

Подписано электронной подписью:
Вержицкий Данил Григорьевич
Должность: Директор КГПИ КемГУ
Дата и время: 2025-04-23 00:00:00
471086fad29a3b30e244c728abc3661ab35c9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

А.В. Фомина

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

*Методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе
для обучающихся по направлениям подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профили: «Математика и Информатика»,
«Математика и Физика», «Информатика и физика»
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль: «Математика»*

Новокузнецк

2019

УДК 519.8(072)

ББК 22.18я73

Ф 76

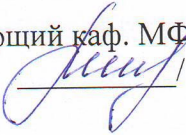
Фомина А.В.

Ф 76 Исследование операций: методические указания к внеаудиторной самостоятельной работе для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлениям подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика», «Информатика и Физика»), 44.03.01 Педагогическое образование (профиль «Математика») / А.В. Фомина; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2019 – 61 с.

Методические указания содержат индивидуальные задания и указания к их выполнению; критерии оценки учебной деятельности студента; список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для наиболее рациональной организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов, обучающихся по направлениям подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили: «Математика и Информатика», «Математика и Физика», «Информатика и Физика»; 44.03.01 Педагогическое образование, профиль: «Математика».

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № 11 от 17.06.2019

Заведующий каф. МФММ
 / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики
Протокол № 10 от 27.06.2019

Председатель методической комиссии ФИМЭ
 / Г.Н. Бойченко

УДК 519.8(072)

ББК 22.18я73

Ф76

© Фомина Анжелла Владимировна
© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»,
Новокузнецкий институт (филиал), 2019

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	5
1.1. Индивидуальное задание № 1 по теме «Линейное программирование»	5
1.2 Методические указания к выполнению	19
индивидуального задания № 1	19
2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА	27
2.1. Индивидуальное задание № 2 по теме «Транспортная задача»	27
2.2 Методические указания к выполнению	31
индивидуального задания № 2	31
3. НЕЛИНЕЙНОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	36
3.1 Индивидуальное задание № 3 по теме	36
«Нелинейное и динамическое программирование»	36
3.2 Методические указания к выполнению	44
индивидуального задания № 3	44
4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР И ТЕОРИИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ	51
4.1 Индивидуальное задание № 4 по теме «Элементы теории матричных игр и теории систем массового обслуживания»	51
4.2 Методические указания к выполнению	56
индивидуального задания № 4	56
5. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ	59
6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	60

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили: «Математика и Информатика», «Математика и Физика», «Информатика и Физика»; 44.03.01 Педагогическое образование, профиль: «Математика и информатика», направлены на оказание помощи студентам в выполнении внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий) по дисциплине «Исследование операций».

Исследование операций — дисциплина, занимающаяся разработкой и применением методов нахождения оптимальных решений на основе математического моделирования, статистического моделирования и эвристических подходов в различных областях человеческой деятельности. Цель исследования операций заключается в том, чтобы выявить наилучший (оптимальный) способ действий при решении той или иной задачи организационного управления в условиях, когда имеют место ограничения технико-экономического или какого-либо другого характера.

Целью изучения дисциплины «Исследование операций» является формирование математической компетентности в области применения математических и количественных методов для моделирования систем, анализа их характеристик и принятия оптимальных решений, а также для реализации образовательных программ в предметной области «Математика и Информатика» в общеобразовательных организациях различных типов (школах, лицеях, гимназиях).

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- ✓ формирование у студентов системы знаний, умений, универсальных учебных действий по основным разделам дисциплины;
- ✓ развитие у студентов способности получать, демонстрировать, применять и критически оценивать знания в области исследования операций;
- ✓ формирование у студентов навыков, умений и готовности

использования в будущей профессиональной деятельности полученных знаний курса «Исследование операций».

В методические рекомендации включено: варианты индивидуальных заданий, методические указания к выполнению индивидуальных заданий, критерии оценки учебной деятельности студента, список основной и дополнительной литературы.

Приведенные примеры решения типовых заданий представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям и выполнения индивидуальных заданий.

Таким образом, данные методические материалы позволяют получить студенту представление о содержании курса «Исследование операций», подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам, успешно выполнить индивидуальные задания. Методические указания могут оказаться полезными при написании курсовых и выпускных квалификационных работ, а также при прохождении производственной (педагогической) практики в старших профильных классах.

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Индивидуальное задание № 1 по теме «Линейное программирование»

Задание 1.

Используя геометрическую интерпретацию, найдите решения задач.

1). Для производства изделий P_1 и P_2 фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в следующей таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	P_1	P_2	
Ресурс I вида	0,2	0,1	40
Ресурс II вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (человеко-ч)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	600	800	

Определить, сколько изделий P_1 и P_2 следует изготавливать фабрике, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

2). Фабрика использует для производства изделий I_1 и I_2 следующие виды сырья: C_1 , C_2 и C_3 , запасы которых составляют соответственно 900, 400

и 300 кг. Количество сырья каждого вида (в кг.), необходимой для изготовления 10 изделий, а также прибыль, получаемая от их реализации приведены в таблице:

Вид сырья	Затраты сырья на 10 шт.	
	I_1	I_2
C_1	4	2
C_2	2	1
C_3	1	1
Прибыль	60	50

Установить план выпуска изделий, максимизирующий прибыль.

3). Предприятие производит сборку автомашин двух марок: A_1 и A_2 . Для этого требуются следующие материалы: S_1 – комплекты заготовок металлоконструкций в количестве $b_1=17$ шт., необходимые для сборки автомашин A_1 и A_2 (соответственно 2 и 3 ед.); S_2 – комплекты резиновых изделий в количестве $b_2=11$ шт. (соответственно 2 и 1 ед.); S_3 – двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве $b_3=6$ комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки A_1 ; S_4 – двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве $b_4=5$ комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки A_2 . Стоимость автомашины марки A_1 – $C_1=7$ тыс. ден. ед., а автомашины A_2 – $C_2=5$ тыс. ден. ед. Определить план выпуска, обеспечивающий предприятию максимальную выручку.

4). Для производства двух видов изделий А и В используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (ч)
	А	В	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	140	180	

Найти план выпуска изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

5). При подкормке посева нужно внести на 1 га. почвы не менее 8 единиц химического вещества А, 21 – вещества Б, 16 – вещества В. Совхоз закупает комбинированные удобрения двух видов I и II. В таблице указаны содержание химических веществ и цена на единицу веса каждого вида удобрений. Минимизировать расходы по закупке необходимого совхозу количества удобрений.

Химические вещества	Содержание вещества в единице веса удобрения	
	I	II
А	1	5
Б	12	3
В	4	4
Цена	5	2

6). Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 усл.ед., жиров не менее 70 и витаминов не менее 10 усл.ед. Содержание их в продуктах P_1 и P_2 равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1). Стоимость 1 ед. продукта P_1 – 2 ден.ед., P_2 – 3 ден.ед. Требуется так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

7). На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов (см ² .)	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не менее нужного количества заготовок при минимальных отходах.

8). Необходимо перевезти оборудование трех типов: 84 единицы I типа, 80 единиц II типа и 150 единиц III типа. Для перевозки оборудования завод может заказать два вида транспорта А и Б. Количество оборудования

каждого типа, вмещаемого на определенный вид транспорта, а также сменные затраты, связанные с эксплуатацией единицы транспорта (в руб.), приведены в таблице.

Тип оборудования	Количество оборудования для вида транспорта	
	А	Б
I	3	2
II	4	1
III	3	13
Затраты	8	12

Спланировать перевозки так, чтобы транспортные расходы были минимальными.

9). Процесс изготовления промышленных изделий двух видов I_1 и I_2 состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10ч. в сутки. Время обработки одного изделия (в минутах) и прибыль от продажи одного изделия каждого вида указаны в таблице.

Станок	Выпускаемая продукция		Лимит времени
	I_1	I_2	
I	10	5	10
II	6	20	10
III	8	15	10
Удельная прибыль	200	300	

Требуется найти оптимальные объемы производства изделий каждого вида, максимизирующие прибыль.

10). На ферме выращивают животных двух видов А и Б. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используются три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать животные вида А и Б, приведены в таблице. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано фермой, и прибыль от реализации шкурок животных.

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать животные	Общее количество корма
-----------	---	------------------------

	А	Б	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки (руб.)	16	12	

Определить, сколько животных вида А и вида Б следует выращивать на ферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

11). Для производства двух видов продукции А и В предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида (в килограммах на единицу объема производимой продукции) приведены в таблице. Там же указано количество сырья каждого вида, которое может быть использовано как при производстве продукции вида А, так и при производстве продукции вида В. Прибыль предприятия от производства единицы объема продукции вида А равна 30, а от производства единицы объема продукции вида В – 40 (в условных денежных единицах).

Вид сырья	Нормы расхода сырья для производства продукции		Общее количество сырья, кг.
	Вида А	Вида В	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252

Определите объемы производств продукции каждого вида, при которых прибыль предприятия будет наибольшей.

12). При изготовлении изделий I_1 и I_2 используются токарные и фрезерные станки, а так же сталь и цветные металлы. По технологическим нормам на производство единицы изделия I_1 требуется 300 и 200 единиц соответственно токарного и фрезерного оборудования (в станко-часах) и 410 и 20 единиц стали и цветных металлов (в килограммах). Для производства единицы изделия I_2 требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов. Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами оборудования, 640 и 840 кг. материалов. Прибыль от реализации единицы изделия I_1 – 6 тыс.ден.ед., I_2 – 16 тыс.ден.ед. Определить план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль при условии, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

13). На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 20 тыс. руб. Оборудование должно быть размещено на

площади, не превышающей 72 м^2 . Предприятие может заказать оборудование двух видов: более мощные машины типа А стоимостью 5 тыс. руб., требующие производственную площадь 6 м^2 (с учетом проходов) и дающие 8 тыс. единиц продукции за смену, и менее мощные машины типа Б стоимостью 2 тыс. руб., занимающие площадь 12 м^2 и дающие за смену 3 тыс. единиц продукции. Найти оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум общей производительности нового участка.

14). Имеются корма двух видов: C_1 и C_2 . Их можно использовать для кормления животных в количестве соответственно не более 50 и 85 кг. Требуется составить кормовой рацион минимальной стоимости, в котором содержится не менее 30 кормовых единиц, не менее 1 кг. перевариваемого протеина, не менее 100 г. кальция, не менее 80 г. фосфора. Данные о питательности кормов и их стоимости в расчете на 1 кг приведены в таблице.

Питательные вещества	Корм		Нижняя норма содержания питательных веществ
	C_1	C_2	
Кормовые единицы, кг.	0,5	0,3	30
Протеин, г.	40	10	1000
Кальций, г.	1,25	2,5	100
Фосфор, г.	2	1	80
Себестоимость 1 кг., ден.ед.	12	8	

15). Автомобильный завод выпускает машины типов А и Б. Значения производственных мощностей отдельных цехов и участков приведены в таблице. Составить наиболее рентабельную производственную программу при условии, что прибыль от выпуска одной машины типов А и Б соответственно равна 2000 и 2400 руб.

Наименование цехов и участков	Мощность по типам машин		Имеется в наличии
	А	Б	
Подготовка производства автомобилей	130	180	650
Кузовной	100	220	660
Производство шасси	110	110	440
Производство двигателей	200	120	800
Сборочный	160	80	800
Участок испытаний	280	70	560

16). Найти оптимальное сочетание выращивания культур вида А и вида Б в арендном хозяйстве, обеспечивающее максимум валовой продукции.

Урожайность и затраты на возделывания культур (в расчете на 1 га.) характеризуются показателями, приведенными в таблице.

Показатель	культура вида А	культура вида Б	Имеется в наличии
Урожайность, ц.	30	40	120
Затраты механизированного труда, тракторо-смен	0,05	0,064	0,32
Затраты труда на конно- ручных работах, чел.-дн.	0,6	0,16	0,96
Цена 1 ц., ден.ед.	75	55	

17). Предприятие может выпускать продукцию двух видов: P_1 и P_2 . Используются три вида ресурсов: оборудование, сырье и электроэнергия. Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от единицы продукции представлены в таблице. Найти оптимальный план выпуска продукции.

Ресурсы	Норма расхода на единицу продукции		Объем ресурса
	P_1	P_2	
Оборудование	2	3	31
Сырье	1	1	12
Электродэнергия	2	1	20
Прибыль за единицу продукции	40	25	

18). Для фабрики требуется рассчитать оптимальный план выпуска конфет. Весь ассортимент конфет разделен на две однородные группы K_1 и K_2 . Для производства требуются следующие виды сырья C_1 , C_2 и C_3 . Запасы этих видов сырья равны соответственно 700, 300 и 150 т. Уровень прибыли на единицу каждого вида выпускаемых конфет (в ден.ед. за 1 т.): для K_1 – 1000, K_2 – 1100. Нормы расхода сырья на производство единицы каждого вида конфет представлены в таблице. Найти план, максимизирующий прибыль.

Сырье	Расход сырья на 1 т. конфет	
	K_1	K_2
C_1	0,7	0,7
C_2	0,3	0,2
C_3	0,2	0,3

19). В опытном хозяйстве установили, что откорм животных выгоден тогда, когда животное будет получать в дневном рационе не менее 6 ед. питательного вещества А, не менее 12 ед. вещества В и не менее 4 ед. вещества С. Для кормления животных используются два вида корма. В таблице показано, сколько единиц каждого питательного вещества содержит

1 кг. корма каждого вида. Цена 1 кг. корма I равна 50 ден.ед., корма II – 60 ден.ед. Сколько корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на него были минимальными.

Питательное вещество	Корм	
	I	II
A	2	1
B	2	4
C	0	4

20). Завод производит два вида продукции: А и Б. При этом цех по сборке продукции А имеет мощность 100 тыс. штук в год, цех по сборке продукции Б – 30 тыс. Механические цеха завода оснащены взаимозаменяемым оборудованием, и одна группа цехов может производить либо детали для 120 тыс. продукции А, либо детали для 40 тыс. продукции Б, либо любую комбинацию деталей, ограниченную этими данными. Другая группа механических цехов может выпускать детали либо для 80 тыс. продукции А, либо для 60 тыс. продукции Б, либо любую допустимую их комбинацию. В результате реализации каждой тысячи продукции А завод получает прибыль в 2 тыс., а каждой тысячи продукции Б – 3 тыс.руб. Найти такое сочетание выпусков продукции, которое дает наибольшую сумму прибыли.

Задание 2.

Цех выпускает три вида изделия. Производственные возможности цеха характеризуются данными, представленными в таблицах. Составить план производства продукции, обеспечивающий максимальный доход от реализации изделий.

Используя исходные данные и условия задачи, необходимо:

- 1.построить математическую модель задачи;
- 2.решить полученную задачу симплексным методом;
- 3.составить к ней двойственную задачу;
- 4.по симплекс-таблице найти решение исходной и двойственной задач;
- 5.провести экономический анализ полученного решения, используя экономический смысл и свойства двойственных оценок:
 - а) определить влияние изменения единицы каждого из имеющихся видов ресурсов на величину целевой функции в оптимальном плане;
 - б) дефицитные и недефицитные ресурсы, остаток недефицитных ресурсов;

в) рентабельную и нерентабельную продукцию.

1).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	2	3	4	780
Сырье (тонн)	1	4	5	850
Электроэнергия (кВт-час)	3	4	2	790
Труд (чел.-час)	3	2	5	910
Цена одного изделия (руб)	18	9	7	

2).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	5	2	3	650
Сырье (тонн)	4	1	4	830
Электроэнергия (кВт-час)	5	3	4	830
Труд (чел.-час)	2	3	2	860
Цена одного изделия (руб)	16	10	9	

3).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	2	5	2	820
Сырье (тонн)	3	4	1	750
Электроэнергия (кВт-час)	4	5	3	800
Труд (чел.-час)	4	2	3	790
Цена одного изделия (руб)	12	8	8	

4).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов в
	1 вида	2 вида	3 вида	

Оборудование (станко/час)	3	2	5	750
Сырье (тонн)	2	3	4	770
Электроэнергия (кВт-час)	1	4	5	760
Труд (чел.-час)	3	4	2	900
Цена одного изделия (руб)	11	11	6	

5).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	2	3	2	800
Сырье (тонн)	5	2	3	800
Электроэнергия (кВт-час)	4	1	4	810
Труд (чел.-час)	5	3	4	750
Цена одного изделия (руб)	14	12	10	

6).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	4	2	3	680
Сырье (тонн)	2	5	2	780
Электроэнергия (кВт-час)	3	4	1	790
Труд (чел.-час)	4	5	3	860
Цена одного изделия (руб)	15	7	8	

7).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	

Оборудование (станко/час)	3	4	2	700
Сырье (тонн)	3	2	5	840
Электроэнергия (кВт-час)	2	3	4	750
Труд (чел.-час)	1	4	5	780
Цена одного изделия (руб)	19	6	11	

8).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	5	3	4	730
Сырье (тонн)	2	3	2	860
Электроэнергия (кВт-час)	5	2	3	820
Труд (чел.-час)	4	1	4	890
Цена одного изделия (руб)	17	9	9	

9).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	4	5	3	810
Сырье (тонн)	4	2	3	820
Электроэнергия (кВт-час)	2	5	2	790
Труд (чел.-час)	3	4	1	800
Цена одного изделия (руб)	13	13	10	

10).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия	Объем
-----------------------	--	-------

	1 вида	2 вида	3 вида	ресурсов
Оборудование (станко/час)	1	4	5	760
Сырье (тонн)	3	4	2	810
Электроэнергия (кВт-час)	3	2	5	780
Труд (чел.-час)	2	3	4	850
Цена одного изделия (руб)	18	11	8	

11).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	4	1	4	780
Сырье (тонн)	5	3	4	850
Электроэнергия (кВт-час)	2	3	2	790
Труд (чел.-час)	5	2	3	910
Цена одного изделия (руб)	18	9	7	

12).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	3	4	1	650
Сырье (тонн)	4	5	3	830
Электроэнергия (кВт-час)	4	2	3	830
Труд (чел.-час)	2	5	2	860
Цена одного изделия (руб)	16	10	9	

13).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия	Объем
-----------------------	--	-------

	1 вида	2 вида	3 вида	ресурсов
Оборудование (станко/час)	2	3	4	820
Сырье (тонн)	1	4	5	750
Электроэнергия (кВт-час)	3	4	2	800
Труд (чел.-час)	3	2	5	790
Цена одного изделия (руб)	12	8	8	

14).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	5	2	3	750
Сырье (тонн)	4	1	4	770
Электроэнергия (кВт-час)	5	3	4	760
Труд (чел.-час)	2	3	2	900
Цена одного изделия (руб)	11	11	6	

15).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	2	5	2	800
Сырье (тонн)	3	4	1	800
Электроэнергия (кВт-час)	4	5	3	810
Труд (чел.-час)	4	2	3	750
Цена одного изделия (руб)	14	12	10	

16).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	3	2	5	680
Сырье (тонн)	2	3	4	780
Электроэнергия (кВт-час)	1	4	5	790
Труд (чел.-час)	3	4	2	860
Цена одного изделия (руб)	15	7	8	

17).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	2	3	2	700
Сырье (тонн)	5	2	3	840
Электроэнергия (кВт-час)	4	1	4	750
Труд (чел.-час)	5	3	4	780
Цена одного изделия (руб)	19	6	11	

18).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	4	2	3	730
Сырье (тонн)	2	5	2	860
Электроэнергия (кВт-час)	3	4	1	820
Труд (чел.-час)	4	5	3	890
Цена одного изделия (руб)	17	9	9	

19).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	3	4	2	810
Сырье (тонн)	3	2	5	820
Электроэнергия (кВт-час)	2	3	4	790
Труд (чел.-час)	1	4	5	800
Цена одного изделия (руб)	13	13	10	

20).

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	5	3	4	760
Сырье (тонн)	2	3	2	810
Электроэнергия (кВт-час)	5	2	3	780
Труд (чел.-час)	4	1	4	850
Цена одного изделия (руб)	18	11	8	

1.2 Методические указания к выполнению индивидуального задания № 1

Задание 1.

Используя геометрическую интерпретацию, найдем решение задачи:

Предприятие изготавливает и реализует два вида продукции – P_1 и P_2 . Для производства продукции используются два вида ресурсов – сырье и труд. Максимальные запасы этих ресурсов в сутки составляет 14 и 26 единиц соответственно. Расход ресурсов на изготовление каждого вида продукции, запасы и оптовые цены продукции приведены в таблице.

Ресурсы	Расходы ресурсов на 1 ед. продукции		Запас ресурсов, ед.
	P_1	P_2	
Сырье	1	3	14
Труд	4	2	26
Оптовая цена	3	3	

Известно, что суточный спрос на продукцию P_1 не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 5 ед., а спрос на продукцию P_2 не превышает 4 ед. в сутки. Как спланировать выпуск продукции предприятия, чтобы доход от ее реализации был максимальным?

Решение:

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_1 планируемый выпуск продукции P_1 , x_2 – планируемый выпуск продукции P_2 . Тогда прибыль от реализации всей выпускаемой продукции составит:

$$f = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

составим ограничения по ресурсам и спросам:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 26, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Кроме того, $x_1, x_2 \geq 0$, так как количество продукции не может быть отрицательным числом.

Построим область допустимых решений задачи. Для построения данной области необходимо начертить граничные прямые по уравнениям системы ограничений, в которых неравенства заменяются равенствами. Она представляет собой выпуклый многоугольник ОАВСДЕ.

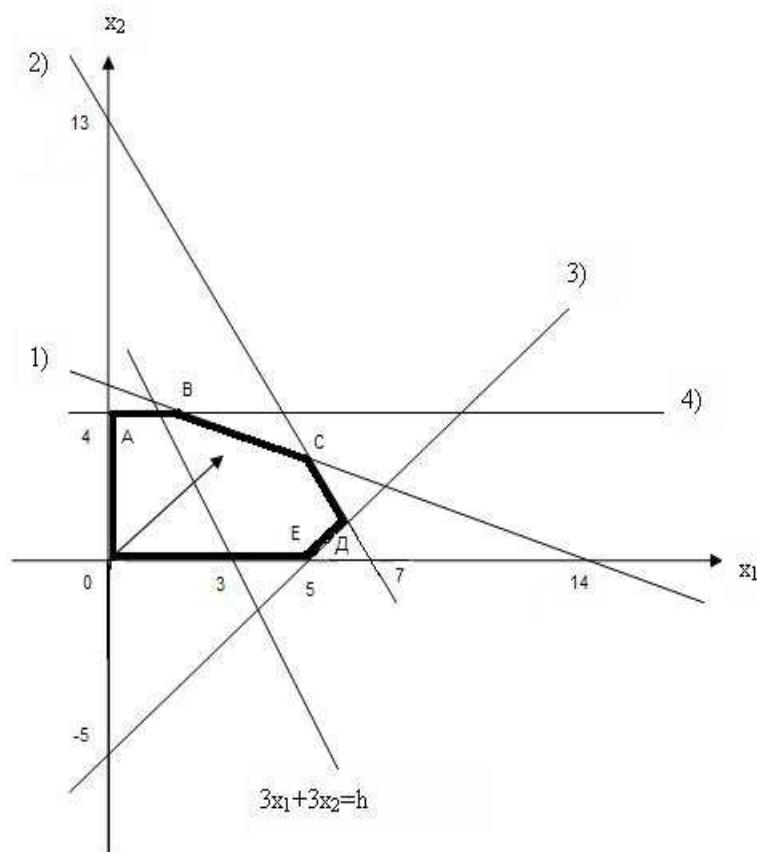


Рисунок 1. Геометрическая интерпретация решения задания 1.

Строим вектор $\vec{c}(3;3)$ и перпендикулярно ему проведем линию уровня $3x_1 + 3x_2 = h$, где h -произвольное число. Параллельным перемещением прямой $3x_1 + 3x_2 = h$ находим крайнюю точку С, в которой целевая функция достигает максимума. Точка С лежит на пересечении прямых 1) и 2). Запишем систему уравнений этих прямых и определим координаты точки пересечения.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 14, \\ 4x_1 + 2x_2 = 26 \end{cases}$$

Получаем оптимальный план $X^* = (5;3)$. Подставим найденный результат в целевую функцию $F = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 24$

Ответ: $F_{\max} = 24$, $X^* = (5;3)$

Задание 2.

1. Используя исходные данные и условия задачи, построим математическую модель задачи, которая состоит из целевой функции, системы ограничений, условий неотрицательности переменных.

2. Решим полученную задачу симплексным методом.
3. Составим двойственную задачу.
4. По симплекс – таблице найдем решение исходной и двойственной задач.
5. Проведем экономический анализ полученного решения, используя экономический смысл и свойства двойственных оценок:
 - а) определим влияние изменения единицы каждого из имеющихся видов ресурсов на величину целевой функции в оптимальном плане;
 - б) дефицитные и недефицитные ресурсы, остаток недефицитных ресурсов;
 - в) рентабельную и нерентабельную продукцию.

Приведем пример решения аналогичной задачи.

Цех выпускает три вида изделия. Производственные возможности цеха характеризуются данными, представленными в таблице. Составить план производства продукции, обеспечивающий максимальный доход от реализации изделий.

Наименование ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия			Объем ресурсов
	1 вида	2 вида	3 вида	
Оборудование (станко/час)	1	3	2	500
Сырье (тонн)	2	4	5	800
Электроэнергия (кВт-час)	2	3	1	750
Труд (чел.-час)	3	2	4	850
Цена одного изделия (руб.)	15	12	11	

Решение:

1. Обозначим через $x_j (j = 1, 2, 3)$ объемы выпуска продукции j -го вида.

Тогда целевая функция имеет вид: $F = 15x_1 + 12x_2 + 11x_3 \rightarrow \max$

Составим ограничения на используемые ресурсы:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 500, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 800, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 750, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 850. \end{cases}$$

Условия неотрицательности переменных: $x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3)$.

2. Решим задачу симплекс – методом. Преобразуем ее предварительно в каноническую задачу линейного программирования. Для

этого в каждое неравенство введем балансовую переменную, преобразовав их в уравнения. Получим задачу: $f = 15x_1 + 12x_2 + 11x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 500, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 = 800, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 750, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_7 = 850. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1,7})$$

Реализация симплексного метода приведена в таблице.

C _Б	Б	b	15	12	11	0	0	0	0	Θ
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	
0	x ₄	500	1	3	2	1	0	0	0	500
0	x ₅	800	2	4	5	0	1	0	0	400
0	x ₆	750	2	3	1	0	0	1	0	375
0	x ₇	850	3	2	4	0	0	0	1 ←	850/3-min
	f	0	-15 ↑	-12	-11	0	0	0	0	
0	x ₄	$\frac{650}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{650}{7}$
0	x ₅	$\frac{700}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	← $\frac{175}{2}$ -min
0	x ₆	$\frac{550}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	110
15	x ₁	$\frac{850}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	425
	f	4250	0	-2 ↑	9	0	0	0		
0	x ₄	$\frac{25}{2}$	0	0	$-\frac{11}{8}$	1	$-\frac{7}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	
12	x ₂	$\frac{175}{2}$	0	1	$\frac{7}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	
0	x ₆	$\frac{75}{2}$	0	0	$-\frac{25}{8}$	0	$-\frac{5}{8}$	1	$-\frac{1}{4}$	
15	x ₁	225	1	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	
	F	4425	0	0	$\frac{43}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{2}$	

Разрешающий столбец находится по наименьшей отрицательной оценке F – строки (столбец при x_1 в первой симплекс-таблице). Разрешающая строка определяется по наименьшему элементу в столбце Θ (отношение элементов столбца b к элементам разрешающего столбца).

Разрешающий элемент находится на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки.

На следующем шаге в таблице элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент и результаты заносим в следующую таблицу на место разрешающей строки. На месте разрешающего столбца записывается единичный столбец (на месте разрешающего элемента – единица, остальные элементы - нули). Все оставшиеся элементы новой таблицы рассчитываем по правилу прямоугольника. Например, вместо числа 500 в столбце b в следующей таблице стоит число $\frac{650}{3}$. Получено оно так: $\frac{500 \cdot 3 - 850 \cdot 1}{3} = \frac{650}{3}$. Число 500 с разрешающим элементом 3 образуют одну диагональ прямоугольника, а число 850 и 1 – другую. Первое произведение записываем со своим знаком, второе – с противоположным, и результат делим на разрешающий элемент.

Вычисления проводим до тех пор, пока все оценки (элементы F -строки) станут неотрицательными. В этом случае план оптимальный.

Оптимальное решение выписываем из столбца b последней таблицы:

$$X^* = (225; \frac{175}{2}; 0), \quad F_{\max} = 4425$$

Таким образом, для получения максимального дохода от реализации изделий цех должен выпускать только два вида продукции в объемах:

$$x_1 = 225, \quad x_2 = \frac{175}{2}.$$

3. Составим двойственную задачу к исходной:

найти значения переменных y_1, y_2, y_3, y_4 , минимизирующих целевую функцию $F^* = 500 y_1 + 800 y_2 + 750 y_3 + 850 y_4$ и удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 \geq 15, \\ 3y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 \geq 12, \\ 2y_1 + 5y_2 + y_3 + 4y_4 \geq 11. \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 (i = \overline{1,4})$$

Коэффициенты целевой функции этой задачи – правые части ограничений исходной. Число переменных – количество ограничений исходной. Строка коэффициентов двойственной задачи – столбец в исходной. Правые части в ограничениях двойственной задачи – коэффициенты целевой функции исходной.

Если исходная задача решается на максимум, то двойственная к ней – на минимум.

4. По симплекс – таблице найдем решение двойственной задачи.

Оптимальные значения переменных двойственной задачи совпадают с оценками балансовых переменных исходной задачи последней таблицы, т.е.

$$Y^* = (0; \frac{3}{4}; 0; \frac{9}{2}).$$

$$\text{Найдем } F_{\min}^* = 500 \cdot 0 + 800 \cdot \frac{3}{4} + 750 \cdot 0 + 850 \cdot \frac{9}{2} = 4425.$$

Таким образом, $F_{\max} = F_{\min}^* = 4425$.

5. Проведем экономический анализ полученного решения, используя экономический смысл и свойства двойственных оценок.

а) Оценки 1 и 3 ресурсов в оптимальном плане равны нулю, следовательно, изменения объемов этих ресурсов не изменит объема выпуска продукции.

Оценка 2 ресурса равна $\frac{3}{4}$. Следовательно, изменив на единицу объем этого ресурса, целевая функция изменится на величину оценки, т.е. на $\frac{3}{4}$.

Аналогично для 4 ресурса – целевая функция изменится на $\frac{9}{2}$ при изменении единицы объема этого ресурса (изменение объемов ресурсов можно производить только в определенных пределах, но не произвольно).

б) 1 и 3 ресурсы являются недефицитными, т.к. двойственные оценки в оптимальном плане равны нулю. 2 и 4 ресурсы – дефицитные.

Проверим это. Подсчитаем расход 1 вида ресурса (оборудования) при выполнении оптимального плана. Для этого подставим значения переменных в оптимальном плане в первое ограничение исходной задачи:

$$1 \cdot 225 + 3 \cdot \frac{175}{2} + 2 \cdot 0 = 487,5.$$

Оборудования израсходовали 487,5 станко/час, а выделено цеху 500 станко/час; остаток ($500 - 487,5 = 12,5$) совпадает со значением балансовой переменной x_4 в оптимальном плане.

Аналогично и с электроэнергией:

$$2 \cdot 225 + 3 \cdot 87,5 + 1 \cdot 0 = 712,5$$

$$750 - 712,5 = 37,5$$

Недоиспользовано 37,5 кВт-ч. ($x_6 = 37,5$ в оптимальном плане). 2 и 4 ресурсы израсходованы полностью, т.к. их оценки положительны. Наиболее дефицитный ресурс – труд.

Проверим, что эти ресурсы израсходованы полностью в оптимальном плане:

$$2 \cdot 225 + 4 \cdot \frac{175}{2} + 5 \cdot 0 = 800,$$

$$3 \cdot 225 + 2 \cdot \frac{175}{2} + 4 \cdot 0 = 850,$$

что совпадает с их имеющимися объемами.

в) в оптимальном плане не выпускается третий вид продукции. Подсчитаем оценку ресурсов, израсходованных на производство единицы этого вида продукции. Подставим значения оценок оптимального плана в третье ограничение двойственной задачи:

$$2 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{9}{2} = \frac{87}{4} = 21,75.$$

Цена единицы этого вида продукции равна 11 руб. Разность $21,75 - 11 = 10,75$ – превышение затрат над ценой. Таким образом, третий вид продукции не выпускается в оптимальном плане, т.к. является нерентабельным.

Если подсчитать оценки ресурсов, израсходованных для выпуска единицы 1 и 2 видов продукции, то они совпадают с соответствующими ценами:

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4,5 = 15,$$

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0,75 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4,5 = 12.$$

Следовательно, 1 и 2 виды продукции являются рентабельными.

2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

2.1. Индивидуальное задание № 2 по теме «Транспортная задача» Задание 1.

Решить закрытую транспортную задачу.

$$1). a_i=(60, 50, 40), b_j=(20, 30, 40, 60), C_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2). a_i=(60, 80, 100), b_j=(40, 60, 80, 60), C_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3). a_i=(100, 150, 150, 100), b_j=(75, 125, 100, 150, 50), C_{ij}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4). a_i=(35, 40, 50), b_j=(25, 20, 30, 50), C_{ij}=\begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 5 \\ 12 & 13 & 10 & 11 \\ 6 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$5). a_i=(35, 50, 40), b_j=(25, 20, 30, 50), C_{ij}=\begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 & 5 \\ 6 & 9 & 7 & 8 \\ 12 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$6). a_i=(80, 70, 20), b_j=(30, 20, 70, 50), C_{ij}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$7). a_i=(100, 70, 30), b_j=(40, 80, 80), C_{ij}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$8). a_i=(180, 240, 160), b_j=(200, 160, 100, 120), C_{ij}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 4 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix};$$

$$9). a_i=(45, 25, 20), b_j=(15, 20, 30, 25), C_{ij}=\begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

$$10). a_i=(20, 50, 70), b_j=(10, 20, 30, 80), C_{ij}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$11). a_i=(20, 40, 80), b_j=(10, 20, 30, 80), C_{ij}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$12). a_i=(60, 80, 100), b_j=(40, 60, 80, 60), C_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$13). a_i=(60, 180, 20), b_j=(60, 120, 80), C_{ij}=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix};$$

$$14). a_i=(225, 200, 175), b_j=(100, 190, 80, 230), C_{ij}=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix};$$

$$15). a_i=(230, 250, 170), b_j=(140, 90, 160, 110, 150), C_{ij}=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 8 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$16). a_i=(40, 27, 18), b_j=(13, 35, 15, 12), C_{ij}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$17). a_i=(270, 450, 330), b_j=(400, 200, 230, 220), C_{ij}=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 9 \\ 1 & 10 & 9 & 4 \end{pmatrix};$$

$$18). a_i=(200, 175, 225), b_j=(100, 130, 270, 100), C_{ij}=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix};$$

$$19). a_i=(350, 330, 270), b_j=(200, 360, 170, 220), C_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$20). a_i=(300, 350, 200), b_j=(340, 200, 140, 170), C_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

Задание 2.

Решить открытую транспортную задачу.

$$1). a_i=(80, 40, 20), b_j=(20, 30, 30, 10), C_{ij}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$2). a_i=(10, 15, 25), b_j=(5, 10, 10, 15), C_{ij}=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$3). a_i=(20, 150, 70), b_j=(10, 20, 50, 50), C_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$4). a_i=(100, 200, 100), b_j=(150, 50, 100, 50), C_{ij}=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5). a_i=(50, 70, 80), b_j=(50, 40, 100), C_{ij}=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 10 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix};$$

$$6). a_i=(100, 100, 200), b_j=(150, 50, 125, 50), C_{ij}=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix};$$

$$7). a_i=(75, 25, 80), b_j=(50, 30, 60, 20), C_{ij}=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 10 & 15 \\ 12 & 10 & 15 & 4 \\ 3 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix};$$

$$8). a_i=(60, 180, 60), b_j=(60, 120, 80), C_{ij}=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix};$$

$$9). a_i=(10, 60, 30), b_j=(20, 25, 35, 10), C_{ij}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$10). a_i=(100, 150, 200), b_j=(75, 125, 50, 100), C_{ij}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$11). a_i=(48, 24, 136), b_j=(12, 36, 36, 24), C_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$12). a_i=(20, 30, 55, 25), b_j=(30, 40, 60, 20), C_{ij}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$13). a_i=(100, 200, 300), b_j=(50, 70, 250, 150), C_{ij}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 7 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix};$$

$$14). a_i=(20, 30, 50), b_j=(10, 10, 30, 20), C_{ij}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$15). a_i=(70, 40, 50), b_j=(60, 50, 40), C_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$16). a_i=(210, 450, 290), b_j=(200, 220, 170, 370), C_{ij}=\begin{pmatrix} 9 & 17 & 22 & 10 \\ 2 & 11 & 2 & 11 \\ 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix};$$

$$17). a_i=(27, 18, 50), b_j=(15, 12, 13, 35), C_{ij}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$18). a_i=(60, 70, 20, 90), b_j=(40, 60, 70, 50), C_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$19). a_i=(50, 180, 60), b_j=(100, 120, 80), C_{ij}=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix};$$

$$20). a_i=(51, 70, 40, 100), b_j=(72, 48, 120), C_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix};$$

2.2 Методические указания к выполнению индивидуального задания № 2

Задание 1.

Решим закрытую транспортную задачу:

$$a) a_i=(200, 250, 50), b_j=(100, 70, 80, 150, 100), C_{ij}=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Найдем суммарные запасы и суммарные потребности пунктов отправления и назначения соответственно:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 200 + 250 + 50 = 500, \sum_{j=1}^5 b_j = 100 + 70 + 80 + 150 + 100 = 500.$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^5 b_j \Rightarrow$$

транспортная задача закрытого типа.

Построим исходный опорный план транспортной задачи методом северо-западного угла и оценим это решение на оптимальность.

$a_i \backslash b_j$	100	70	80	150	100	u_i
200	-7 100	5 7	+2 3	3 4	4 0	0
250	6 -4	4 -4	-5 5	2 150	+7 5	3
50	5 -7 +	8 -2	3 -4	5 1	-9 5	5
v_j	7	5	2	-1	4	

Число занятых клеток должно удовлетворять условию $m + n - 1$, где m – число поставщиков, n – число потребителей, т.е. $3+5-1=7$.

Для определения потенциалов поставщиков и потребителей составим систему уравнений по занятым клеткам ($u_i + v_j = C_{ij}$):

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 7, \\ u_1 + v_2 = 5, \\ u_1 + v_3 = 2, \\ u_2 + v_3 = 5, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_5 = 7, \\ u_3 + v_5 = 9. \end{cases}$$

Так как число уравнений на единицу меньше числа потенциалов, для ее решения одному из потенциалов придается произвольное значение.

Положим, например, $u_1=0$, тогда $u_2=3$, $u_3=5$, $v_1=7$, $v_2=5$, $v_3=2$, $v_4=-1$, $v_5=4$. Расчет потенциалов можно производить непосредственно в таблице. Найдем оценки свободных клеток по формуле: $C'_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$.

$$\begin{aligned} C'_{14} &= 3 - (0 + (-1)) = 4, C'_{15} = 4 - (4 + 0) = 0, C'_{21} = 6 - (3 + 7) = -4, \\ C'_{22} &= 4 - (5 + 3) = -4, C'_{31} = 5 - (5 + 7) = -7, C'_{32} = 8 - (5 + 5) = -2, \\ C'_{33} &= 3 - (5 + 2) = -4, C'_{34} = 5 - (5 + (-1)) = 1. \end{aligned}$$

Запишем эти значения в левых нижних углах свободных клеток. Среди оценок имеются отрицательные. Найденное решение не оптимально. Наименьшая отрицательная оценка $C'_{31} = -7$. Построим цикл для клетки (3;1). В таблице он выделен штриховой линией. В отрицательных вершинах цикла наименьшее количество груза равно $\min(100; 50; 50) = 50$, т.е. число 50 нужно поместить в клетку (3;1). Это же число прибавляем к поставкам в клетках со знаком «+» и вычитаем из клеток со знаком «-». Клетка (3;5) становится пустой, а в клетке (2;4) останется поставка, равная 0. Получаем новый план перевозок.

$a_i \backslash b_j$	100	70	80	150	100	u_i
200	⁷ 50	⁻⁵ 70	⁺² 80	₄ 3	₀ ⁴	0
250	₋₄ ⁶	₋₄ ⁴ +	₋₅ 0	₂ 150	₇ 100	3
50	⁵ 50	₅ ⁸	₃ ³	₈ 5	₇ ⁹	-2
v_j	7	5	2	-1	4	

Потенциалы поставщиков и потребителей определим непосредственно в таблице, полагая $u_1=0$, тогда по занятым клеткам таблицы найдем: $u_2=3$, $u_3=-2$, $v_1=7$, $v_2=5$, $v_3=2$, $v_4=-1$, $v_5=4$.

Оценки свободных клеток получаются такими:

$$C'_{14} = 4, C'_{15} = 0, C'_{21} = -4, C'_{22} = -4, C'_{32} = 5, C'_{33} = 3, C'_{34} = 8, C'_{35} = 7.$$

Так как имеются отрицательные оценки $C'_{21} = C'_{22} = -4$, то план перевозок еще не оптимален. Построим цикл для клетки (2;2). Строим замкнутый цикл, который включает клетки (2;2), (1;2), (1;3), (2;3). Наименьшее количество единиц груза в отрицательных вершинах цикла равно $\min(70;0)=0$. Число нуль нужно поместить в клетку (2;2). Строим третью таблицу.

$a_i \backslash b_j$	100	70	80	150	100	u_i
200	⁷ 50	⁻⁵ 7	² 80	₀ 3	₋₄ ⁴ +	0
250	₀ ⁶	₀ ⁴ +	₄ ⁵	₂ 150	₇ -100	-1
50	⁵ 5	₅ ⁸	₃ ³	₄ 5	₃ ⁹	-2
v_j	7	5	2	3	8	

Найдем потенциалы поставщиков и потребителей в таблице:

$$u_1=0, u_2=-1, u_3=-2, v_1=7, v_2=5, v_3=2, v_4=3, v_5=8.$$

Оценки свободных клеток:

$$C'_{14} = 0, C'_{15} = -4, C'_{21} = 0, C'_{23} = 4, C'_{32} = 5, C'_{33} = 3, C'_{34} = 4, C'_{35} = 3.$$

Решение не оптимально, т.к. $C'_{15} = -4 < 0$. Построим для клетки (1;5) цикл. Этот цикл включает клетки (1;5), (2;5), (2;2), (1;2). Наименьшее количество единиц груза в отрицательных вершинах цикла равно $\min(70;100)=70$. После смещения по циклу 70 ед. груза получим новый опорный план.

$a_i \backslash b_j$	100	70	80	150	100	u_i
200	⁻⁷ 50	⁵ 4	² 8	² 3	⁺⁴ 70	0
250	⁶ + ₋₄	⁴ 70	⁵ 0	² 150	⁷ 30 ₋	3
50	⁵ 5	⁸ 9	³ 3	⁵ 8	⁹ 7	-2
v_j	7	1	2	-1	4	

Потенциалы поставщиков и потребителей:

$$u_1=0, u_2=3, u_3=-2, v_1=7, v_2=1, v_3=2, v_4=-1, v_5=4.$$

Оценки свободных клеток:

$$C'_{12} = 4, C'_{14} = 3, C'_{21} = -4, C'_{23} = 0, C'_{32} = 9, C'_{33} = 3, C'_{34} = 8, C'_{35} = 7.$$

$$C'_{21} = -4 < 0, \text{ следовательно, найденный план не является оптимальным.}$$

Построим цикл для клетки (2;1): (2;1), (1;1), (1;5), (2;5). Минимальное количество единиц груза в отрицательных вершинах цикла равно $\min(50;30)=30$. Перемещая 30 ед. груза по циклу, получим новый опорный план.

$a_i \backslash b_j$	100	70	80	150	100	u_i
200	⁷ 20	⁵ 0	² 80	³ 0	⁴ 100	0
250	⁶ 30	⁴ 70	⁵ 4	² 150	⁷ 4	-1
50	⁵ 50	⁸ 5	³ 3	⁵ 4	⁹ 7	-2
v_j	7	5	2	3	4	

Потенциалы поставщиков и потребителей:

$$u_1=0, u_2=-1, u_3=-2, v_1=7, v_2=5, v_3=2, v_4=3, v_5=4.$$

Оценки свободных клеток:

$$C'_{12} = 0, C'_{14} = 0, C'_{23} = 4, C'_{25} = 4, C'_{32} = 5, C'_{33} = 3, C'_{34} = 4, C'_{35} = 7.$$

Все оценки свободных клеток неотрицательны. План перевозок оптимальный:

$$X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 & 100 \\ 30 & 70 & 0 & 150 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем значение целевой функции

$$L_{\min} = 20 \cdot 7 + 80 \cdot 2 + 100 \cdot 4 + 30 \cdot 6 + 70 \cdot 4 + 150 \cdot 2 + 50 \cdot 5 = 1710.$$

Ответ: $L_{\min} = 1710$, $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 & 100 \\ 30 & 70 & 0 & 150 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Задание 2.

б) Найдем оптимальный план открытой транспортной задачи

$$a_i = (40, 60, 50), b_j = (50, 30, 40), C_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 9 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Найдем суммарные запасы и суммарные потребности пунктов отправления и назначения соответственно:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 40 + 60 + 50 = 150, \sum_{j=1}^3 b_j = 50 + 30 + 40 = 120.$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i > \sum_{j=1}^3 b_j \Rightarrow$$

транспортная задача открытого типа.

Так как запасы грузов превышают спрос потребителей, то введем фиктивного потребителя, спрос которого

$$b_4 = \sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{j=1}^3 b_j = 150 - 120 = 30.$$

Тарифы фиктивного потребителя равны нулю: $C_{i4} = 0$. Получаем транспортную задачу закрытого типа, которую решаем методом потенциалов.

Построим исходный опорный план методом минимального элемента.

$a_i \backslash b_j$	50	30	40	30	u_i
40	⁴ 0	⁶ 20	⁷ 1	⁰ 20	0
60	³ 50	⁵ 10	⁸ 3	⁰ 1	-1
50	⁹ 5	¹⁰ 4	⁶ 40	⁰ 10	0
v_j	4	6	6	0	

Число занятых клеток: $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Потенциалы u_i и v_j найдем непосредственно в таблице: $u_1=0$, $u_2=-1$, $u_3=0$, $v_1=4$, $v_2=6$, $v_3=6$, $v_5=0$.

Оценки свободных клеток следующие:

$$C'_{11} = 0, C'_{12} = 1, C'_{23} = 3, C'_{24} = 1, C'_{31} = 5, C'_{32} = 4.$$

Оценки всех свободных клеток неотрицательны, полученный план перевозок является оптимальным:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 50 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix},$$

$$L_{\min} = 20 \cdot 6 + 50 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 40 \cdot 6 = 560.$$

$$\text{Ответ: } X^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 50 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}, L_{\min} = 560.$$

3. НЕЛИНЕЙНОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

3.1 Индивидуальное задание № 3 по теме

«Нелинейное и динамическое программирование»

Задание 1.

Решить графическим методом задачу нелинейного программирования.

- | | |
|---|---|
| <p>1). $f = 2x_1 - 0,2x_1^2 + 3x_2 - 0,2x_2^2 \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ | <p>2). $f = 2x_1 - 0,1x_1^2 + 3x_2 - 0,1x_2^2 \rightarrow \max$</p> $\begin{cases} 5x_1 + 13x_2 \leq 51, \\ 15x_1 + 7x_2 \leq 105; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$ |
|---|---|

$$3). \quad f = 3x_1 - 0,3x_1^2 + 6x_2 - 0,3x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 \leq 72, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$5). \quad f = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

$$7). \quad f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 36; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$9). \quad f = -2x_1 + 0,1x_1^2 - 3x_2 + 0,1x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 13x_2 \leq 51, \\ 15x_1 + 7x_2 \leq 105; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$11). \quad f = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 36, \\ x_1 + x_2 \geq 8, \\ (x_1 - x_2)^2 \geq 9; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$13). \quad f = 2x_1 - 0,1x_1^2 - x_2 - 0,1x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 30, \\ 8x_1 + 11x_2 \leq 60; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$15). \quad f = x_1 - 0,2x_1^2 + 2x_2 - 0,2x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 14, \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 42; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$4). \quad f = 5x_1 - 0,2x_1^2 + 2x_2 - 0,2x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 13x_1 + 6x_2 \leq 90, \\ 8x_1 + 11x_2 \leq 88; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$6). \quad f = x_1 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$8). \quad f = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ 2x_1 + x_2 \leq 14; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$10). \quad f = 2x_1 - 0,2x_1^2 + 3x_2 - 0,2x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$12). \quad f = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$14). \quad f = 3x_1 - 0,1x_1^2 - 0,1x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 11x_1 + 8x_2 \leq 60, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$16). \quad f = 3x_1 - 0,2x_1^2 + x_2 - 0,2x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- 17). $f = 2x_1 - 0,1x_1^2 + 3x_2 - 0,1x_2^2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 13x_2 \leq 51, \\ 15x_1 + 7x_2 \leq 105; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$
- 18). $f = 2x_1 - 0,2x_1^2 + 3x_2 - 0,2x_2^2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ 12x_1 + 7x_2 \leq 84; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$
- 19). $f = 2x_1 - 0,2x_1^2 + 3x_2 - 0,2x_2^2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$
- 20). $f = 3x_1 - 0,3x_1^2 + 6x_2 - 0,3x_2^2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 \leq 72, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задание 2.

Найти условные экстремумы функции, используя метод множителей Лагранжа.

- 1). $f = 6 - 4x_1 - 3x_2$, если $x_1^2 + x_2^2 = 1$
- 2). $f = x_1 \cdot x_2$, если $x_1 + x_2 = 1$
- 3). $f = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3}$, если $x_1^2 + x_2^2 = 1$
- 4). $f = x_1^2 + x_2^2$, если $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} = 1$
- 5). $f = x_1 - 2x_2 + 2x_3$, если $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$
- 6). $f = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2$, если $x_1 + x_2 + x_3 = 12$
- 7). $f = x_1x_2 + x_2x_3$, если $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$
- 8). $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$, если $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$
- 9). $f = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, если $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 8 \end{cases}$
- 10). $f = x_1^2 + x_2^2$, если $x_1 + x_2 = 1$
- 11). $f = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 + 1$, если $x_1^2 + x_2^2 = 4$
- 12). $f = x_1^2 - x_2^2$, если $x_1 - x_2 = 4$
- 13). $f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$, если $x_2 - 2x_1 = 5$
- 14). $f = 4x_1^2 + 10x_2^2 + 5x_1$, если $x_1 + x_2 = 8, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

15). $f = x_1^2 - x_2^2$, если $x_1 + x_2 = 6$

16). $f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$, если $2x_2 - 2x_1 = 6$

17). $f = 5x_1 + 2x_1^2 - 4x_2^2$, если $x_1 + x_2 = 10$, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

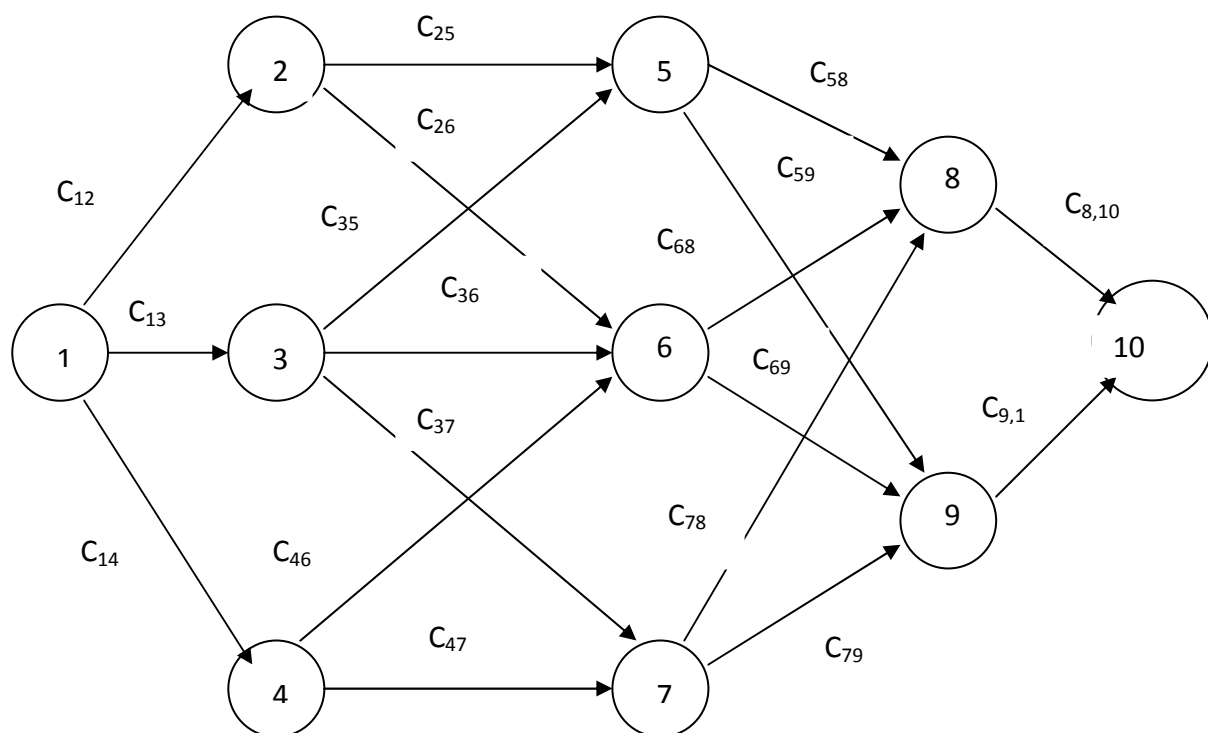
18). $f = 4x_1^2 + 4x_2^2$, если $x_1 + x_2 = 2$

19). $f = x_1 + x_2 + x_3$, если $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$

20). $f = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, если $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$

Задание 3.

В транспортной сети имеется несколько маршрутов, по которым можно доставлять груз из пункта 1 в пункт 10. Стоимость проезда C_{ij} между отдельными пунктами транспортной сети представлена в соответствующей таблице. Требуется определить оптимальный маршрут проезда из пункта 1 в пункт 10 с минимальными транспортными расходами.



1.

C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
7	3	5	2	7	9	3	1	8	4	5	2	6	1	9	4	3	8

2.	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	4	8	4	6	1	9	3	5	4	8	2	7	4	9	6	1	7	2

3.	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	9	2	5	3	7	4	6	8	1	3	5	8	7	1	4	5	9	5

4.	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	1	6	2	5	3	6	8	4	7	2	9	5	3	6	1	4	6	1

5.	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	5	3	8	2	5	8	1	7	5	9	1	3	5	8	4	9	2	4

6.	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	8	1	5	9	2	6	8	4	5	2	6	1	8	3	6	2	5	9

7.	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	3	5	4	1	6	2	7	4	6	8	3	7	2	9	2	8	1	3

8.	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	6	2	6	7	3	9	2	8	5	2	9	4	6	7	4	6	7	6

9.	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	1	9	3	8	7	4	9	3	7	4	8	6	3	1	8	1	9	4

10	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	4	6	1	3	5	7	3	6	2	5	9	1	8	2	3	5	3	8

11	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	9	10	14	8	7	6	5	14	9	12	10	7	6	4	9	5	11	8

12	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	8	11	13	7	6	8	7	14	13	8	11	11	9	10	8	7	7	5

13	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	7	12	12	6	5	9	9	8	14	12	7	10	6	13	11	5	14	10

14	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	6	13	11	5	14	10	9	12	11	6	9	7	12	12	6	5	9	8
15	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	5	14	10	14	13	11	10	11	10	8	5	11	15	9	13	12	12	11

16	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	11	15	9	13	12	12	11	10	9	8	12	5	14	10	14	13	11	10

17	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	13	16	8	12	11	12	13	11	8	13	6	12	17	7	11	10	14	13

18	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	12	17	7	11	10	14	13	12	7	8	5	13	16	8	12	11	12	13

19	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
	11	18	6	10	11	15	14	13	6	11	14	10	19	5	11	12	16	14

C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{25}	C_{26}	C_{35}	C_{36}	C_{37}	C_{46}	C_{47}	C_{58}	C_{59}	C_{68}	C_{69}	C_{78}	C_{79}	$C_{8,10}$	$C_{9,10}$
10	19	5	11	12	16	14	13	5	8	11	11	18	6	10	11	15	14

Задание 4.

Имеются три предприятия, между которыми необходимо распределить 100 тыс. условных единиц средств. Значения прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенных средств X представлены в таблице. Составить оптимальный план распределения средств, позволяющий максимизировать общий прирост выпуска продукции.

1).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	9	11	16
40	18	19	32
60	24	30	40
80	38	44	57
100	50	59	70

2).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	9	11	13
40	17	34	28
60	29	46	37
80	38	53	49
100	47	75	61

3).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	7	9	17
40	29	19	27
60	37	28	37
80	41	37	48
100	59	46	66

4).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	9	12	11
40	20	25	20
60	35	34	32
80	44	46	48
100	57	57	61

5).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	9	8	12
40	18	19	25
60	29	30	51
80	41	47	58
100	60	58	69

6).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	11	13	12
40	21	20	22
60	40	42	34
80	54	45	55
100	62	61	60

7).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	12	16	9
40	26	21	17
60	40	36	35
80	60	49	51
100	72	63	65

8).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	14	12	13
40	24	30	25
60	37	42	45
80	45	58	62
100	58	71	70

9).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	16	10	15
40	28	29	27
60	36	42	46
80	49	50	58
100	60	74	65

10).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	12	14	11
40	28	26	24
60	39	40	43
80	47	51	51
100	69	68	68

11).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	16	14	15
40	30	32	36
60	49	50	45
80	51	48	57
100	72	60	70

12).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	19	14	20
40	36	32	36
60	51	52	47
80	72	61	72
100	81	79	80

13).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	10	14	14
40	16	14	15
60	30	32	36
80	45	43	47
100	60	50	55

14).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	14	17	22
40	26	20	21
60	35	32	37
80	52	61	67
100	61	72	58

15).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	42	40	25
40	34	52	36
60	47	50	46
80	51	48	57
100	62	60	67

16).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	19	48	42
40	36	32	56
60	54	62	67
80	72	81	82
100	88	95	98

17).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	22	17	18
40	43	39	33
60	49	51	45
80	61	75	57
100	82	79	67

18).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	12	15	11
40	23	27	21
60	30	29	34
80	42	46	45
100	58	61	58

19).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	9	11	14
40	19	14	20
60	30	32	16
80	36	30	38
100	48	44	52

20).

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	19	33	29
40	26	43	36
60	35	52	49
80	47	60	62
100	68	79	82

3.2 Методические указания к выполнению индивидуального задания № 3

Задание 1.

Решим графическим методом следующую задачу нелинейного программирования:

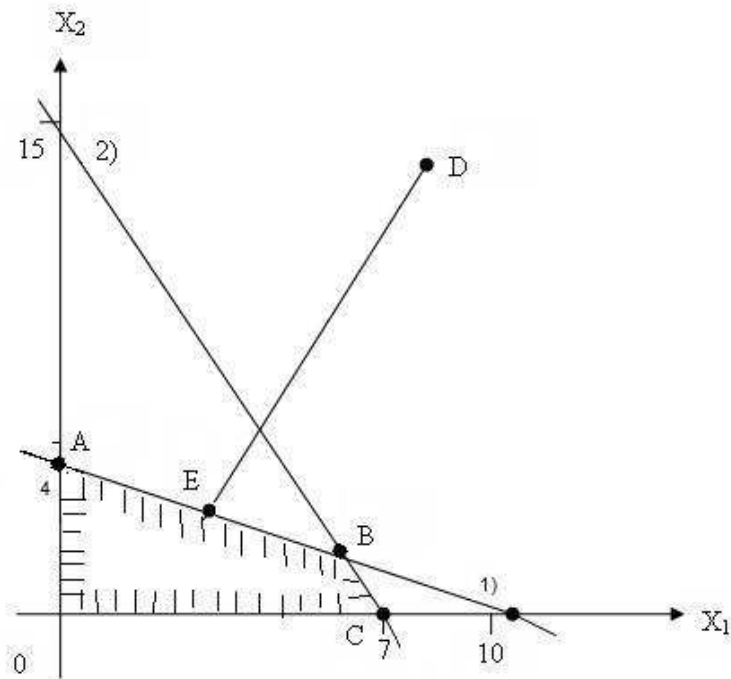
$$f = -2x_1 - 0,1x_1^2 - 3x_2 + 0,1x_2^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 13x_2 \leq 51, \\ 15x_1 + 7x_2 \leq 105 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Решение:

Построим область допустимых решений задачи. Получим четырехугольник OABC.



Преобразуем целевую функцию, выделив полные квадраты при переменных x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned} f &= (0,1x_1^2 - 2x_1) + (0,1x_2^2 - 3x_2) = 0,1(x_1^2 - 20x_1) + 0,1(x_2^2 - 30x_2) = \\ &= 0,1(x_1^2 - 20x_1 + 100) - 10 + 0,1(x_2^2 - 30x_2 + 225) - 22,5 = \\ &= 0,1(x_1 - 10)^2 + 0,1(x_2 - 15)^2 - 32,5 \rightarrow \min \end{aligned}$$

Построим линии уровня:

$$0,1(x_1 - 10)^2 + 0,1(x_2 - 15)^2 - 32,5 = h, \quad h = \text{const};$$

$$(x_1 - 10)^2 + (x_2 - 15)^2 = h_1$$

Линии уровня представляют собой окружности с центром в точке $D(10;15)$ и радиусом $R = \sqrt{h_1}$, $h_1 = \text{const}$.

Из чертежа видно, что минимум достигается в точке E. Найдем координаты точки E. Она лежит на пересечении прямых AB и DE. Прямая DE перпендикулярна прямой AB, ее уравнение имеет вид:

$$x_2 = 15 + k_{DE} \cdot (x_1 - 10), \quad k_{DE} = -\frac{1}{k_{AB}}, \quad k_{AB} = -\frac{5}{13}.$$

$$x_2 = 15 + \frac{13}{5} \cdot (x_1 - 10).$$

$$x_2 = \frac{13}{5}x_1 - 11.$$

Составляем систему уравнений из уравнений прямых DE и AB и найдем координаты точки E:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{13}{5}x_1 - 11, \\ 5x_1 + 13x_2 = 51. \end{cases}$$

$$E(5;2), F_{\min} = -2 \cdot 5 + 0,1 \cdot 25 - 3 \cdot 2 + 0,1 \cdot 4 = -13,1$$

$$\text{Ответ: } F_{\min} = -13,1; \quad X^* = (5;2).$$

Задание 2.

Найдем условный экстремум функции следующей задачи нелинейного программирования, используя метод множителей Лагранжа:

$$F = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2, \quad \text{если} \quad 2x_2 - 2x_1 = 6$$

Решение:

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + \lambda(6 + 2x_1 - 2x_2)$$

Составим систему уравнений, реализуя необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 \cdot (x_1 - 2) + 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2 \cdot (x_2 - 3) - 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 6 + 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Решая эту систему, находим: } x_1^0 = 1, \quad x_2^0 = 4, \quad \lambda^0 = 1.$$

Исследуем характер функции $F(x_1; x_2)$ в окрестности точки $X^0 = (1;4)$. Для этого обратимся к достаточным условиям экстремума.

$$\text{Находим } A = \frac{\partial^2 F(X^0)}{\partial x_1^2}; \quad B = \frac{\partial^2 F(X^0)}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad C = \frac{\partial^2 F(X^0)}{\partial x_2^2};$$

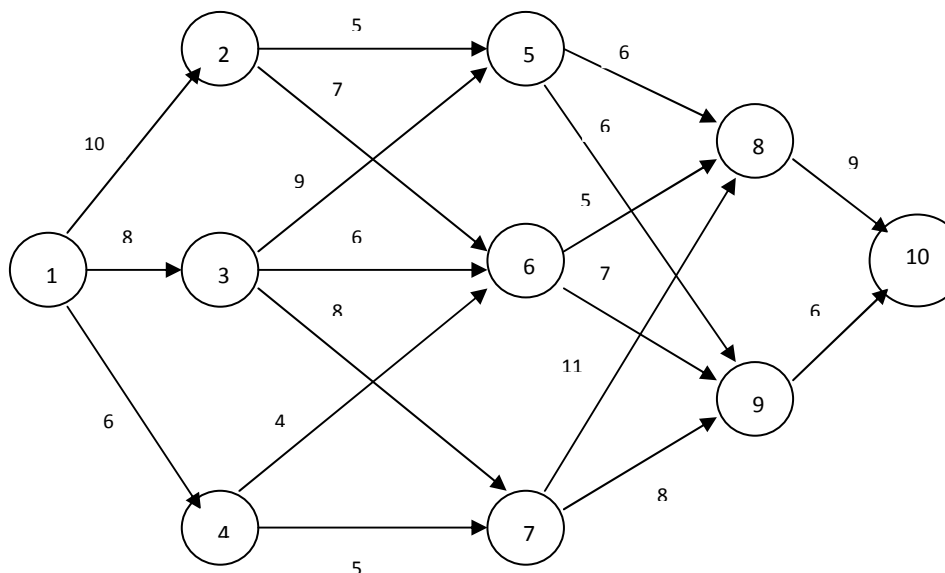
$A=2, \quad B=0, \quad C=2; \quad \Delta = AC - B^2 = 4 > 0$. Следовательно, в точке $X^0 = (1;4)$ функция $F(x_1; x_2)$ имеет условный минимум ($A>0, C>0$).

$$F_{\min} = (1 - 2)^2 + (4 - 3)^2 = 2$$

$$\text{Ответ: } F_{\min} = 2; \quad X^* = (1;4).$$

Задание 3.

В транспортной сети имеется несколько маршрутов, по которым можно доставлять груз из пункта 1 в пункт 10. Стоимость проезда C_{ij} между отдельными оптимальными пунктами транспортной сети отмечена на схеме. Определим оптимальный маршрут проезда из пункта 1 в 10 с минимальными транспортными расходами.



Решение:

I этап. Условная оптимизация.

Используем формулу рекуррентных соотношений Беллмана:

$F_n(i) = \min(c_{ij} + F_{n-1}(j))$, $n = \overline{1, N}$, где N – количество этапов в решении; $F_n(i)$ – стоимость, отвечающая стратегии минимальных затрат для пути от пункта i , если до конечного пункта остается n шагов.

Начинаем поиск оптимального маршрута от конечного пункта, положив

$n = 1$:

$$F_1(8) = c_{8,10} = 9; \quad F_1(9) = c_{9,10} = 6.$$

$n = 2$:

$$F_2(5) = \min \begin{cases} c_{58} + F_1(8) = 6 + 9 = 15, \\ c_{59} + F_1(9) = 6 + 6 = 12. \end{cases} \Rightarrow F_2(5) = 12.$$

$$F_2(6) = \min \begin{cases} c_{68} + F_1(8) = 5 + 9 = 14, \\ c_{69} + F_1(9) = 7 + 6 = 13. \end{cases} \Rightarrow F_2(6) = 13.$$

$$F_2(7) = \min \begin{cases} c_{78} + F_1(8) = 11 + 9 = 20, \\ c_{79} + F_1(9) = 8 + 6 = 14. \end{cases} \Rightarrow F_2(7) = 14.$$

$n = 3$:

$$F_3(2) = \min \begin{cases} c_{25} + F_2(5) = 5 + 12 = 17, \\ c_{26} + F_2(6) = 7 + 13 = 20. \end{cases} \Rightarrow F_3(2) = 17.$$

$$F_3(3) = \min \begin{cases} c_{35} + F_2(5) = 9 + 12 = 21, \\ c_{36} + F_2(6) = 6 + 13 = 19, \\ c_{37} + F_2(7) = 8 + 14 = 22. \end{cases} \Rightarrow F_3(3) = 19.$$

$$F_3(4) = \min \begin{cases} c_{46} + F_2(6) = 4 + 13 = 17, \\ c_{47} + F_2(7) = 5 + 14 = 19. \end{cases} \Rightarrow F_3(4) = 17.$$

$n = 4$:

$$F_4(1) = \min \begin{cases} c_{12} + F_3(2) = 10 + 17 = 27, \\ c_{13} + F_3(3) = 8 + 19 = 27, \\ c_{14} + F_3(4) = 6 + 17 = 23. \end{cases} \Rightarrow F_4(1) = 23.$$

Пэтап. Безусловная оптимизация.

На этапе условной оптимизации получено, что минимальные затраты на проезд из пункта 1 в пункт 10 составляют $F_4(1) = 23$.

Определим оптимальный маршрут. Последовательно анализируем значения $F_n(i)$.

Первый шаг ($n = 4$). Оптимальное значение $F_4(1) = 23$ достигается при суммировании $F_4(1) = C_{14} + F_3(4)$, поэтому оптимальным является проезд из пункта 1 в пункт 4.

Второй шаг ($n = 3$). Оптимальное значение $F_3(4) = 17$ достигается при суммировании $F_3(4) = C_{46} + F_2(6)$, поэтому оптимальным является проезд из пункта 4 в пункт 6.

Третий шаг ($n = 2$). По аналогии получаем: $F_2(6) = C_{69} + F_1(9)$, оптимальный проезд из пункта 6 в пункт 9.

Таким образом, оптимальным является маршрут:

$$1 \overset{6}{-} 4 \overset{4}{-} 6 \overset{7}{-} 9 \overset{6}{-} 10.$$

Ответ: $F_4(1) = 23$, $1 - 4 - 6 - 9 - 10$.

Задание 4.

Имеются три предприятия, между которыми необходимо разделить 100 тыс. условных единиц средств. Значения прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенных средств X представлены в таблице. Составим оптимальный план распределения средств, позволяющий максимизировать общий прирост выпуска продукции.

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	10	12	11
40	31	26	36
60	42	36	45
80	62	54	60
100	76	78	77

Решение:

I этап. Условная оптимизация.

1-й шаг. $k=3$. $F_3(S_3) = \max f_3(x_3)$, $x_3 \leq S_3$, S_3 – количество средств, оставшихся после 3-го шага. Предполагаем, что 100 ден.ед. переданы на инвестирование третьего предприятия

S_3	x_3						$F_3(S_3)$	x_3^*
	0	20	40	60	80	100		
0	0	-	-	-	-	-	0	0
20	-	11	-	-	-	-	11	20
40	-	-	36	-	-	-	36	40
60	-	-	-	45	-	-	45	60
80	-	-	-	-	60	-	60	8
100	-	-	-	-	-	77	77	100

В этом случае максимальная прибыль составит $F_3(S_3) = 77$.

2-й шаг. Определим оптимальную стратегию инвестирования во второе и третье предприятие.

$F_2(S_2) = \max(f_2(x_2) + F_3(S_2 - x_2))$, $x_2 \leq S_2$, S_2 – количество средств, оставшихся после второго шага. На основе этой формулы рассчитаем данные следующей таблицы:

S_2	x_2						$F_2(S_2)$	x_2^{**}
	0	20	40	60	80	100		
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
20	0+11	12+0	-	-	-	-	12	20
40	0+36	12+11	26+0	-	-	-	36	0
60	0+45	12+36	26+11	36+0	-	-	48	20
80	0+60	12+45	26+36	36+11	54+0	-	62	40
100	0+77	12+60	26+45	36+36	54+11	78+0	78	100

3-й шаг. $k=1$. Определим оптимальную стратегию инвестирования в первое, второе и третье предприятия по формуле:

$F_1(S_1) = \max(f_1(x_1) + F_2(S_1 - x_1))$, $x_1 \leq S_1$, S_1 – количество средств, оставшихся после первого шага.

S_1	x_1						$F_1(S_1)$	x_1^*
	0	20	40	60	80	100		
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
20	0+12	10+0	-	-	-	-	12	0
40	0+36	10+12	31+0	-	-	-	36	0
60	0+48	10+36	31+12	42+0	-	-	48	0
80	0+62	10+48	31+36	42+12	62+0	-	67	40
100	0+78	10+62	31+48	42+36	62+12	76+0	79	40

II этап. Безусловная оптимизация.

1-й шаг. По данным таблицы максимальный доход при распределении 100 ден.ед. между тремя предприятиями составляет $F_1(100) = 79$. При этом первому предприятию нужно выделить $x_1^* = 40$ ден.ед.

2-й шаг. Определим величину оставшихся денежных средств для второго и третьего предприятий:

$$S_2 = S_1 - x_1^* = 100 - 40 = 60$$

По таблице 11 находим, что оптимальный вариант распределения денежных средств размером 60 ден.ед. между вторым и третьим

предприятием составляет $F_2(60) = 48$ ден.ед. при выделении второму предприятию $x_2^* = 20$ ден.ед.

3-й шаг. Определим величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю третьего предприятия:

$$S_3 = S_2 - x_2^* = 60 - 20 = 40 \text{ ден.ед.}$$

Из таблицы 10 находим $F_3(40) = 36$ и $x_3^* = 40$ ден.ед.

Таким образом, оптимальный план инвестирования предприятий $X^* = (40; 20; 40)$, обеспечивающий максимальный доход равен $F(100) = f_1(40) + f_2(20) + f_3(40) = 31 + 12 + 36 = 79$ ден.ед.

Ответ: $F_{\max} = 79$; $X^* = (40; 20; 40)$.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР И ТЕОРИИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

4.1 Индивидуальное задание № 4 по теме «Элементы теории матричных игр и теории систем массового обслуживания»

Задание 1.

Определите верхнюю и нижнюю цены игры и, если это возможно, то и седловую точку.

$$1). A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$2). A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$3). A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4). A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5). A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6). A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$7). A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8). A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 11 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$9). A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ -4 & 3 & -4 & -2 \\ 8 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
10). A &= \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 10 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & -3 \\ 6 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} & 11). A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} & 12). A &= \begin{pmatrix} -2 & 9 & 5 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\
13). A &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 12 \\ 2 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix} & 14). A &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 6 \\ -3 & 6 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} & 15). A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
16). A &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 17). A &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 & 6 \\ 3 & 8 & 7 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & -2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & 18). A &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\
19). A &= \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 6 \\ 10 & 11 & 5 & 7 \\ 12 & 10 & 8 & 4 \\ 7 & 11 & 10 & 3 \end{pmatrix} & 20). A &= \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 & 5 \\ 6 & 4 & 11 & 3 \\ 10 & 5 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 3 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Задание 2.

Найти решение игры, заданной матрицей с использованием геометрической интерпретации. Для проверки геометрического решения провести алгебраические расчеты и сравнить результаты.

1). $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	2). $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	3). $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	4). $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	5). $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
6). $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$	7). $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$	8). $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$	9). $\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$	10). $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$
11). $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$	12). $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	13). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	14). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	15). $\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$
16). $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	17). $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$	18). $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	19). $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	20). $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

21). $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	22). $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	23). $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	24). $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	25). $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
---	---	---	---	---

Задание 3.

Определить тип СМО (системы массового обслуживания) и найти требуемые параметры.

1). Сортировочный центр, на который подается поток составов с интенсивностью $\lambda=2$ состава/ч., представляет собой одноканальную СМО с неограниченной очередью. Среднее время обслуживания состава $t_{\text{обсл.}}=20$ мин. Найти среднее число составов в СМО, среднее число составов в очереди, среднее время пребывания состава в СМО, среднее время пребывания состава в очереди.

2). В результате наблюдений установлено, что интенсивность телефонных звонков диспетчеру, имеющих характер простейших пуассоновских потоков, составляет 1,1 вызовов в минуту, средняя продолжительность разговора (обслуживание клиента) составляет 2,3 мин. Определить характеристики работы диспетчера, а также количество обслуженных и необслуженных клиентов за 1 час работы. Сравнить фактическую пропускную способность с номинальной (когда каждый клиент обслуживается 2,5 мин.).

3). Имеется двухканальная СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda=4$ заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{\text{обсл.}}=0,8$ ч. Каждая обслуженная заявка приносит доход $C=120$ руб. Содержание каждого канала обходится в 80 руб/ч. Выгодно ли в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех?

4). В ремонтной мастерской работает только один мастер, который выполняет заказ в среднем за 25 мин. Клиенты заходят в мастерскую в среднем каждые 35 мин. и, если мастер занят, - уходят. Определить характеристики работы ремонтной мастерской и отношение заработанные деньги/не заработанные деньги, если средняя стоимость ремонта составляет 80 руб.

5). Подсчитать относительную и абсолютную пропускную способность, среднее число занятых каналов, среднее число заявок в

очереди, среднее число заявок в СМО, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее время пребывания заявки в СМО для одноканальной СМО и тремя местами в очереди при условиях: $\lambda=4$ заявки/ч, $t_{\text{обсл.}}=0,5$ ч. Как изменятся эти характеристики, если увеличить число мест в очереди до четырех?

6). Банк планирует организовать прием оплаты услуги с жителей и имеет для этого в штате три контролера-кассира. Предполагается, что поток жителей будет идти с интенсивностью 40 человек в час. Средняя продолжительность обслуживания одного человека контролером-кассиром составляет 3 мин. Определить характеристики работы банка и оптимальное количество контроллеров-кассиров.

7). Система массового обслуживания – билетная касса с одним окошком и неограниченной очередью. Касса продает билеты в пункты А и В. Пассажиры, желающих купить билет в пункт А, приходят в среднем трое за 20 мин., в пункт В – двое за 20 мин. Поток пассажиров простейший. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания – показательное. Вычислить финальные вероятности P_0 , P_1 , P_2 , среднее число заявок в системе и в очереди, среднее время пребывания заявки в системе, среднее время пребывания заявки в очереди.

8). В ремонтной мастерской работают четыре мастера, каждый из которых выполняет заказ в среднем за 20 мин. Клиенты заходят в мастерскую в среднем каждые 25 мин. и, если мастера заняты, - уходят. Определить характеристики работы мастерской и отношение заработанные деньги/не заработанные деньги, если средняя стоимость ремонта составляет 70 руб.

9). Билетная касса имеет два окошка, в каждом из которых продают билеты в два пункта. Потоки пассажиров, покупающих билеты в эти пункты, одинаковы по интенсивности, которая равна 0,45 пассажира в минуту. Среднее время обслуживания пассажира 2 мин. Вычислить среднюю длину очереди, среднее время пребывания пассажира в очереди.

10). Вновь созданное предприятие планирует покупку каналов связи. Сколько каналов предприятию необходимо закупить, если заявки от клиентов будут поступать с интенсивностью 80 заявок в час, а средняя продолжительность разговора будет составлять 2,8 мин.

11). Двое рабочих обслуживают шесть станков. Станок требует наладки в среднем через каждые полчаса. Наладка занимает в среднем у рабочего 10 мин. Определить среднее число занятых рабочих, абсолютную пропускную способность, среднее число неисправных станков.

12). В магазине работают две кассы. Среднее время обслуживания 1 покупателя – 5 мин. Интенсивность потока покупателей 4 чел./мин. По технологическим причинам существует ограничение на количество человек в очереди в кассу – не более 6 чел. Покупатель, пришедший в магазин, в котором в каждой очереди в кассу – 6 человек, не ждет, а уходит из магазина. Определить характеристики работы магазина и вероятность того, что пришедший в магазин покупатель покинет его необслуженным.

13). АТС одновременно может обслуживать n абонентов. Поток вызовов является простейшим с интенсивностью $\lambda=2$. Распределение длительности разговора абонентов показательное с интенсивностью $\mu=2$. Вычислить число каналов n , при котором вероятность отказа очередному абоненту не более 0,01, и среднее число занятых линий при выполнении этого требования.

14). Дайте оценку работы телефонной компании, если у нее имеется 4 канала связи, за один час поступает в среднем 120 телефонных звонков, среднее время ответа на звонок – 1,2 мин.

15). В проектируемый аэропорт будет поступать поток самолетов, в среднем 20 самолетов в час. Одна взлетно-посадочная полоса в среднем принимает самолет за 2 мин. Каково наименьшее количество полос, при котором все полосы одновременно заняты менее 5% времени? Каковы при этом среднее число занятых полос и среднее время ожидания очереди?

16). В типографию с тремя множительными аппаратами поступают заказы от соседних предприятий на размножение рабочей документации. Если все аппараты заняты, то вновь поступающий заказ не принимается. Среднее время работы с одним заказом составляет 2 часа. Интенсивность потока – 0,5 заявки в час. Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы типографии.

17). На телефонной станции имеются три линии. Поток вызовов имеет интенсивность 0,5 вызова в минуту, средняя продолжительность разговора составляет 3 мин. Найти вероятность отказа, относительную и абсолютную пропускные способности системы.

18). Порт имеет один грузовой причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов составляет 0,5 судов в сутки. Среднее время разгрузки одного судна – 2 суток. Предполагается, что длина очереди не имеет ограничений. Найти показатели эффективности работы причала.

19). Автозаправочная станция имеет две колонки, площадка возле нее допускает одновременное ожидание не более четырех автомашин. Поток автомашин, прибывающих на станцию, простейший, с интенсивностью $\lambda=1$ машина/мин. Время обслуживания автомашины – определяется показательным законом со средним значением $t_{\text{обсл.}}=2$ мин. Найти вероятность отказа, относительную и абсолютную способность, среднее число занятых каналов, среднее число машин в очереди, среднее число машин в СМО.

20). К кассе поступает поток покупателей интенсивностью 75 чел. в час. Средняя продолжительность обслуживания кассиром одного человека составляет 3,5 мин. Определить характеристики работы магазина, а также требуемое минимальное количество кассиров с тем, чтобы очередь в кассу не росла и была не более 5 человек.

4.2 Методические указания к выполнению индивидуального задания № 4

Задание 1.

Определим верхнюю и нижнюю цены игр и, если это возможно, то и седловую точку платежной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение:

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	4	9	5	3	3
A_2	7	8	6	9	6
A_3	7	4	2	6	2
A_4	8	3	4	7	3
β_j	8	9	6	9	

Найдем числа α_i и β_j :

$\alpha_i = \min_j a_{ij}$ – минимально возможный выигрыш игрока А,

применяющего стратегию A_i ($i=\overline{1,m}$); $\beta_j = \max_i a_{ij}$ – максимально возможный проигрыш игрока, если он пользуется стратегией β_j ($j=\overline{1,n}$).

После определения чисел α_i и β_j найдем нижнюю и верхнюю цены игры: $\alpha = \max_i \alpha_i$ – нижняя цена игры, $\beta = \min_j \beta_j$ – верхняя цена игры.

$$\alpha = \max(3, 6, 2, 3) = 6, \beta = \min(8, 9, 6, 9) = 6.$$

Если $\alpha = \beta$, то игра имеет седловую точку и чистую цену игры $v = \alpha = \beta$. В нашем примере $\alpha = \beta = 6$, следовательно, $v = 6$ – чистая цена игры.

Пару чистых стратегий A_i и B_j , соответствующих α и β называют седловой точкой матричной игры, а элемент a_{ij} платежной матрицы, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца – седловым элементом платежной матрицы. Стратегии A_i и B_j , образующие седловую точку, являются оптимальными. Тройку $\{A_i; B_j; v\}$ называют решением игры. Данная игра имеет седловую точку и седловой элемент $a_{23} = 6 = v$. Оптимальные стратегии – A_2 и B_3 .

Тройка $\{A_2; B_3; 6\}$ является решением игры.

Ответ: $\{A_2; B_3; 6\}$.

Задание 2.

Найдем решение игры, заданной матрицей с использованием геометрической интерпретации.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$\alpha = \max(4, 2) = 4$; $\beta = \min(5, 6) = 5$; $\alpha \neq \beta$; $4 \leq v \leq 5$. Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в смешанных стратегиях. Построим на плоскости отрезки, соответствующие стратегиям второго игрока.

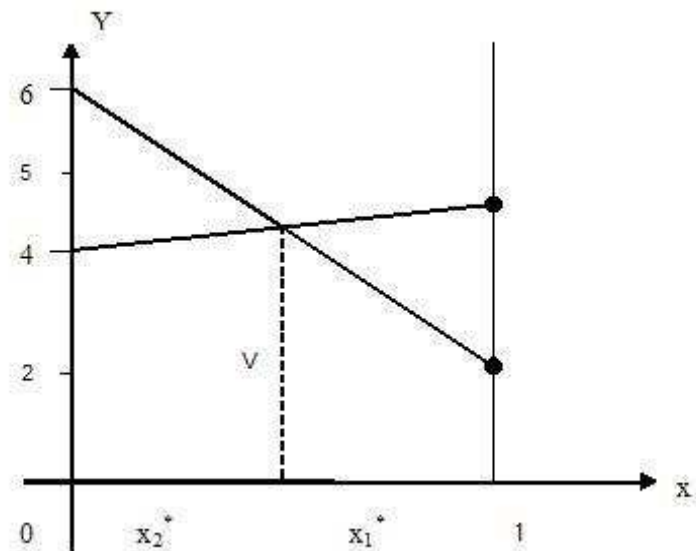


Рисунок 36. Геометрическая интерпретация решения задания 2.

Составим систему уравнений для определения оптимальной стратегии S_A^* и цены игры v :

$$\begin{cases} 4x_1^* + 5x_2^* = v, \\ 6x_1^* + 2x_2^* = v, \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x_1^* = \frac{3}{5}$, $x_2^* = \frac{2}{5}$, $v = \frac{22}{5}$.

Составим аналогичную систему уравнений для определения оптимальной стратегии S_B^* :

$$\begin{cases} 4y_1^* + 6y_2^* = v, \\ 5y_1^* + 2y_2^* = v, \\ y_1^* + y_2^* = 1. \end{cases}$$

Решение системы: $y_1^* = \frac{4}{5}$, $y_2^* = \frac{1}{5}$, $v = \frac{22}{5}$.

Ответ: оптимальные смешанные стратегии игроков

$$S_A^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right) \text{ и } S_B^* = \left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right), \text{ цена игры } v = \frac{22}{5}.$$

Задание 3.

Справочное бюро имеет одну телефонную линию, на которую в среднем приходит 0,4 вызова в минуту. Среднее время разговора 1,3 мин. Вызов, пришедший во время разговора, не обслуживается. Считая потоки

вызовов пуассоновскими, найти абсолютную и относительную пропускную способности справочного бюро и вероятность отказа абоненту.

Решение:

Рассматриваем справочное бюро с одной телефонной линией как одноканальную СМО с отказами.

$$\lambda=0,4 \text{ – интенсивность поступающего потока, } \mu=\frac{1}{T_{\text{обс}}}=\frac{1}{1,3}=0,77 -$$

интенсивность обслуженного потока.

Относительная пропускная способность:

$$Q=\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\frac{0,77}{0,4+0,77}=0,66.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A=\lambda \cdot Q=0,4 \cdot 0,66=0,26.$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки, когда канал занят:

$$p_{\text{отк}}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=\frac{0,4}{0,4+0,77}=0,34.$$

Ответ: $Q=0,66$; $A=0,26$; $p_{\text{отк}}=0,34$.

5. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Максимальное количество, которое может набрать студент по итогам изучения модулей дисциплины (в ходе текущей работы и её контроля) по обязательным формам работы, – **80 баллов**. Это составляет 80% от общего возможного количества баллов.

1. Посещение лекций и конспектирование добавляет в рейтинг студента по **1 баллу** за каждое занятие.

2. Посещение практического занятия с конспектированием – **1 балл**.

3. По итогам изучения каждого модуля студент выполняет индивидуальное задание, за выполнение которого, он может заработать до **5 баллов** или до **10 баллов** (в зависимости от модуля).

4. Публичное решение задачи на практическом занятии добавляет в рейтинг студента **1 балл**.

5. Составление конспекта или реферата по теме, выделенной на самостоятельное изучение, добавляет в рейтинг студента **8 баллов**.

Зачетное задание включает в себя 2 части: теоретическую и практическую. По теоретической части проводится собеседование, по итогам которого студент может набрать до **4 баллов**. Практическая часть представлена тестовыми заданиями, за выполнение которых студент может набрать до **16 баллов**.

Рейтинг студента по дисциплине определяется в результате суммирования данных текущей работы и итогового контроля. Максимальное число баллов – **100**. Студент, набравший по итогам работы в семестре менее **30 баллов**, не получает допуск к зачёту.

Оценка «зачтено» ставится в случае, если студент набирает **51–100 баллов**, «не зачтено» – ниже **51 балла**.

В случае зачёта с оценкой набранные баллы переводятся в традиционные оценки по следующей шкале:

- 86 и более – «отлично»;
- 66 – 85 – «хорошо»;
- 51 – 65 – «удовлетворительно»;
- 50 и менее – «неудовлетворительно».

6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. **Балдин, К. В.** Математическое программирование [Электронный ресурс] : учебник : текстовое электрон. изд. / К. В. Балдин, Н. А. Брызгалов, А. В. Рукусуев. – 2-е изд. – Электрон. текстовые дан. – Москва : Дашков и К, 2018. – 218 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/415097>. – Загл. с экрана. – ISBN 978-5-394-01457-4.

2. **Литвин, Д. Б.** Линейное программирование. Транспортная задача [Электронный ресурс] : учеб. пособие : текстовое электрон. изд. / Д. Б. Литвин, С. В. Мелешко, И. И. Мамаев. – Электрон. текстовые дан. – Ставрополь : Сервисшкола, 2017. – 84 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/976430>. – Загл. с экрана.

3. **Невежин, В. П.** Исследование операций и принятие решений в экономике [Электронный ресурс] : сборник задач и упр. : учеб. пособие для вузов : текстовое электрон. изд. / В. П. Невежин, С. И. Кружилов, Ю. В. Невежин. – Электрон. текстовые дан. – Москва : Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 400 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/504735>. –

Загл. с экрана. – ISBN 978-5-91134-556-3.

4. **Шапкин, А. С.** Математические методы и модели исследования операций [Электронный ресурс] : учебник : текстовое электрон. изд. / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – Электрон. текстовые дан. – Москва : Дашков и К, 2016. – 400 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/557767>. – Загл. с экрана. – ISBN 978-5-394-02610-2.

Дополнительная литература

1. **Костевич, Л. С.** Исследование операций. Теория игр [Электронный ресурс]: учеб. пособие : текстовое электрон. изд. / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – 2-е изд., перер. и доп. – Электрон. текстовые дан. – Минск : Выш. шк., 2008. – 368 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/505152>. – Загл. с экрана. – ISBN 978-985-06-1308-0.

2. **Лемешко, Б. Ю.** Теория игр и исследование операций [Электронный ресурс]: конспект лекций : текстовое электрон. изд. / Б. Ю. Лемешко. – Электрон. текстовые дан. – Новосибирск: НГТУ, 2013. – 167 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/558878>. – Загл. с экрана. – ISBN 978-5-7782-2198-7.

3. **Невежин, В. П.** Сборник задач по курсу Экономико-математическое моделирование. [Текст]: сборник задач : В. П. Невежин, С. И. Кружилов. – Москва : ОАО Издательский Дом Городец, 2005. – 320 с.

4. **Орлова, И. В.** Экономико-математическое моделирование [Электронный ресурс]: практич. пособие по решению задач: текстовое электрон. изд. / И. В. Орлова. – 2-е изд., испр. и доп. – Электрон. текстовые дан. – Москва : Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2018. – 140 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=648503>. – Загл. с экрана.

5. **Фомина, А. В.** Индивидуальные задания по курсу Исследование операций [Текст] : метод. указания для студентов дн. отдел. физико-математического фак. / А. В. Фомина. – 2-е изд.; испр. и доп. – Новокузнецк: РИО КузГПА, 2010. – 67 с.