма кредита; n – количество сроков действия кредита (лет, месяцев); r $=\frac{p}{100}$ – процентная ставка.

Задача 4. 10-го марта клиент взял кредит в банке на следующих условиях:

- срок кредита 24 месяца;
- 1-го числа каждого следующего месяца долг возрастает на 1,2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 9-ое число каждого месяца следует погасить часть долга, так чтобы на 10-ое число каждого месяца долг уменьшался на одну и ту же сумму.

Какая сумма была взята в кредит, если известно, что общая сумму выплат равняется 1,035 млн. рублей?

Решение:

Общую сумму выплат можно разделить на две части: основной долг (сумма, взятая в кредит) и выплата по процентам. Причем основной долг разбит на 24 равных платежа. Для наглядности составим таблицу, предварительно обозначив за x – сумму, взятую в кредит. Тогда по условию задачи долг каждый месяц должен уменьшаться ровно на $\frac{x}{24}$ (руб). Используем для решения задачи таблицу 2.

№ месяца (года)	Выплата по основному долгу	Выплата по процентам
1	$\frac{x}{24}$	$x \cdot 0{,}012$
2	$\frac{x}{24}$	$\frac{23}{24}x \cdot 0{,}012$
3	$\frac{x}{24}$	$\frac{22}{24}x \cdot 0{,}012$
…	…	…
24	$\frac{x}{24}$	$\frac{1}{24}x \cdot 0{,}012$
итого	x	$x \cdot 0{,}012(1 + \frac{23}{24} + \frac{22}{24} + \cdots + \frac{1}{24})$

Составим уравнение: (при этом фиксированную часть долга сложим отдельно, а проценты – отдельно и вынесем общий множитель 0,012):

$1035000 = x + x \cdot 0{,}012(1 + \frac{23}{24} + \frac{22}{24} + \cdots + \frac{1}{24})$, тогда в скобках – сумма n первых членов арифметической прогрессии, в которой: $a_1 = 1, a_n = \frac{1}{24}$; $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$

$$1035000 = x + x \cdot 0{,}012 \cdot \frac{1 + \frac{1}{24}}{2} \cdot 24$$

$$x = 900000$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ»

Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания контрольной работы

Контрольная работа является промежуточной формой контроля знаний студентов и представляет собой письменное выполнение определенных заданий. Она предназначена для проверки знаний студентов по учебной дисциплине “Решение задач единого государственного экзамена по математике”, а также служит для закрепления полученных знаний, умений и навыков. В контрольной работе студентам предлагаются задачи, сформулированные на основании материала, изложенного в лекциях, проработанного на практических занятиях или самостоятельно изученного студентами.

Контрольная работа направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий;

- развитие навыков самоорганизации и самоконтроля;

- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

- оценка сформированности профессиональных компетенций и умений самостоятельной учебной и поисковой деятельности.

В работе представлено 10 вариантов заданий контрольной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними. В каждом из десяти вариантов содержится пять задач, содержание которых соответствует заданиям ЕГЭ по математике повышенного уровня сложности: первое задание (задача 13 ЕГЭ профильного уровня) – решение тригонометрического уравнения и отбор корней на заданном промежутке; второе задание (задача 14 ЕГЭ профильного уровня) – решение стереометрической задачи методом координат; третье задание (задача 15 ЕГЭ профильного уровня) – решение логарифмического или показательного неравенства методом рационализации; четвертое задание (задача 16 ЕГЭ профильного уровня) – решение планиметрической задачи с помощью теоремы Менелая или Чевы; пятое задание – решение банковской задачи на кредиты.

За правильное выполнение первого и второго и третьего заданий выставляется по два балла. Четвертое и пятое задания оцениваются в три балла.

Система оценивания заданий контрольной работы представлена в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание домашней контрольной работы в БРС

№ задания	Характеристика задания	Критерии оценивания	Баллы

1	Решить тригонометрическое уравнение. Найти все корни этого уравнения, принадлежащие заданному промежутку	Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б)	2
		Обоснованной получен верный ответ в пункте а) ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а) и пункта б)	1
2	Доказать утверждение для заданной геометрической конфигурации в пространстве. Найти заданную геометрическую величину (длину, площадь, угол, объем), применив метод координат	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
		Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б), возможно, с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
3	Решить логарифмическое (или показательное) неравенство методом рационализации	Обоснованно получен верный ответ	2
		Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
4	Доказать утверждение для заданной геометрической конфигурации на плоскости. Найти заданную геометрическую величину (длину, площадь, угол, объем), применив теорему Менелая или Чевы	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
		Обоснованно получен верный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный	2

		ответ из-за арифметической ошибки	
		Имеется верное утверждение пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованной получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
5	Решить банковскую задачу на кредиты.	Обоснованно получен верный ответ	3
		Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: - неверный ответ из-за вычислительной ошибки; - верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
		Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
ИТОГО			максимум 12

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

1. Контрольная работы выполняется на отдельных листах, которые должны быть скреплены, или в отдельной тетради синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя). Допускается выполнение работы в электронном виде.

2. В начале первого листа (или на обложке тетради) должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и

группы студента, название дисциплины, номер варианта контрольной работы.

Например:

Контрольная работа по геометрии

“Решение задач единого государственного экзамена по математике”

студентки факультета информатики, математики и экономики

4 курса группы МИа-18 Ивановой Елизаветы Валерьевны

Вариант 1

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы.

4. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы.

5. Решение задачи нужно сопровождать формулами, ссылками на соответствующие утверждения и теоремы, развернутыми расчетами и пояснениями к ним. Чертежи обязательны, желательно при построении чертежа применять цвет. Чертежи можно выполнять с помощью компьютерных программ (например “Живая математика” или “GeoGebra”).

6. Задачи №№ 1, 2, 3 оцениваются в 2 балла. Задачи №№ 4, 5 оценивается в 3 балла. Таким образом, максимально за контрольную работу можно набрать 12 баллов. Если набрано менее 6 баллов (выполнено верно меньше половины работы), то работу необходимо переделать.

7. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком.

Варианты контрольной работы

ВАРИАНТ 1

1. а) Решить уравнение sin x + sin 2x + sin 3x + sin 4x = 0.

   б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{\pi}{2};\ \pi]$

2. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 2 : 5$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 6$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что AB = 5, AD = 6, $AA_1 = 14$.

   а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

   б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

Решить задачу методом координат.

3. Решить неравенство $(x^2 + 5x - 6) \cdot log_{0,5}(x^2 - 1) \cdot log_{x^2-1}(x + 2) \leq 0$ методом рационализации.

4. В параллелограмме ABCD точка M — середина стороны AD, P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC.

   а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB.

   б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q. Найдите отношение PM : BQ, если AB : AC = 1 : 3.

Применить теорему Менелая или Чевы.

5. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

ВАРИАНТ 2

1. а) Решить уравнение $sin^2x - 4sinxcosx + 3cos^2x = 0$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[3\pi; 4\pi]$

2. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=1:2$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решить задачу методом координат.

3. Решить неравенство $(x^2+3x-4)\cdot log_2(x^2-1)\cdot log_{x^2-1}(x+3)\geq 0$ методом рационализации

4. Биссектриса AD треугольника ABC делит его медиану BM пополам.

а) Докажите, что площадь треугольника ACD вдвое больше площади треугольника ABD.

б) В каком отношении медиана BM делит биссектрису AD?

Применить теорему Менелая или Чевы.

5. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 399300 рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (т. е. за три года)?

ВАРИАНТ 3

1. а) Решить уравнение $5sin^2x+\sqrt{3}sinxcosx+6cos^2x=5$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$

2. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=1:3$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решить задачу методом координат.

3. Решить неравенство $log_{x+1}2 \geq \frac{1}{log_x(x+1)}$ методом рационализации.

4. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC, причем CM : MB = 1 : 2. Биссектриса CK перпендикулярна прямой AM.

а) Докажите, что площадь треугольника ACK втрое меньше площади треугольника BCK.

б) В каком отношении прямая AM делит биссектрису CK?

Применить теорему Менелая или Чевы.

5. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 207 360 рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т.е. за четыре года)?

ВАРИАНТ 4

1. а) Решить уравнение $3sin^2 2x - 2 = sin2xcos2x$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[3\pi; \frac{7\pi}{2}]$

2. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями B_1CE_1 и ABC.

Решить задачу методом координат.

3. Решить неравенство $log_{8-4x}(16x^2 - 8x + 1) \leq 2$ методом рационализации.

4. На сторонах AD и BC параллелограмма ABCD взяты соответственно точки M и N, причем M — середина AD, а BN : NC = 1 : 3.

а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.

б) Найдите площадь четырехугольника, образованного пересечениями прямых AN, AC, BD и BC, если площадь параллелограмма ABCD равна 40.

Применить теорему Менелая или теорему Чевы.

5. 31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

ВАРИАНТ 5

1. а) Решить уравнение $3sin^2\frac{x}{3}+4cos^2\frac{x}{3}=3+\sqrt{3}sin\frac{x}{3}cos\frac{x}{3}$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $-4\pi;-2\pi]$

2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат ABCD со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1, причём BE = 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Решить задачу методом координат.

3. Решить неравенство $log_{x-2}(x+3)\ \geq \frac{1}{log_{x^2}(x-2)}$ методом рационализации.

4. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причем $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырехугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 2$.

Применить теорему Менелая или теорему Чевы.

5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100 000 рублей.

Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 75 000 рублей, а во второй год—46 000 рублей. Найдите число r.

ВАРИАНТ 6

1. а) Решить уравнение $\frac{\sqrt{3}}{2}cosx - \frac{1}{2}sinx = 1$

   б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; 3\pi]$

2. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 4 : 3$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 5$, $AD = 8$, $AA_1 = 14$.

   а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 2 : 5.

   б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

Решить задачу методом координат.

3. Решить неравенство $(4^{x^2-x-6} - 1) \cdot log_{x-1}(2x^2 - x) \geq 0$ методом рационализации.

4. На сторонах AD и BC параллелограмма ABCD взяты соответственно точки M и N, причем M — середина AD, а BN: NC = 1: 3.

   а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.

   б) Найдите площадь четырехугольника, вершины которого находятся в точках C, N и точках пересечения прямой BM с прямыми AN и AC, если площадь параллелограмма ABCD равна 48.

Применить теорему Менелая или Чевы.

5. Георгий взял кредит в банке на сумму 804 000 рублей. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Георгий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Георгий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Георгий заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.

ВАРИАНТ 7

1. а) Решить уравнение $sin2xcos3x + cos2xsin3x = cos5x$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0; \frac{\pi}{5}]$

2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат ABCD со стороной 4, а высота призмы равна $\sqrt{17}$. Точка E лежит на диагонали BD_1, причём BE = 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью ABC.

Решить задачу методом координат.

3. Решить неравенство $(4^{x^2-x-6}-1)\cdot log_{x-1}(3x^2-2x)\geq 0$ методом рационализации.

4. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причем $AB_1:B_1C=AC_1:C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырехугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1:B_1C=AC_1:C_1B$ =1: 4.

Применить теорему Менелая или Чевы.

5. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита (в млн рублей), при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 8 млн.

ВАРИАНТ 8

1. а) Решить уравнение $2cos2x+4\sqrt{3}cosx-7=0$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

2. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что AM = 2. На ребре BB_1 взята точка K так, что B_1K = 2.

а) Постройте сечение призмы плоскостью D_1MK.

б) Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.

Решить задачу методом координат.

3. Решить неравенство $\frac{8^x-5\cdot 2^x}{(x^2-1)(2^x-2^{4-x})}\geq 0$ методом рационализации.

4. На диагонали BD параллелограмма ABCD отмечены точки P и Q, причем BP = PQ = QD.

а) Докажите, что прямые AP и AQ проходят через середины M и N сторон BC и CD соответственно.

б) Найдите отношение площади пятиугольника CMPQN к площади параллелограмма ABCD.

Применить теорему Менелая или Чевы.

5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

• в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший—не менее 0,6 млн рублей.

ВАРИАНТ 9

1. а) Решить уравнение $cos^2x-\frac{1}{2}sin2x+cosx=sinx$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[\frac{\pi}{2};2\pi]$

2. В основании пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со стороной AB= 4 и диагональю BD =7. Все боковые ребра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания ABCD отмечена точка E, а на ребре AS – точка F так, что SF= BE = 3.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

Решить задачу методом координат.

3. Решить неравенство $log_{x^2+x}\sqrt{x^2-4x+4} \leq 0{,}5$ методом рационализации.

4. Площадь треугольника ABC равна 12. На прямой AC взята точка D так, что точка C является серединой отрезка AD. Точка K — середина стороны AB, прямая KD пересекает сторону BC в точке L.

а) Докажите, что BL : LC = 2 : 1.

б) Найдите площадь треугольника BLK.

Применить теорему Менелая или Чевы.

5. В июле 2017 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей (где S—натуральное число) сроком на 3 года. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в тыс. руб.)	S	0,7S	0,4S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

ВАРИАНТ 10

1. а) Решить уравнение $sin2x + \sqrt{2}sinx = 2cosx + \sqrt{2}$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На ребрах B_1C_1 и AB отмечены точки P и Q соответственно, причем $PC_1=3$, $AQ=4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра BC.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ.

Решить задачу методом координат.

3. Решить неравенство $\frac{15^x-3^{x+1}-5^{x+1}+15}{-x^2+2x} \geq 0$ методом рационализации.

4. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC (AB = BC) пересекаются в точке K. Известно, что CK = 5, KH = 1.

а) Докажите, что AH : BH = 1 : 4.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

Применить теорему Менелая или Чевы.

5. 15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего месяца, где r—целое число;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль
Долг (в млн. руб)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором сумма выплат будет меньше 1,25 млн. руб.

Образец решения варианта контрольной работы

Вариант 0

1. а) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=1.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{\pi}{2};\ \pi]$

Решение

Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0,$$

$$x-\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,$$

$$x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,$$

$$x\neq\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

Данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin 3x=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)=0,$$

$$2\cos\frac{x-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}-3x}{2}\cdot\cos\frac{x-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{2}+3x}{2}=0,$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\cdot\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)=0,$$

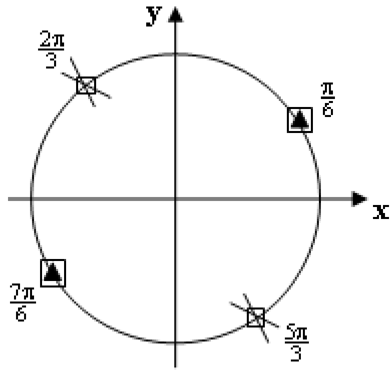


Рисунок 17. Корни уравнения на числовой окружности

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=0,\\ \cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,\\ 2x=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z,\\ x=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi m}{2}, m\in Z.\end{array}\right.$$

Отметим на координатной окружности корни уравнения, учитывая ОДЗ (рис.17).

Оставшиеся решения можно записать формулой x = $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

б) Найдем корни данного уравнения на заданном промежутке $[-\frac{\pi}{2};\ \pi]$ с помощью числовой окружности (рис.18):

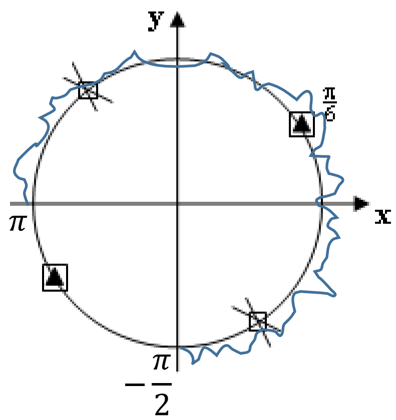


Рисунок 18. Отбор корней на заданном промежутке

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; б) $\frac{\pi}{6}$

2. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Решить задачу методом координат.

Решение:

а) Сделаем чертеж (рис.19).

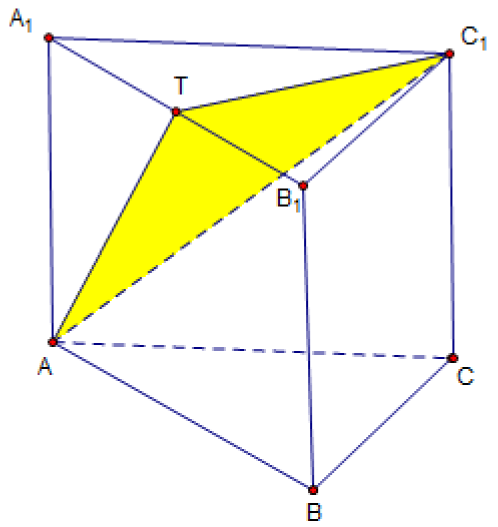


Рисунок 19. Чертеж к стереометрической задаче (пункт а)

- Рассмотрим треугольник AA_1T – прямоугольный. $AT^2 = A_1A^2 + A_1T^2$ (по теореме Пифагора)

$$AT^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

- Рассмотрим треугольник A_1TC_1 – прямоугольный. $C_1T^2 = A_1C_1{}^2 - A_1T^2$ (по теореме Пифагора)

$$C_1T^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

- Рассмотрим треугольник ACC_1 – прямоугольный. $C_1A^2 = AC^2 + C_1C^2$ (по теореме Пифагора)

$$C_1A^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

Замечаем, что $C_1A^2 = C_1T^2 + AT^2$, следовательно, треугольник ATC_1 – прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора).

б) Для нахождения угла между плоскостью сечения и плоскостью ABC воспользуемся методом координат (рис.20).

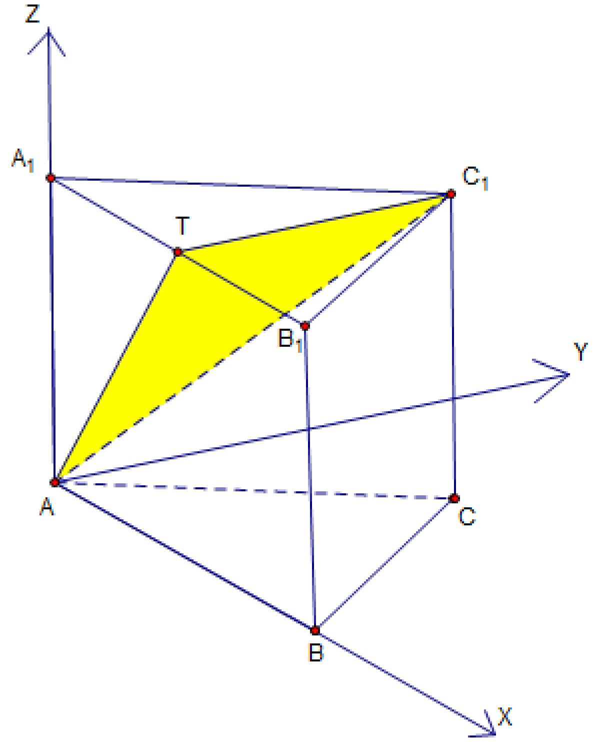


Рисунок 20. Чертеж к стереометрической задаче (пункт б)

Определим координаты вершин призмы:

A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), C(1; $\sqrt{3}$; 0), A_1(0; 0; 3), B_1(2; 0; 3), C_1(1; $\sqrt{3}$; 3)

По формулам координат середины отрезка найдем координаты точки T:

$x_T = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_T = \frac{y_1+y_2}{2}$; $z_T = \frac{z_1+z_2}{2}$

T(1; 0; 3).

Уравнение плоскости ABC: z=0, следовательно вектор нормали этой плоскости $\overrightarrow{n_1}\{0; 0; 1\}$

Найдем уравнение плоскости ATC_1: $x + by + cz + d = 0$

Так как плоскость проходит через начало координат, то d=0. В уравнение плоскости подставим координаты точек T и C_1:

$$\begin{cases} 1 + 3c = 0 \\ 1 + \sqrt{3}b + 3c = 0 \end{cases}$$

Решаем систему:

$$c = -\frac{1}{3}; b = 0$$

Тогда уравнение плоскости ATC_1: $x - \frac{1}{3}z = 0$, следовательно, вектор нормали этой плоскости $\overrightarrow{n_2}\left\{1; 0; -\frac{1}{3}\right\}$

Найдем косинус угла между двумя плоскостями:

$$cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$cos\varphi = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Ответ: б) $\varphi = \arccos(\frac{\sqrt{10}}{10})$

3. Решить неравенство $\frac{10^x - 25\cdot 2^x - 2\cdot 5^x + 50}{5x - x^2 - 4} \geq 0$ методом рационализации.

Решение:

Рассмотрим числитель дроби: $10^x - 25 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^x + 50 = 2^x \cdot 5^x - 25 \cdot 2^x - 2 \cdot 5^x + 50 = 2^x(5^x - 25) - 2(5^x - 25) = (2^x - 2)(5^x - 25)$

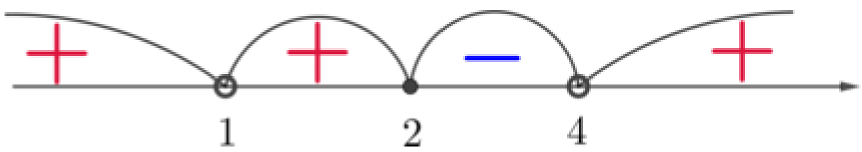
Умножим обе части неравенства на (-1) и сменим знак неравенства на противоположный:

$$\frac{(2^x-2)(5^x-25)}{x^2-5x+4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2^x-2^1)(5^x-5^2)}{(x-1)(x-4)} \leq 0$$

Применим метод рационализации: множители вида $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ можно заменить на произведение двух скобок: *(a−1)(f(x)−g(x))*

$$\frac{(2-1)(x-1)(5-1)(x-2)}{(x-1)(x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-4)} \leq 0$$

Полученное неравенство решим методом интервалов:



Таким образом, ответ: $x \in [2; 4)$

Ответ: $x \in [2; 4)$

4. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1:C_1B=8:3$, $BA_1:A_1C=1:2$, $CB_1:B_1A=3:1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Докажите, что ADA_1B_1 - параллелограмм.

б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, AC=28, BC=18.

Применить теорему Менелая или теорему Чевы.

Решение:

а) Выполним доказательство с помощью теоремы Менелая. Пусть $AD \cap BC = A_2$. (рис.21)

По теореме Чевы:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{3}{1} = 1$$

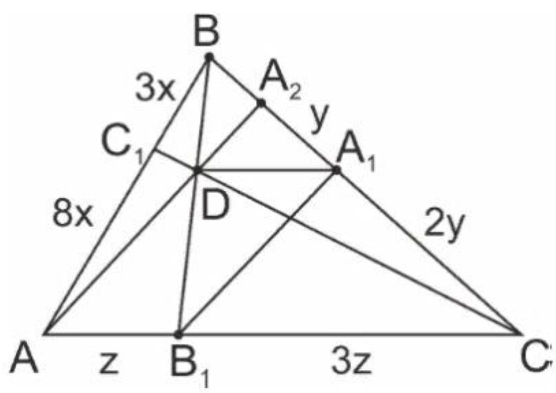


Рисунок 21. Чертеж к планиметрической задаче (пункт а)

$\dfrac{BA_2}{A_2C} = \dfrac{1}{8}, \quad BA_2 = \dfrac{1}{9}BC$

$A_2A_1 = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}\right) BC = \dfrac{2}{9}BC,$

$A_1C = \dfrac{2}{3}BC,\ A_2A_1 = \dfrac{1}{3}A_1C$

$A_1C : A_2C = B_1C : AC = \dfrac{3}{4},$

Это значит, что $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle A_2CA$ по двум углам и $AA_2 \parallel B_1A_1,$ то есть $AD \parallel B_1A_1.$

Рассмотрим треугольник $ABB_1.$

Прямая C_1C пересекает две его стороны и продолжение третьей стороны $AB_1.$

По теореме Менелая,

$\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BD}{DB_1} \cdot \dfrac{B_1C}{AC} = 1$

$\dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{BD}{DB_1} = \dfrac{3}{4} = 1;$

$\dfrac{BD}{DB_1} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{BA_1}{A_1C};$

тогда $\dfrac{BD}{BB_1} = \dfrac{BA_1}{BC} = \dfrac{1}{3},$

$\triangle BDA_1 \sim \triangle BB_1C$ по углу и двум сторонам, отсюда

$\angle BDA_1 = \angle BB_1C_1,\ DA_1 \parallel B_1C.$

Мы получили:

$AD \parallel B_1A_1$

$DA_1 \parallel AB_1,\ ADA_1B_1$ — параллелограмм по определению.

б) Найдём CD, если $AD \perp BC,\ AC = 28,\ BC = 18.$

Поскольку $A_1B_1 \parallel AD,$ получим, что $A_1B_1 \perp BC,\ \triangle A_1B_1C$ — прямоугольный.

Мы доказали в пункте (а), что B_1DA_1C — трапеция, причём $B_1A \perp A_1C$. (рис.22)

По условию, $AC = 28$.

Тогда $A_1D = \frac{28}{4} = 7,$

$B_1C = \frac{28}{4} \cdot 3 = 21,$

$A_1C = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12.$

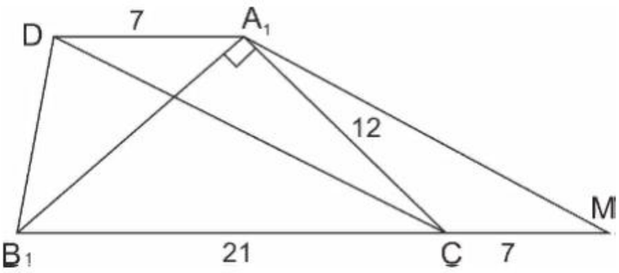


Рисунок 22. Чертеж к планиметрической задаче (пункт б)

Пусть $M \in B_1C$, $CM = 7$, $B_1M = 28.$

Тогда A_1MCD — параллелограмм (по признаку параллелограмма)

$A_1M = CD.$

$B_1M = 28,$ по теореме Пифагора из $\triangle B_1A_1C$:

$B_1A_1 = \sqrt{21^2 - 12^2} = 3\sqrt{7^2 - 4^2} = 3\sqrt{33},$

$\cos\angle A_1B_1C = \cos\angle A_1B_1M = \frac{B_1A_1}{B_1C} = \frac{\sqrt{33}}{7}$

Найдём A_1M из $\triangle A_1B_1M$ по теореме косинусов.

$A_1M^2 = A_1B_1{}^2 + B_1M^2 - 2A_1B_1 \cdot B_1M \cdot \cos\angle A_1B_1M,$

$CD = A_1M = 17.$

Ответ: 17.

5. В июле планируется взять кредит на сумму 8 052 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

Решение:

Пусть S=8052000 рублей - сумма кредита, процентная ставка p =20%,

k=$(1+\frac{p}{100})$, следовательно k=1,2.

Пусть x - ежегодный платеж (транш). Составим таблицу:

Год	**Сумма долга по кредиту в начале года**	**Сумма долга с начисленными процентами в конце года**	**Остаток**
1	S	$S\left(1+\frac{p}{100}\right)$ Если $k=1+\frac{p}{100}$, то Sk	$S\left(1+\frac{p}{100}\right)$-x Если $k=1+\frac{p}{100}$, то Sk-x
2	Sk-x	$(Sk-x)k=Sk^2-xk$	Sk^2-xk-x
3	Sk^2-xk-x	$(Sk^2-xk-x)k$	Sk^3-xk^2-xk-x
4	Sk^3-xk^2-xk-x	$(Sk^3-xk^2-xk-x)k$	$Sk^4-xk^3-xk^2-xk-x$

$$Sk^4-xk^3-xk^2-xk-x=0$$

$$Sk^4-x(k^3+k^2+k+1)=0$$

$$x=\frac{Sk^4}{k^3+k^2+k+1}$$

Воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии: $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

$$S_4=\frac{(1-k^4)}{1-k}$$

$$S_4=\frac{(1-1{,}2^4)}{1-1{,}2}=\frac{(1-1{,}2)(1+1{,}2)(1+1{,}2^2)}{1-1{,}2}=(1+1{,}2)(1+1{,}2^2)=2{,}2\cdot 2{,}44$$

$$S_4=5{,}368$$

$$x=\frac{8052000\cdot 1{,}2^4}{5{,}368}=\frac{8052000\cdot 1{,}2\cdot 1{,}2\cdot 1{,}2\cdot 1{,}2}{5{,}368}=\frac{8052000\cdot 12^3\cdot 1{,}2}{5368}$$

$$=1500\cdot 12^3\cdot 1{,}2=3110400$$

Ответ: 3110400 рублей – ежегодный платеж

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Иванов, О. А. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей : учебное пособие / О. А. Иванов. — Москва : МЦНМО, 2009. — 384 с. — ISBN 978-5-94057-505-4. —URL: https://e.lanbook.com/book/9347 (дата

обращения: 02.01.2021). — Текст : электронный
2. Лунгу, К. Н. Основные методы решения задач по элементарной математике : учебное пособие / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 336 с. — ISBN 978-5-9221-1588-9. —URL: https://e.lanbook.com/book/91183 (дата обращения: 02.01.2021). — Текст : электронный.

Дополнительная литература

1. Гордин, Р. К. ЕГЭ 2017. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень) / Р. К. Гордин ; под редакцией И. В. Ященко. — Москва : МЦНМО, 2017. — 232 с. — ISBN 978-5-4439-1086-4. — URL: https://e.lanbook.com/book/87783 (дата обращения: 02.01.2021). — Текст : электронный.
2. Гордин, Р. К. ЕГЭ 2017. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень) : учебное пособие / Р. К. Гордин ; под редакцией И. В. Ященко. — Москва : МЦНМО, 2017. — 120 с. — ISBN 978-5-4439-3084-8. — URL: https://e.lanbook.com/book/92688 (дата обращения: 02.01.2021). — Текст : электронный
3. Шестаков, С. А. ЕГЭ 2017. Математика. Уравнения и системы уравнений. Задача 13 (профильный уровень) : учебно-методическое пособие / С. А. Шестаков, П. И. Захаров ; под редакцией И. В. Ященко. — Москва : МЦНМО, 2017. — 176 с. — ISBN 978-5-4439-1083-3. — URL: https://e.lanbook.com/book/87781 (дата обращения: 02.01.2021). — Текст : электронный
4. Шестаков, С. А. ЕГЭ 2017. Математика. Неравенства и системы неравенств. Задача 15 (профильный уровень) / С. А. Шестаков. — Москва : МЦНМО, 2017. — 352 с. — ISBN 978-5-4439-1085-7. — URL: https://e.lanbook.com/book/87782 (дата обращения: 02.01.2021). — Текст : электронный
5. Шестаков, С. А. ЕГЭ 2017. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) : учебное пособие / С. А. Шестаков. — Москва : МЦНМО, 2017. — 208 с. — ISBN 978-5-4439-3087-9. — URL: https://e.lanbook.com/book/92679 (дата обращения: 02.01.2021). — Текст : электронный

Электронные ресурсы

1. Открытый класс. Коллекция ЦОР : сетевые образовательные сообщества. – [Б. м.], 2008–2021. – URL: http://www.openclass.ru, (дата обращения: 02.01.2021). – Текст : электронный.

2. ПЕДСОВЕТ.ORG : медиатека, включающая ЦОР и методические разработки. – [Б. м.], 2012-2021. – URL: http://pedsovet.org/ (дата обращения: 02.01.2021). – Текст : электронный.

3. Российский образовательный портал. Коллекция ЦОР – [Б. м.], 2015-2021. - URL: http://www.school.edu.ru, (дата обращения: 02.01.2021). – Текст : электронный.

4. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов / ФЦИОР. – Москва, 2015-2021. – URL: http://fcior.edu.ru/ (дата обращения: 02.01.2021). – Текст : электронный.

5. Сайт Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) – URL: https://fipi.ru/o-nas (дата обращения: 02.01.2021)

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Общероссийский математический портал (информационная система) - http://www.mathnet.ru/
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» - http://www.window.edu.ru.
3. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов - http://fcior.edu.ru. Доступ свободный.