Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кемеровский государственный университет» Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики

Кафедра математики, физики и математического моделирования

В.Б. Гридчина

Математический анализ

Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Новокузнецк

2020

Гридчина В.Б.

Математический анализ: метод. указ. по выполнению домашней контрольной работы для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем / В.Б. Гридчина. - Новокузнецк ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2020. – 21 с.

Методические материалы содержат указания по изучению дисциплины: основные теоретические сведения; варианты домашней контрольной работы; образец решения домашней контрольной работы; список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения направлений 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.

Рекомендовано на заседании кафедры
математики, физики и математического
моделирования
Протокол № 5 от 10.12.2020
Заведующий каф. МФММ

________ / Е.В. Решетникова

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем и направлены на оказание помощи студентам в выполнении домашней контрольной работы по дисциплине "Математический анализ".

Владение методами математического анализа позволяют успешно осваивать последующие дисциплины, являющиеся основой хорошего математического образования. Без знания математического анализа невозможно построить математическую модель, описывающую реальный процесс и, тем более, получить качественное решение.

Целью освоения дисциплины "Математический анализ" является изучение основных математических понятий, их взаимосвязи и развития, а также отвечающих им методов расчёта, используемых для анализа, моделирования и решения прикладных задач. В задачи курса математического анализа входят: развитие алгоритмического и логического мышления студентов, овладение методами исследования и решения математических задач, выработка у студентов умения самостоятельно расширять свои математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

Домашняя контрольная работа предназначена для проверки знаний студентов по разделу: "Приложения производной".

В методические рекомендации включены: основные теоретические сведения по разделу: "Приложения производной"; 30 вариантов домашней контрольной работы; образец ее решения; список основной и дополнительной литературы.

Данные методические материалы позволяют преподавателю качественно организовать работу на практических занятиях, а студенту подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам и успешно выполнить домашнюю контрольную работу.

1. Приложения производной

Возрастание и убывание функций

Теорема.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на промежутке (a, b).

Аналогично можно сделать вывод о том, что если $f'(x)<0$ на промежутке (a, b), то $f(x)$ убывает на промежутке (a, b).

Экстремум функции

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 +\Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

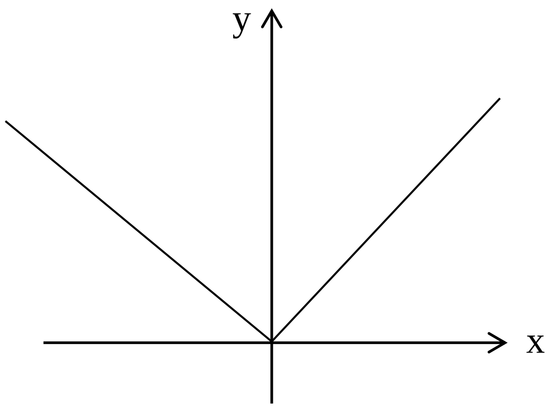
Теорема. (необходимое условие существования экстремума) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке x = 0 равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

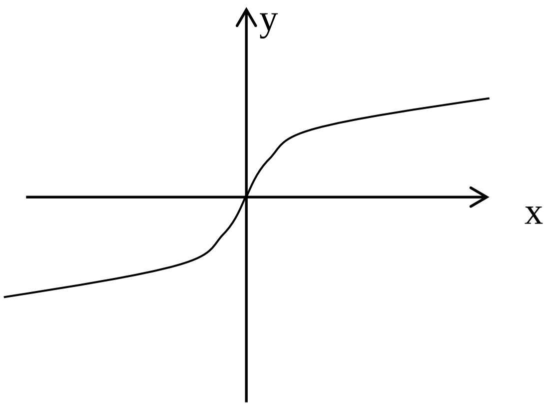
Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример: f(x) = $|x|$



В точке x = 0 функция имеет минимум, но имеет производной.

Пример: f(x) = $\sqrt[3]{x}$



В точке x = 0 функция не имеет экстремума.

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

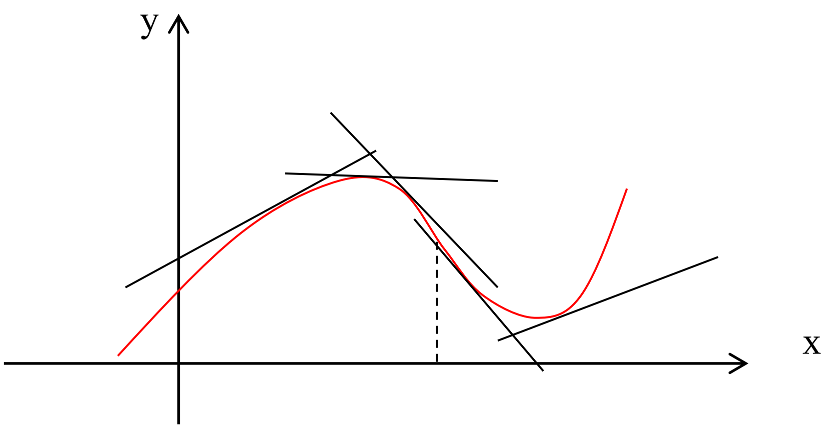
Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции f′(x) меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Определение. Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется вогнутой.



Теорема. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема. Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку x = a $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.

Асимптоты

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть вертикальными и наклонными. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке.

Вертикальные асимптоты

Из определения асимптоты следует, что если $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая x = a – асимптота кривой y = f(x).

Наклонные асимптоты

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту y = kx + b.

Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Т.к. x→∞, то $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$, т.к. b = const, то $\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$; $\lim_{x\to\infty} k = k$.

Тогда $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Т.к. $\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - (kx+b)\right] = 0$, то $\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] - \lim_{x\to\infty} b = 0$, следовательно,

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

Общая схема исследования функции

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо найти:

1) Область определения функции.
2) Четность, нечетность.
3) Точки разрыва. Асимптоты.
4) Точки пересечения графика функции с осями координат.
5) Интервалы возрастания и убывания. Точки максимума и минимума.
6) Интервалы выпуклости и вогнутости. Точки перегиба.

2. Варианты домашней контрольной работы

Исследовать методами дифференциального исчисления следующие функции и, используя результаты исследования, построить их графики:

№ 1

1. $y = \dfrac{x}{1-x^2}$

2. $y = e^{-x^2}$

№ 2

1. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$

2. $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$

№ 3

1. $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

2. $y = e^{2x-x^2}$

№ 4

1. $y = \dfrac{4x^3-x^4}{8}$

2. $y = x + arctgx$

№ 5

1. $y = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

2. $y = \dfrac{e^x}{x}$

№ 6

1. $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

2. $y = e^{\frac{1}{1-x}}$

№ 7

1. $y = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

2. $y = x^2 \cdot e^x$

№ 8

1. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$

2. $y = \ln(1+\dfrac{1}{x^2})$

№ 9

1. $y = \dfrac{x^2}{(x+2)^2}$

2. $y = e^{arctgx}$

№ 10

1. $y = x^3 \cdot e^{-x}$

2. $y = x \cdot \sqrt{x+3}$

№ 11

1. $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$

2. $y = x + arctgx$

№ 12

1. $y = \dfrac{x^3}{x^2-x+1}$

2. $y = x + arctgx$

№ 13

1. $y = 3\cdot\sqrt[3]{x} - x$

2. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

№ 14

1. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x + 1}$

2. $y = x^2 - 2\ln x$

№ 15

1. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

2. $y = x \cdot arctgx$

№ 16

1. $y = x^3 \cdot e^{-x}$

2. $y = x \cdot \sqrt{x+3}$

№ 17

1. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

2. $y = x^2 + e^{-x}$

№ 18

1. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

2. $y = e^{\sqrt[3]{x2}}$

№ 19

1. $y = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

2. $y = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

№ 20

1. $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

2. $y = x + e^{-x}$

№ 21

1. $y = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}$

2. $y = x^2 \cdot \ln x$

№ 22

1. $y = \dfrac{4x}{1 + x^2}$

2. $y = \ln\dfrac{x}{x-1}$

№ 23

1. $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

2. $y = e^{-x} \cdot x^2$

№ 24

1. $y = \dfrac{x^2}{3 - x}$

2. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

№ 25

1. $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$

2. $y = (2x-1)\cdot e^{\frac{2}{x}}$

№ 26

1. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

2. $y = x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

№ 27

1. $y = (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$

2. $y = \ln(1 + e^{-x})$

№ 28

1. $y=\frac{4x}{1+x^2}$

2. $y=\ln(1+e^{-x})$

№ 29

1. $y=\frac{x^2}{4x^2-1}$

2. $y=\frac{e^x}{1+x}$

№ 30

1. $y=\frac{1-x^2}{x}$

2. $y=x^2-2\ln x$

3. Образец решения варианта контрольной работы

Исследовать методами дифференциального исчисления следующие функции и, используя результаты исследования, построить их графики:

а) $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$;

1) Область определения функции. $D(y): x \neq 0$.

2) Четность или нечетность функции.

$$y(-x) = -\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$$

y(-x) = -y(x), нечетная функция

3) Точки разрыва. Асимптоты.

Уравнения наклонной асимптоты *y = kx + b*.

Находим коэффициент *k*:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 \cdot x^2 - 1}{x^4} = 0$$

Находим коэффициент *b:*

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - k \cdot x$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} - 0 \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{3 \cdot x^2 - 1}{x^3} = 0$$

Получаем уравнение горизонтальной асимптоты: *y = 0*

Найдем вертикальные асимптоты.

Для этого определим точки разрыва: x = 0

Находим переделы в точке x=0

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{3 \cdot x^2 - 1}{x^3} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{3 \cdot x^2 - 1}{x^3} = -\infty$$

x = 0 - точка разрыва II рода и является вертикальной асимптотой.

4) Точки пересечения графика функции с осями координат.

Пересечение с осью 0Y

Нет пересечений.

Пересечение с осью 0X

y=0

$$\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}=0$$

$$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

5) Интервалы возрастания и убывания. Точки максимума и минимума.

Находим первую производную.

$$f'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^4}$$

или

$$f'(x)=\frac{-3\cdot x^2+3}{x^4}$$

Находим критические точки. Для этого приравниваем производную к нулю

$-3\cdot x^2+3 = 0$

Откуда: $x_1 = -1$ $x_2 = 1$

(-∞ ;-1)	(-1; 0)	(0; 0)	(0; 1)	(1; +∞)
f '(x) < 0	f '(x) > 0		f '(x) > 0	f '(x) < 0
функция убывает	функция возрастает		функция возрастает	функция убывает

В окрестности точки x = -1 производная функции меняет знак с (-) на (+). Следовательно, точка x = -1 - точка минимума. В окрестности точки x = 1 производная функции меняет знак с (+) на (-). Следовательно, точка x = 1 - точка максимума.

6) Интервалы выпуклости и вогнутости. Точки перегиба

Найдем вторую производную.

$$f''(x) = -\frac{6}{x^3} - \frac{4(-3 \cdot x^2 + 3)}{x^5}$$

или

$$f''(x) = \frac{6 \cdot x^2 - 12}{x^5}$$

Находим корни уравнения. Для этого полученную функцию приравняем к нулю.

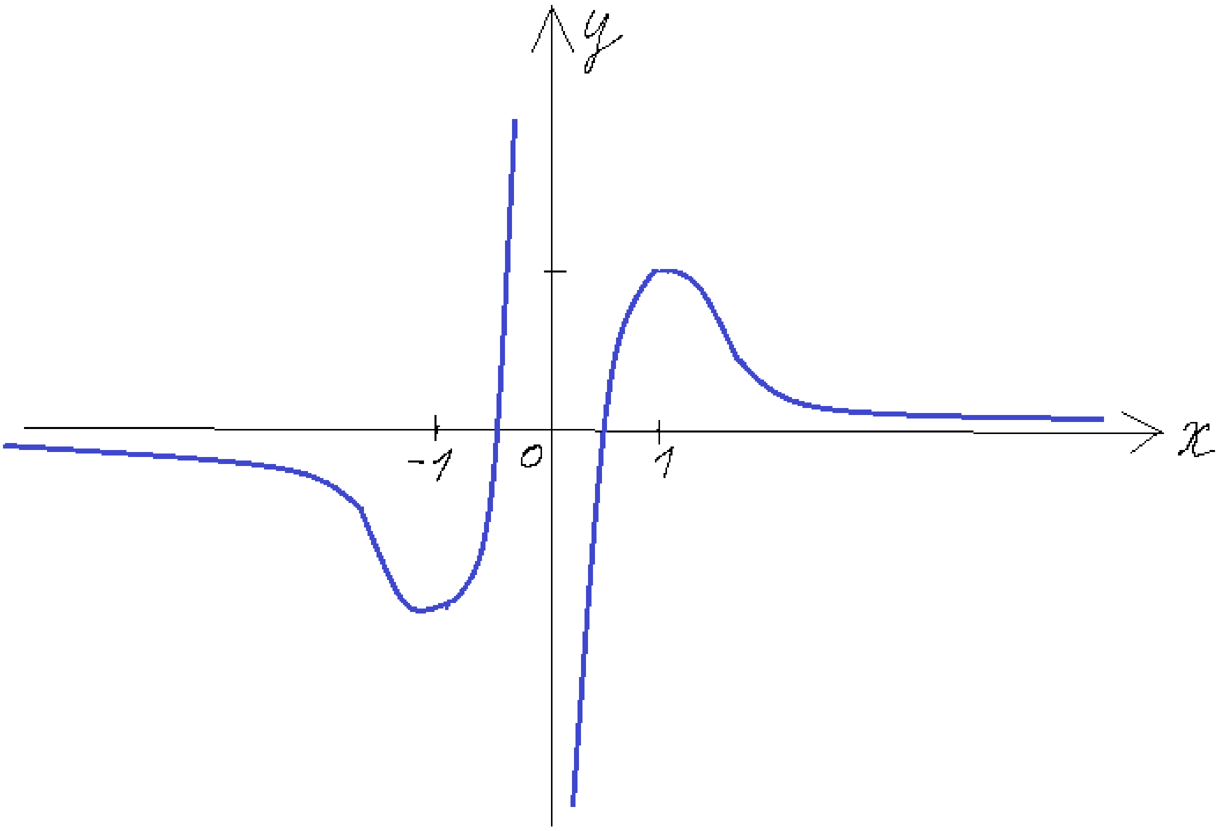
$$\frac{6 \cdot x^2 - 12}{x^5} = 0$$

Откуда точки перегиба:

$$x_1 = -\sqrt{2}$$
$$x_2 = \sqrt{2}$$

$(-\infty\ ; -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2};\ 0)$	$(0;\ \sqrt{2})$	$(\sqrt{2};\ +\infty\,)$
f "(x) < 0	f "(x) > 0	f "(x) < 0	f "(x) > 0
функция выпукла	функция вогнута	функция выпукла	функция вогнута

Построим график функции.



б) $y = \ln(1 - \frac{1}{x^2})$.

1) Область определения функции. $D(y): 1 - \frac{1}{x^2} > 0, x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

2) Четность или нечетность функции.

$$y(-x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

y(-x) = y(x), четная функция

3) Точки разрыва. Асимптоты кривой.

Уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$.

Находим коэффициент k:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

Находим коэффициент b:

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - k \cdot x$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - 0 \cdot x = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Получаем уравнение горизонтальной асимптоты: $y = 0$

4) Точки пересечения графика с осями координат.

Пересечение с осью 0Y

Нет пересечений.

Пересечение с осью 0X

y=0

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Нет пересечений.

5) Интервалы возрастания и убывания. Точки максимума и минимума.

Найдем первую производную.

$$f'(x) = \frac{2}{x^3(1 - \frac{1}{x^2})}$$

или

$$f'(x) = \frac{2}{x(x^2 - 1)}$$

Находим критические точки. Для этого приравниваем производную к нулю. Получим: $1 \neq 0$.

Данное уравнение корней не имеет.

6) Интервалы выпуклости и вогнутости. Точки перегиба

Найдем вторую производную.

$$f''(x) = -\frac{4}{(x^2-1)^2} - \frac{2}{x^2(x^2 - 1)}$$

или

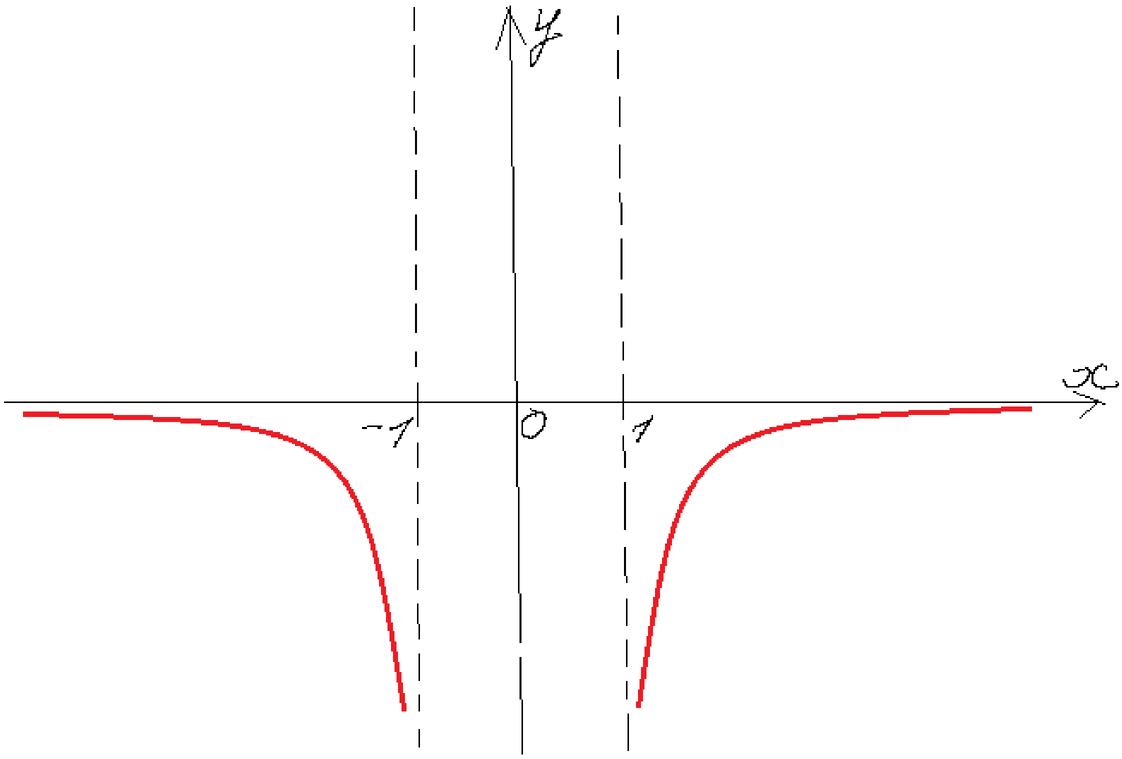
$$f''(x) = \frac{-6 \cdot x^2 + 2}{x^2(x^2-1)^2}$$

Находим корни уравнения. Для этого полученную функцию приравняем к нулю.

$$\frac{-6 \cdot x^2 + 2}{x^2(x^2-1)^2} = 0$$

Точек перегиба нет.

Построим график функции.



4. Рекомендуемая литература:

Основная учебная литература

1. Полькина, Е.А. Сборник задач по высшей математике с образцами решений (Математический анализ) [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Е.А. Полькина, Н.С. Стакун - Электрон.текстовые дан. – Москва : МПГУ, 2013. – 200 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=240475

2. Гурьянова, К.Н. Математический анализ [Электронный ресурс] : учебн. пособие / К.Н. Гурьянова, У.А. Алексеева, В.В. Бояршинов - Электрон.текстовые дан. – Екатеринбург : Изд-во Уральского университета, 2014. – 330 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=275708

Дополнительная учебная литература

1. Шершнев В.Г. Математический анализ [Электронный ресурс]: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. . - Электрон.текстовые дан. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 288 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=342089

2. Шершнев В.Г. Математический анализ [Электронный ресурс]: сборник задач с решениями: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - Электрон.текстовые дан - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 164 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=342088

3. Математический анализ. Теория и практика [Электронный ресурс] : Учебное пособие / Шипачев В.С., - 3-е изд. - Электрон.текстовые дан - М.:НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=469727

4. Долгополова, А.Ф. Руководство к решению задач по математическому анализу. Ч. 1 : В 2 ч [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.Ф.

Долгополова, Т.А. Колодяжная. - Электрон. текстовые дан - Ставрополь: Сервисшкола, 2012. – 168 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=514584