Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.А. Вячкина, Е. С. Вячкин

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

*Методические указания к выполнению практических работ
для обучающихся по направлениям подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика,
профиль «Математическое моделирование и информационные технологии»
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем,
профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий»
09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль «Автоматизированные системы
обработки информации и управления»
09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике»*

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.88:519.2](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+ 22.171я73
В 99

Вячкина Е. А., Вячкин Е. С.

В 99 Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания к выполнению практических работ для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий», 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль «Автоматизированные системы обработки информации и управления», 09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике» / Е.А. Вячкина, Е. С. Вячкин; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 47 с.

Методические указания содержат разработки девяти основных тем практических занятий с подробным решением демонстрационных примеров, задания для решения на практических занятиях, указания к их выполнению; вопросы для самопроверки, список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов очной, очно-заочной и заочной форм обучения направлений 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий», 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль «Автоматизированные системы обработки информации и управления», 09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике».

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № 2 от 16.09.2020

И.о. заведующего каф. МФММ

__________/ Е.А. Вячкина

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики
Протокол № 1 от 24.09.2020

Председатель методической комиссии ФИМЭ

________________/Г.Н.Бойченко

УДК [378.147.88:519.2](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+ 22.171я73
В 99

Текст представлен в авторской редакции

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к практическим занятиям предназначены для студентов очной формы обучения направлений 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий», 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль «Автоматизированные системы обработки информации и управления», 09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в экономике» для изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» включена в указанные ранее образовательные программы и входит в список обязательных дисциплин. Изучение дисциплины базируется на знаниях, умениях и навыках, полученных в дисциплинах: «Математический анализ», «Алгебра и геометрия» и «Математика».

Методические указания содержат сведения о девяти основных темах курса «Теории вероятностей и математической статистики», каждая из которых включает вопросы для самопроверки, подробно описанное решение демонстрационного примера и задания для решения различного уровня сложности. В конце методических указаний приведен список рекомендуемой к изучению литературы.

Выполнение практических заданий начинается с ответов на вопросы для самопроверки, затем необходимо подробно изучить демонстрационный пример, после чего можно приступать к решению предложенных задач.

Раздел 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Практическая работа 1. Элементы комбинаторики

- Цель: познакомиться с основными формулами комбинаторики и правилами их применения.

Вопросы для теоретической подготовки

1. Сформулировать правило суммы и произведения.
2. Размещения с повторениями и без повторений. Привести примеры задач.
3. Перестановки с повторениями, ограничениями и без повторений.
4. Сочетания с повторениями и без повторений.
5. Раскладка элементов по ящикам. Раздел предметов на две группы.
6. Распределение одинаковых предметов на любое количество групп.
7. Задача о смещении.

Демонстрационные примеры

Пример 1. В колоде 36 карт. Каким количеством способов можно выбрать либо одного туза, либо один козырь?

Решение. Искомое количество равно сумме способов, которыми можно выбрать один туз и один козырь. Один некозырный туз можно выбрать тремя способами, а один козырь – девятью способами. Поэтому либо туз, либо козырь можно выбрать 12 способами (правило суммы).

Пример 2. В колоде 36 карт. Каким количеством способов можно выбрать две карты: одного туза и один козырь?

Решение. Искомое количество равно произведению количества способов, которыми можно выбрать один туз и один козырь. Один некозырный туз можно выбрать тремя способами, а один козырь – девятью способами. Поэтому искомые две карты можно выбрать 27 способами (правило произведения).

Пример 3. Номера лотерейных билетов состоят из 7 цифр. Сколько билетов можно пустить в тираж?

<u>Решение.</u> Искомое количество равно произведению количества способов, которыми можно заполнить каждую из 7 цифр номера билета (правило произведения). Номера билетов образуют 7 размещений с повторениями из 10 возможных цифр, так как цифры могут повторяться. Число всех таких возможных размещений обозначается через $\overline{A}_{10}^{7} = 10^7$.

<u>Пример 4.</u> В олимпиаде участвуют 30 студентов. Сколькими способами могут распределиться первые 3 места?

<u>Решение.</u> Искомое количество равно произведению количества способов, которыми можно заполнить каждое место (правило произведения). Поскольку эти места могут быть заняты разными студентами, то перемножаются числа 30·29·28. Это количество называется тремя размещениями без повторений из 30 возможных студентов и обозначается $A_{30}^{3} = \dfrac{30!}{(30-3)!} = 24360.$

<u>Пример 5.</u> Сколько различных расположений букв можно получить из букв слова «ИЗОТЕРМА»?

<u>Решение.</u> Искомое количество равно произведению количества способов, которыми можно заполнить каждое из 8 мест для буквы (правило произведения). Поскольку эти места могут быть заняты разными буквами, то перемножаются числа 8·7·6·5·4·3·2·1. Это число называется числом перестановок из 8 букв и обозначается $P_8 = 8! = 40320$.

<u>Пример 6.</u> Сколько различных расположений букв можно получить из букв слова «МАТЕМАТИКА»?

<u>Решение.</u> В данном слове 10 букв, причем буква «А» повторяется три раза, а буквы «М» и «Т» по два раза. Поэтому в каждой перестановке, меняя местами буквы «А» или «М» или «Т», мы не получим новых комбинаций (перестановки с повторениями). Число различных расположений букв будет в 3! ·2!·2! раза меньше. Искомое количество равно числу перестановок из 10 букв, деленное на число перестановок каждой из повторяющихся букв

$$P_{10}(3,2,2) = \frac{10!}{3!2!2!} = \frac{10!}{4!} = A_{10}^{6} = 151200.$$

<u>Пример 7.</u> Сколько различных расположений букв можно получить из букв слова «ИЗОТЕРМА» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

<u>Решение.</u> Такие расположения букв называются перестановками с ограничениями. Найдем сначала количество возможных способов

расположения гласных. Поскольку в данном слове 4 согласных, то существует всего 5 мест расположения гласных: 3 места между согласными и 2 – по краям слова. Поэтому количество всех способов равно числу размещений 4 гласных на 5 возможных мест.

Это количество необходимо умножить на количество перестановок 4 согласных (правило произведения). То есть число различных расположений букв равно $A_5^4 \cdot P_4 = 5! \cdot 4! = 2880$.

Пример 8. Сколькими способами можно выбрать 4 сорта из 10 имеющихся в продаже сортов мороженого?

Решение. Варианты выбора считаются разными, если содержат разные сорта мороженого. Поэтому рассматриваются сочетания из 10 сортов по 4 сорта, которые вычисляются по формуле

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210.$$

Пример 9. Сколькими способами можно выбрать 4 порции мороженого, если в продаже имеется 10 сортов мороженого?

Решение. Варианты выбора считаются разными, если содержат разные количества мороженного одного сорта. Поэтому рассматриваются сочетания с повторениями из 10 сортов по 4 порции, которые обозначаются буквой «C» с черточкой и вычисляются по формуле

$$\overline{C}_{10}^4 = C_{13}^4 = \frac{13!}{9! \cdot 4!} = 715.$$

Замечание. Представим каждый сорт мороженого в виде одной из 10 возможных позиций, разделы между которыми изобразим буквой «Р». Итого получится 9 букв «Р». Каждую порцию мороженого представим в виде буквы «М». получится слово из 13 букв, в котором всего две разные буквы: «Р» повторяется 9 раз, а буква «М» – 4 раза. Количество способов выбора 4 порций мороженого равно числу различных расположений букв, входящих в рассматриваемое слово. Искомое количество равно числу перестановок из 13 букв, деленное на число перестановок каждой из повторяющихся букв

$$P_{13}(9,4) = \frac{13!}{9! \cdot 4!} = C_{13}^4.$$

Пример 10. В колоде 36 карт. Сколькими способами можно раздать по 6 карт 4 игрокам?

Решение. Расположим все 36 карт в ряд и будем считать, что первые 6 карт достались первому игроку, вторые 6 карт – второму, третьи 6 карт – третьему, четвертые 6 карт – четвертому игроку, а остальные 12 карт остались в колоде. Тогда различным раскладкам соответствуют такие перестановки карт в этом ряду, которые меняют состав одной из четырех шестерок или 12 последних карт. В этом случае перестановки внутри шестерок и между картами колоды не меняют расклада. Поэтому количество различных перестановок из 36 карт будет больше количества разных раскладов в 6! · 6! · 6!· 6! · 12! раз. Поэтому количество разных раскладов

$$P_{36}(6,6,6,6,12) = \frac{36!}{6!\cdot 6!\cdot 6!\cdot 6!\cdot 12!}.$$

Пример 11. У двух ребят есть 10 яблок, 15 апельсинов и 14 груш.

1. Сколькими способами они могут разделить эти фрукты между собой?

2. Как изменится количество способов раздела, если каждому ребенку достанется не менее двух фруктов каждого вида?

Решение. Яблоки можно разделить 11 способами, апельсины – 16 способами и груши – 15 способами. Согласно правилу произведения все эти способы перемножаются 11 ·16 ·15 = 2640 способов.

Во втором случае в разделе участвуют 10 – 4 = 6 яблок, 15 – 4 = 11 апельсинов и 14 – 4 = 10 груш. Согласно правилу произведения все способы раздела фруктов перемножаются 7 ·12 ·11 = 924.

Пример 12. У трех ребят есть 40 яблок. Сколькими способами они могут разделить все яблоки между собой?

Решение. Представим каждого из 3 ребят как возможную позицию для размещения яблок, разделы между которыми изобразим буквой «Р». Итого получится 2 буквы «Р». Каждое яблоко представим в виде буквы «Я». Получится слово из 42 букв, в котором всего две разные буквы: «Р» повторяется 2 раза, а буква «Я» – 40 раз. Количество способов раздела 40 яблок равно числу различных расположений букв, входящих в рассматриваемое слово. Искомое количество равно числу перестановок из 42 букв, деленное на число перестановок каждой из повторяющихся букв

$$P_{42}(2,40) = \frac{42!}{2!\cdot 40!} = C_{42}^{40} = 861.$$

Пример 13. Берутся все перестановки из 5 чисел 1, 2, 3, 4, 5. Найти количество перестановок N, в которых ни одно из этих чисел не остается на месте.

Решение. Представим это количество как разность всех перестановок P_5 и количества перестановок P_4, в которых одно из чисел стоит на своем месте. Таких чисел будет 5 = C_5^1. Однако мы вычли слишком много перестановок, так как среди них попадаются и такие, в которых другое число тоже стоит на своем месте. Поэтому к полученной разности необходимо добавить количество перестановок P_3, в которых два числа стоят на своих местах. Таких пар чисел будет 10 = C_5^2. И так далее. Таким образом, искомое количество представляется в виде

$$N = P_5 - C_5^1 \cdot P_4 + C_5^2 \cdot P_3 - C_5^3 \cdot P_2 + C_5^4 \cdot P_1 - C_5^5 \cdot P_0 = 44.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Из 3 групп студентов нужно выбрать одного участника олимпиады по математике. Каким количеством способов это можно сделать, если в первой группе 10 студентов увлекаются математикой, во второй – только 5 студентов, а в третьей – 7 студентов? (22).

2. Из 2 групп студентов нужно выбрать 2 участников олимпиады, в которой предлагаются задания по математике и информатике. Каким количеством способов это можно сделать, если в первой группе 12 студентов увлекаются математикой, а во второй – 10 студентов увлекаются информатикой? (120).

3. Сколько существует способов задать на компьютере код, состоящий из 4 букв русского алфавита? (33^4 = 1185921) .

4. На денежных знаках печатается индекс, состоящий из 2 букв русского алфавита и семи цифр от 0 до 9 каждая. Сколько сторублевых купюр можно напечатать, чтобы индекс был разным? (10 890 000 000).

5. Путем опроса общественного мнения изучается рейтинг 10 политиков. Сколькими способами могут распределиться первые четыре места? (5040).

6. Флаг страны состоит из 3 разноцветных горизонтальных полос. Сколько стран могут иметь такой флаг, если участвуют 7 цветов спектра и белый цвет? (336).

7. На собрании должны выступить 5 человек. Сколькими способами можно составить список выступающих? (120).

8. Сколькими способами можно составить кортеж президента, если он состоит из 3 «мерседесов», 4 «БМВ» и 5 мотоциклов? (27720).

9. В очереди стоят 5 мужчин и 4 женщины. Сколько разных очередей можно составить, если женщины не стоят в очереди друг за другом? (43200).

10. На телеканал ОРТ поступило 10 реклам, среди которых 4 рекламы зубной пасты. Сколькими способами можно составить очередность

показа этих реклам, чтобы никакие две рекламы зубной пасты не шли одна за другой? (25200).

11. Команда по мини-футболу состоит из 10 футболистов. Сколькими способами можно выбрать основной состав из 6 игроков? (210).

12. Для проведения вступительного экзамена создается комиссия из 3 математиков и 2 экономистов. Сколькими способами можно составить комиссию, если в вузе работает 10 математиков и 12 экономистов? (7920).

13. Два филателиста решили обменять 3 марки. Сколькими способами это можно сделать, если первый филателист приготовил для обмена 12 марок, а второй – 10 марок? (26400).

14. В колоде 36 карт. Сколькими способами можно набрать 21 очко, выбрав 3 карты, если валет имеет 2 очка, дама – 3 очка, король – 4 очка, а туз – 11 очков? (564).

15. В кондитерском магазине продаются 4 вида пирожных: заварные, песочные, слоеные и корзинка. Сколькими способами можно купить 6 пирожных? (84).

16. На первом этаже 9-этажного дома в лифт вошли 4 человека. Сколькими способами они могут выйти, если лифт останавливается только на первых 8 этажах? (210).

17. При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать? ($28!/(7!)^4$).

18. Для проверки 4 объектов прибыла комиссия из 8 человек. Сколькими способами можно распределить членов комиссии по два человека на каждый объект? (2520).

19. Двое грибников собрали 10 подберезовиков, 10 белых грибов и 15 подосиновиков. Сколькими способами они могут разделить эти грибы, чтобы каждому грибнику досталось не менее 3 грибов каждого вида? (250).

20. У воспитателя в детском саду было 100 конфет. Сколькими способами можно разделить конфеты, если в группе 20 детей, и каждому должно достаться не менее 3 конфет? (C^{40}_{59}).

21. Почтальон должен разнести 5 разных газет, но не поставил на них адреса и разнес их наугад. Найти количество возможных случаев, в которых только две газеты попали по адресу (20).

Шесть человек взяли из колоды по одной карте. Затем все эти карты перемешали и раздали снова. Сколько существует вариантов раздачи, в которых ни один не получил ту же карту, которую вытащил вначале (265)?

Практическая работа 2. Случайное событие и его вероятность

➢ Цель: выработать навыки вычисления вероятности случайного события, научить решать основные задачи комбинаторики.

Вопросы для теоретической подготовки

1. Что называется, случайным событием? Какое событие называется невозможным, достоверным?

2. Что называется, исходом испытания? Какие исходы называются равновероятными?

3. Что называется, вероятностью случайного события и как она определяется? Классическое определение вероятности.

4. Геометрическое определение случайного события и его вероятности.

5. Статистическое определение вероятности. Свойства.

Демонстрационные примеры

Пример 1. В туристическом агентстве предлагаются 20 вариантов путевок, среди которых 2 ненадежных варианта. Покупатель выбирает наудачу три варианта путевок. Какова вероятность того, что выбраны только надежные путевки?

Решение. Вероятность искомого события вычисляется по классической формуле $P = m/n$, где n – общее число вариантов выбора трех путевок из двадцати, а m – число вариантов выбора трех надежных путевок. Эти числа определяются с помощью сочетаний

$$\mathrm{P} = \frac{C_{18}^{3}}{C_{20}^{3}} = \frac{18! \cdot 17!}{15! \cdot 20!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{68}{95}.$$

Пример 2. Стрелок стреляет в круглую мишень радиуса R = 3 см, разделенную на три части двумя концентрическими окружностями радиуса r_1 = 1 см и r_2 = 2 см. Найти вероятность того, что стрелок попадет в кольцо между этими окружностями, если вероятность попадания в кольцо пропорциональна его площади и не зависит от его расположения.

Решение. Вероятность искомого события вычисляется с помощью геометрического определения вероятности P = Площадь кольца / Площадь мишени. Площадь кольца равна $\pi(r_2^2 - r_1^2)$, а площадь мишени равна πR^2. Поэтому получается результат $P = (r_2^2 - r_1^2)/ R^2 = 1/3$.

Задания для самостоятельного решения

1. В студенческой группе 15 девушек и 5 юношей. Для участия в КВН наудачу выбраны 5 человек. Какова вероятность того, что выбраны 5 девушек? (1001/5168).

2. В студенческой группе 12 человек, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 7 студентов. Какова вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников? (14/33).

3. В колоде 36 карт. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу двух карт окажется:

а) король и туз. (8/315) ;

б) некозырной туз и любой козырь. (3/70) ;

в) либо тузы, либо козыри? (11/105).

4. В кодовом замке 10 кнопок, на каждой из которых написана цифра от 0 до 9. Замок открывается только в том случае, если нажаты три разные кнопки в определенном порядке. Какова вероятность того, что при произвольном нажатии трех кнопок замок можно будет открыть? (1/720).

5. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Какова вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость:

а) оказалась дублем. (2/9) ;

б) не есть дубль? (4/9).

6. На полке случайным образом расставлены $\boldsymbol{n}$ книг. Какова вероятность того, что два тома «Курса высшей математики» окажутся рядом? ($2/n$).

7. Лифт останавливается на первых восьми этажах. Какова вероятность того, что из четырех человек, зашедших в кабину на первом этаже, один выйдет на пятом этаже, а остальные – на восьмом? (1/210).

8. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями? (0,75).

9. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной $\boldsymbol{a}$ наудачу

брошена монета радиуса $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{a}/2$. Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата? ($(a - 2r)^2/a^2$).

Практическая работа 3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

- Цель: выработать навык простейших операций со случайными событиями и их вероятностями и научить пользоваться основными следствиями теорем сложения и умножения вероятностей

Вопросы для теоретической подготовки

1. Какое событие называется суммой или произведением двух случайных событий?
2. Какие два события называются несовместными, противоположными, независимыми?
3. Теорема сложения двух несовместных событий и следствие.
4. Теорема умножения двух независимых событий и следствие.
5. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий.
6. Теорема сложения двух совместных, зависимых событий и следствие.
7. Условная вероятность и формула ее вычисления. Теорема умножения вероятностей двух зависимых событий и следствия.
8. Какие события называются попарно независимыми, независимыми в совокупности?
9. Полная группа событий и формула полной вероятности.
10. Априорная и апостериорная условная вероятность. Формула Байеса.
11. Пространство элементарных событий и его свойства.

Демонстрационные примеры

Пример 1. Студент не подготовил пять из двадцати вопросов программы. Экзаменационный билет, выбранный наудачу, состоит из трех вопросов. Какова вероятность того, что хотя бы один из вопросов билета оказался неподготовленным (событие A).

Решение. Первый способ. Требование – хотя бы один из вопросов билета оказался неподготовленным – будет осуществлено, если произойдет любое из следующих трех событий: B = {один из вопросов билета неподготовлен}, C = {два вопроса билета неподготовлены},

D = {три вопроса билета неподготовлены}.

Интересующее нас событие A можно представить в виде суммы событий: $A = B + C + D$. По теореме сложения $P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$. Найдем вероятности событий B, C и D (подобно решению примера 2, разобранного в теме 1):

$$P(B) = \frac{C_5^1 C_{15}^2}{C_{20}^3} = \frac{35}{76}, \quad P(C) = \frac{C_5^2 C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{5}{38}, \quad P(D) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{1}{114}.$$

Подставляя эти вероятности в выражение $P(A)$, окончательно получим $P(A) = 137/228$.

Второй способ. Событие A = {хотя бы один из вопросов билета оказался неподготовленным} и $\bar{A}$ = {все вопросы билета подготовлены} – противоположные, поэтому $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Отсюда $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Вероятность появления события $\bar{A}$

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = \frac{91}{228}.$$

Искомая вероятность $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 137/228$.

Пример 2. Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,7 и для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что произойдут два попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.

Решение. Введем обозначения событий: искомое событие A = {два попадания в цель}; B_i = { i-й стрелок попал}. Интересующее нас событие A состоит из трех несовместных слагаемых

$$A = \bar{B}_1 B_2 B_3 + \bar{B}_2 B_1 B_3 + \bar{B}_3 B_1 B_2,$$

в каждом из которых один стрелок промахнулся. По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(\bar{B}_1 B_2 B_3) + P(\bar{B}_2 B_1 B_3) + P(\bar{B}_3 B_1 B_2).$$

По теореме умножения вероятностей

$$P(A) = P(\bar{B}_1)P(B_2)P(B_3) + P(\bar{B}_2)P(B_1)P(B_3) + P(\bar{B}_3)P(B_1)P(B_2).$$

Вероятности событий B_i соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Тогда вероятности противоположных событий равны 0,4; 0,3; 0,2. Искомая вероятность

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}452.$$

Пример 3. В группе из 25 студентов 18 человек изучают английский язык, 12 – немецкий язык, а 10 человек изучают оба иностранных языка. Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент изучает только один иностранный язык?

Решение. Пусть событие A = {студент изучает английский язык}, A_1 = = {студент изучает только английский язык}, B = {студент изучает немецкий язык}, B_1 = {студент изучает только немецкий язык}. Тогда событие AB = = {студент изучает оба языка}. Изобразим эти события в геометрической форме на рисунке 1.

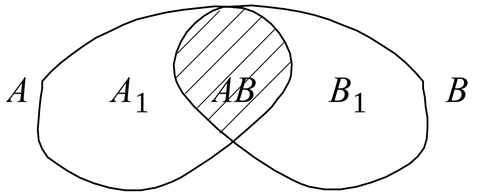

Рисунок 1 – Случайные события в геометрической форме

Следует отметить, что события A и B зависимы. Поэтому неприменим метод решения из предыдущего примера, в котором используется теорема умножения вероятностей. Рассмотрим другой метод.

Событие C = {студент изучает только один язык} изображено незаштрихованной частью фигур A, B и выражается в виде суммы двух несовместных событий $C = A_1 + B_1$. По теореме сложения вероятностей

$$P(C) = P(A_1) + P(B_1).$$

Вероятность события A_1 определяется из условия $A = A_1 + AB$ с помощью вышеупомянутой теоремы

$$P(A_1) = P(A) - P(AB).$$

Аналогично определяется вероятность события B_1

$$P(B_1) = P(B) - P(AB).$$

Искомая вероятность вычисляется по формуле

$$P(C) = P(A) + P(B) - 2\,P(AB).$$

По классической формуле вероятности $P(A) = 18/25$; $P(B) = 12/25$; $P(AB) =$ $= 10/25$. Таким образом, $P(C) = 18/25 + 12/25 - 20/25 = 2/5$.

Пример 3. Имеются два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго – 0,9. Какова вероятность того, что деталь из наудачу взятого набора – стандартная?

Решение. Обозначим рассматриваемое событие через A = {извлеченная деталь стандартна}. Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие B_1), либо из второго (событие B_2). Вероятности этих событий $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}5$. Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P(A \mid B_1) = 0{,}8$, а условная вероятность того, что из второго набора будет извлечена стандартная деталь, $P(A \mid B_2) = 0{,}9$. Искомая вероятность вычисляется по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)\,P(\underline{A} \mid B_1) + P(B_2)\,P(A \mid B_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

<u>Пример 4.</u> В магазине предлагаются телевизоры двух марок: 30 % телевизоров марки «SONY» и 70 % телевизоров марки «ВИТЯЗЬ». Вероятность того, что телевизор этой марки выдержит гарантийный срок, соответственно равна 0,9 и 0,4. Наудачу купленный телевизор выдержал гарантийный срок. Что вероятнее: куплен телевизор марки «SONY» или «ВИТЯЗЬ» ?

<u>Решение.</u> Обозначим событие A = {телевизор выдержал гарантийный срок}. Можно сделать два предположения: купленный телевизор может быть марки «SONY» (событие B_1) либо марки «ВИТЯЗЬ» (событие B_2). Вероятности этих событий $P(B_1) = 0{,}3$ и $P(B_2) = 0{,}7$. Условная вероятность того, что телевизор марки «SONY» выдержит гарантийный срок, $P(A \mid B_1) = 0{,}9$, а условная вероятность того, что телевизор марки «ВИТЯЗЬ» выдержит гарантийный срок, $P(A \mid B_2) = 0{,}4$. Вероятности того, что выдержавший гарантийный срок телевизор марки «SONY» или марки «ВИТЯЗЬ», вычисляются по формулам Байеса:

$$P(B_1 \mid \mathrm{A}) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(B_1)P(A \mid B_1) + \mathrm{P(B_2)}P(A \mid B_2)} = \frac{0{,}27}{0{,}55},$$

$$P(B_2 \mid \mathrm{A}) = \frac{P(B_2)P(A \mid B_2)}{P(B_1)P(A \mid B_1) + \mathrm{P(B_2)}P(A \mid B_2)} = \frac{0{,}28}{0{,}55}.$$

Таким образом, вероятнее всего куплен телевизор марки «ВИТЯЗЬ».

Задания для самостоятельного решения

1. В студенческой группе 25 человек, среди которых 5 отличников и 10 учатся на 4 и 5. По списку наудачу отобраны 3 студента. Какова вероятность того, что хотя бы один из отобранных студентов отличник или учится на 4 и 5? (109/115).

2. Три электрические лампочки последовательно включены в сеть. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, равна 0,6. Какова

вероятность того, что тока в цепи не будет? (0,936).

3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Какова вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков? (0,38).

4. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Какова вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта? (0,384).

5. Вероятность того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Какова вероятность того, что деталь содержится:

а) не более чем в трех ящиках. (0,6976) ;

б) не менее чем в двух ящиках? (0,9572).

6. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,5. Какова вероятность того, что первое орудие поражает цель при одном выстреле, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,6? (0,5).

7. В группе из 28 студентов 15 лыжников, 18 бегунов, а 6 – занимаются обоими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент занимается только одним видом спорта? (3/4).

8. В ноябре в течение 15 дней шел дождь, в течение 7 дней шел снег, 2 дня шел дождь со снегом, а в остальные дни не было осадков. Какова вероятность того, что наудачу выбранный ноябрьский день оказался:

а) без осадков. (1/3) ;

б) только дождливым или только снежным? (3/5).

9. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,3, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится шесть очков? ($n \geq 7$).

10. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз? ($n \geq 2$).

11. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Какова вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму? (0,86).

12. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,8, а завода № 2 – 0,9. Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Какова вероятность того, что извлечена стандартная деталь? (0,84).

13. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Какова вероятность того, что вторую извлеченную кость можно приставить к первой? (7/18).

14. для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы 4, из второй – 6, из третьей группы – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадет в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. к какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент? (ко второй).

15. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предлагается упрощенная система проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту, – с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно удовлетворяет стандарту? (0,998).

Практическая работа 4. Дискретные случайные величины и их распределения

- Цель: привить навыки использования различных законов распределения дискретных случайных величин и научиться вычислять числовые характеристики дискретной случайной величины и вероятность ее попадания в заданный интервал.

Вопросы для теоретической подготовки

1. Что называется, дискретной случайной величиной (ДСВ) и ее рядом распределения?
2. Что называется, биномиальным законом распределения и в каком случае он используется?
3. Как определяется закон распределения Пуассона? Наивероятнейшее число появлений события.
4. Что называется, потоком случайных событий? Какой поток называется простейшим и какими свойствами обладает?
5. Что называется, геометрическим и гипергеометрическим распределением, и в каком случае они используются?
6. Математическое ожидание ДСВ, его вероятностный и механический смысл.
7. Свойства математического ожидания. Математическое ожидание биномиального и пуассоновского распределения.
8. Дисперсия, ее вероятностный и механический смысл.
9. Свойства дисперсии. Дисперсия биномиального и пуассоновского распределения.
10. Среднее квадратическое отклонение и его свойства.
11. Числовые характеристики геометрического распределения.
12. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Демонстрационные примеры

<u>Пример 1.</u> Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются) ?

<u>Решение.</u> Играют равносильные шахматисты, поэтому вероятность

выигрыша p = 0,5; следовательно, вероятность проигрыша такая же q = 0,5. Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и не зависит от результата предыдущих партий, то применима формула Бернулли. Вероятность того, что будут выиграны две партии из четырех,

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}(0{,}5)^2(0{,}5)^2 = \frac{6}{16},$$

а вероятность того, что будут выиграны три партии из шести,

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}(0{,}5)^3(0{,}5)^3 = \frac{5}{16}.$$

Так как $P_4(2) > P_6(3)$, то вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три партии из шести.

Пример 2. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

Решение. По условию, p = 0,01, n = 200, $\lambda = np = 2$, k = 4. Воспользуемся формулой Пуассона

$$P(k) = (\lambda)^k \cdot e^{-\lambda}/k! = 2^4 \cdot e^{-2}/4! = 16 \cdot e^{-2}/24 = 0{,}09.$$

Пример 3. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 5 минут поступит:
а) 2 вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.

Решение. По условию, λ = 2, t = 5, k = 2. Воспользуемся формулой Пуассона для потока событий интенсивности λ: вероятность поступления k заявок за время t

$$P_t(k) = (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}/k!\ .$$

Искомая вероятность, что за 5 минут поступят 2 вызова,

$$P_5(2) = (10)^2 \cdot e^{-10}/2! = 0{,}00227.$$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P_5(k < 2) = P_5(0) + P_5(1) = e^{-10} + 10 \cdot e^{-10}/1! = 0{,}000495.$$

События «поступило менее двух вызовов» и «поступило не менее двух вызовов» противоположны. Поэтому искомая вероятность

$$P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k < 2) = 0{,}999505.$$

Пример 4. Каждый из 15 банков проходит аудиторскую проверку. Вероятность того, что банк выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число банков, которые выдержат испытание.

Решение. По условию, n = 15, p = 0,9, q = 0,1. Найдем наивероятнейшее число k_0 из двойного неравенства

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

Подставив данные примера, получим

$$15 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \leq k_0 \leq 15 \cdot 0{,}9 + 0.9 \quad \text{или} \quad 13{,}4 \leq k_0 \leq 14{,}4.$$

Так как k_0 - целое, то искомое наивероятнейшее число k_0 = 14.

Пример 5. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: $x_2 > x_1$. Вероятность того, что X примет значение x_1 , равна 0,6. Найти закон распределения величины X, если математическое ожидание и дисперсия известны: $M(X)$ = 1,4 ; $D(X)$ = 0,24.

Решение. Сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины равна единице, поэтому вероятность того, что X примет значение x_2, равна 0,4. Для отыскания неизвестных x_1 и x_2 надо составить два уравнения, связывающие эти числа. С этой целью выразим известные математическое ожидание и дисперсию через x_1 и x_2. Математическое ожидание $M(X) = 0{,}6\,x_1 + 0{,}4\,x_2$. По условию, $M(X)$ = 1,4, следовательно,

$$0{,}6\,x_1 + 0{,}4\,x_2 = 1{,}4.$$

Одно уравнение, связывающее x_1 и x_2 , получено. Для того, чтобы получить второе уравнение, выразим известную дисперсию через x_1 и x_2. Найдем $M(X^2) = 0{,}6(x_1)^2 + 0{,}4(x_2)^2$. Найдем дисперсию $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = = 0{,}6(x_1)^2 + 0{,}4(x_2)^2 - (1{,}4)^2$. Подставляя $D(X)$ = 0,24, после элементарных преобразований получим

$$0{,}6\,(x_1)^2 + 0{,}4\,(x_2)^2 = 2{,}2.$$

Решив систему двух полученных уравнений, найдем два решения:

$$x_1 = 1\,;\ x_2 = 2 \quad \text{и} \quad x_1 = 1{,}8\,;\ x_2 = 0{,}8\,.$$

По условию $x_2 > x_1$, поэтому задаче удовлетворяет только первое решение: x_1 = 1 ; x_2 = 2 . Получается следующий закон распределения:

X	1	2
p	0,6	0,4

Пример 6. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите закон распределения вероятностей случайного числа попаданий в мишень при пяти выстрелах, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этого распределения.

Решение. По условию, случайная величина имеет биномиальный закон распределения с параметрами n = 5; p = 0,6; q = 0,4:

$$P_5(\kappa) = C_5^{\kappa}\,(0{,}6)^{\kappa}\,(0{,}4)^{5-\kappa}\ ,\ \ \kappa = 0, \ldots, 5.$$

Получается следующий закон распределения:

κ	0	1	2	3	4	5
$P_5(\kappa)$	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0777

Математическое ожидание биномиального распределения вычисляется по формуле $M(X) = np = 5\cdot 0{,}6 = 3$. Дисперсия биномиального распределения вычисляется по формуле $D(X) = npq = 5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 = 1{,}2$. Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1{,}2} = 1{,}095$.

Пример 7. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что при 2400 выстрелах мишень будет поражена ровно 1400 раз?

Решение. По условию, $n = 2400$; $k = 1400$; $p = 0{,}6$; $q = 0{,}4$. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Найдем значение $x = (1400 - 2400\cdot 0{,}6)/24 = -1{,}67$. Функция $\varphi(x)$ – четная, поэтому $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67)$. По таблице *приложения А* найдем $\varphi(1{,}67) =$ $= 0{,}0989$. Искомая вероятность

$$P_{2400}(1400) = 1/24\cdot 0{,}0989 = 0{,}0041.$$

Пример 8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена:

а) не менее 75 раз и не более 90 раз;

б) не менее 75 раз;

в) не более 74 раз?

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа , а $\quad x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$

а) По условию, $n = 100$; $k_1 = 75$; $k_2 = 90$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$. Вычислим сначала $x' = -1{,}25$; $x'' = 2{,}5$. Учитывая, что функция Лапласа нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим $P_{100}(75\ ,\ 90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25)$. По таблице *приложения Б* найдем: $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$; $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$. Искомая вероятность $P_{100}(75\ ,\ 90) = = 0{,}8882$.

б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75 либо 76, … , либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять $k_1 = 75$; $k_2 = 100$. Тогда $x' = -1{,}25$; $x'' = 5$. По таблице приложения 2 найдем: $\Phi(5) = 0{,}5$; $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$. Искомая вероятность $P_{100}(75\,,\,100) = 0{,}8944$.

в) События – «мишень будет поражена не менее 75 раз» и «мишень будет поражена не более 74 раз» противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность $P_{100}(0,\,74) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$.

Задания для самостоятельного решения

1. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Какова вероятность того, что в данный момент:

а) включено 4 мотора. (0,246);

б) включены все моторы. (0,26);

в) выключены все моторы? (0,000064).

2. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найти вероятность нормальной работы автобазы, если для этого необходимо иметь на линии 8 автомашин. (0,9274).

3. Какова вероятность того, что объект будет поражен при пяти независимых выстрелах, если для этого необходимо не менее двух попаданий? Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3. (0,472).

4. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг. (0,0375).

5. Среднее число покупателей, прибывающих в супермаркет за 1 мин, равно 5. Какова вероятность того, что за 2 мин прибудет:

а) ровно два покупателя. (0,00227);

б) менее двух покупателей. (0,000495);

в) не менее двух покупателей? (0,999505).

6. Вероятность попадания стрелком в цель равна 0,7. Сделано 25 выстрелов. Определить наивероятнейшее число попаданий в цель. (18).

7. В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 октября в данном городе равна 1/7. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 октября в данном городе за 40

лет. (5).

8. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже. (14 и 15).

9. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p = 0,6. Какова вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле? (0,096).

10. Среди 50 изделий 20 импортных. Какова вероятность того, что среди наудачу извлеченных 5 изделий ровно 3 импортных? (0,234).

11. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: $x_2 > x_1$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,1. Найти закон распределения величины X, если математическое ожидание и дисперсия известны: M(X) = 3,9; D(X) = 0,09. (3; 4).

12. Найти вероятность того, что из 400 банков сохранится только 80, если вероятность выживаемости каждого банка равна 0,2. (0,0498).

13. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдет 130, если вероятность всхожести семян 0,75. (0,036).

14. Найти вероятность того, что из 400 банков сохранится от 70 до 100 банков, если вероятность выживаемости каждого банка равна 0,2. (0,8882).

15. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена:

а) не менее 70 и не более 80 раз. (0,7498);

б) не более 70 раз. (0,1251).

Практическая работа 5. Непрерывные случайные величины

➢ Цель: научиться вычислять числовые характеристики непрерывной случайной величины и использовать их свойства.

Вопросы для теоретической подготовки

1. Чем отличается непрерывная случайная величина (НСВ) от дискретной? Что называется функцией распределения НСВ?

2. Свойства функции и плотности распределения НСВ.

3. Формулы вычисления математического ожидания и дисперсии НСВ.

4. Нормальный закон распределения, его параметры и вероятностный смысл.

5. Центральная предельная теорема Ляпунова.

6. Нормальная кривая и ее свойства.

7. Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал. Функция Лапласа и ее свойства. Вероятность заданного отклонения. Правило трех сигм.

8. Начальный и центральный момент ***к***-го порядка.

9. Асимметрия и эксцесс, медиана и мода случайной величины.

Демонстрационные примеры

Пример 1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0, \\ x \quad \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале (0,5; 2).

Решение. Найдем плотность распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ 1 & \text{при} \quad 0<x<1, \\ 0 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание $M(X)=\int_0^1 x\cdot 1\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$

Найдем дисперсию $D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$

Вычислим вероятность P(0,5 < X < 2) = F(2) – F(0,5) = 1 – 0,5 = 0,5.

Пример 2. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами m, σ. Найти вероятность попадания этой случайной величины в заданный интервал (α, β), если m = 30 ; σ = 10 ; α = 10; β = 50. Изобразить на графике функции плотности найденную вероятность.

Решение. Искомая вероятность вычисляется по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right),$$

где Ф(x) – функция Лапласа. Для заданных значений параметров

$$P(10<X<50)=\Phi\left(\frac{50-30}{10}\right)-\Phi\left(\frac{10-30}{10}\right)=2\Phi(2).$$

По таблице приложения Б находим Ф(2) = 0,4772. Отсюда искомая вероятность P(10 < X < 50) = 2·0,4772 = 0,9544.

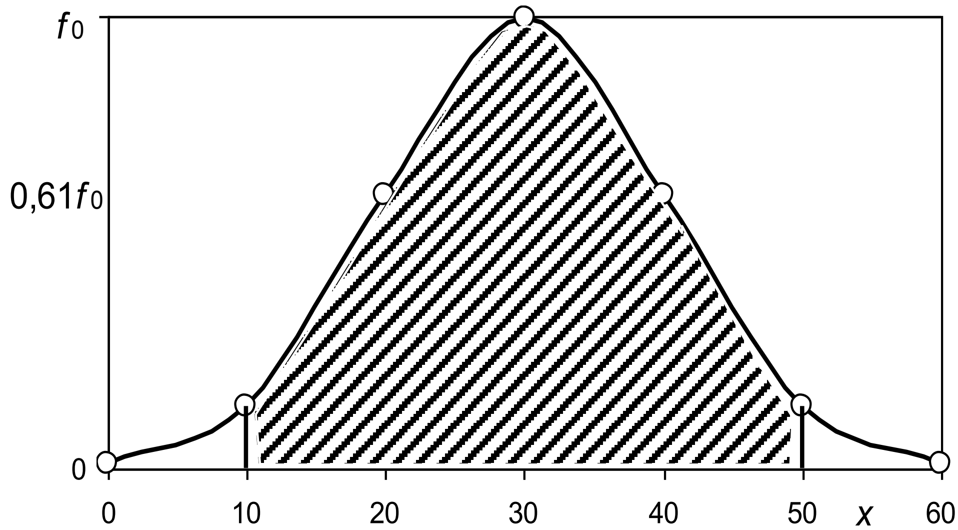

Рисунок 2 – Нормальная кривая с параметрами (30; 10)

На рисунке 2 площадь заштрихованной фигуры равна найденной вероятности.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x\le 0, \\ \dfrac{1-\cos x}{2} \quad \text{при} \quad 0<x\le \pi, \\ 1 \quad \text{при} \quad x>\pi. \end{cases}$$

2. Вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале (–0,5; π/2). (π/2; (π2 – 8)/4; 0,5).

3. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами m, σ. Найти вероятность попадания этой случайной величины в заданный интервал (α, β), если m = 20 ; σ = 5 ; α = 15; β = 25. (0,6826).

4. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали:

а) больше 55 мм. (0,0823);

б) меньше 40 мм. (0,0027).

5. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ = 20 мм и математическим ожиданием m = 0. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм. (0,41).

6. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением σ = 0,4 мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных. (92).

Раздел 2. Математическая статистика

Практическая работа 6. Основы математической статистики

- Цель: научиться собирать статистические данные для оценки числовых характеристик случайной величины.

Вопросы для теоретической подготовки

1. Что называется, простой выборкой из генеральной совокупности? Постановка задачи статистического оценивания. Какая оценка называется несмещенной, эффективной, состоятельной?
2. Как проводится группировка значений и строится статистическое распределение выборки, полигон и гистограмма частот?

Демонстрационные примеры

Пример 1. Сгруппировать выборку объема n = 100 значений случайной величины X, изображенных на рисунке 3 точками числовой оси Ox.

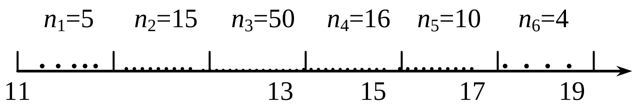

Рисунок 3 – Группировка выборочных данных

Решение. Для разбивки выборки на k частей найдем число k из неравенств $ln(n) < k < \sqrt{n}$. В нашем случае $5 \le k \le 10$. Пусть, например, $X_{\max}$ = 22,8 и $X_{\min}$= = 11,4. Выбираем длину каждого интервала целым числом, например, h = 2; тогда k = 6. Количество точек в i-м интервале обозначим n_i. Если точка попала на границу между интервалами, то ее относим к интервалу с большим количеством точек. Частоту n_i присвоим точке, расположенной в середине i-го интервала. Координата этой точки называется вариантой x_i . Полученные данные заносим в таблицу 1, которая называется статистическим распределением выборки.

Таблица 1

Статистическое распределение выборки

Номер i	1	2	3	4	5	6
Варианта x_i	12	14	16	18	20	22
Частота n_i	5	15	50	16	10	4

Пример 2. Построить гистограмму и полигон частот согласно статистическому распределению выборки из примера 1.

Решение. Построим гистограмму частот с помощью рисунка 3. На горизонтальной оси откладываются точки разбиения значений выборки, а на вертикальной оси – частоты соответствующих вариант, деленные на шаг разбиения h. Сумма площадей всех прямоугольников на гистограмме равна объему выборки. Аналогично рисунку 4 строится гистограмма относительных частот. В этой гистограмме на вертикальной оси откладываются частоты соответствующих вариант, деленные на шаг разбиения и на объем выборки. Поэтому сумма площадей всех прямоугольников на гистограмме относительных частот равна единице. Формы этих гистограмм одинаковы.

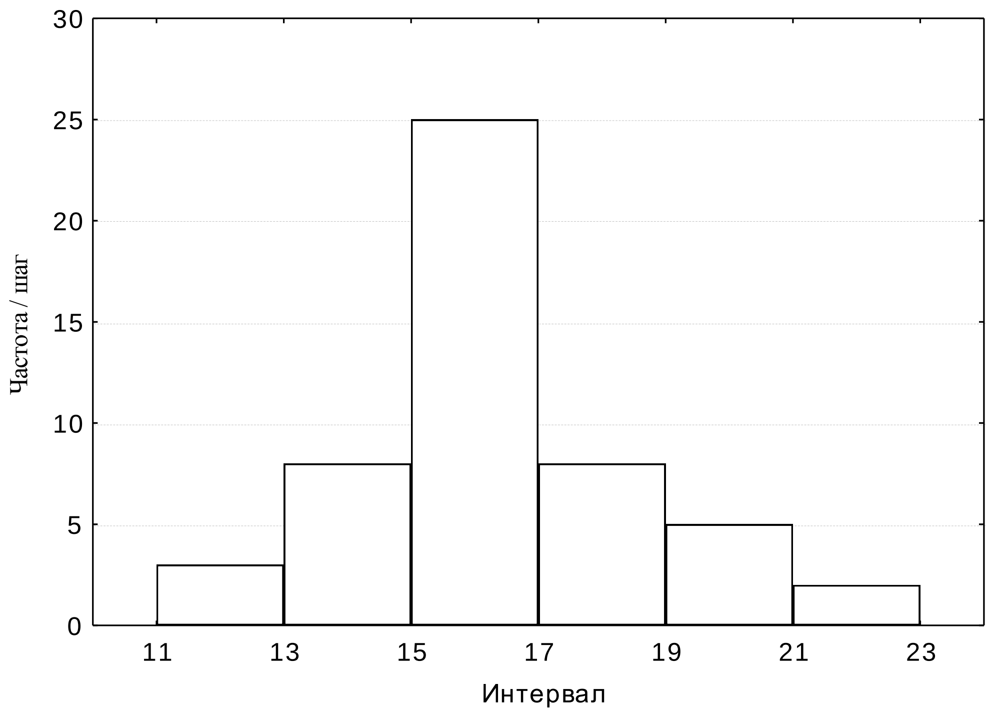

Рисунок 4 – Гистограмма частот

Построим полигон частот (рисунок 5) с помощью таблицы 1.

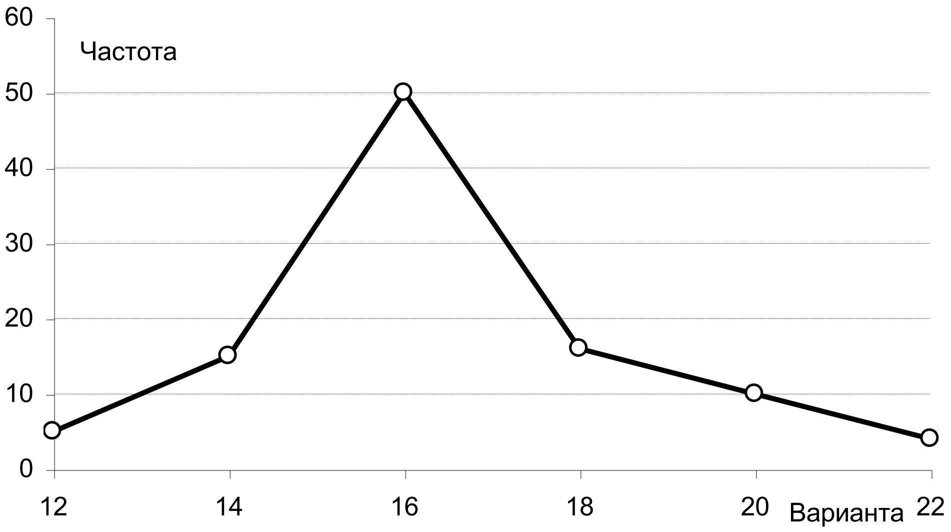

Рисунок 5 – Полигон частот

Задания для самостоятельного решения

1. Дана выборка: 2,4,7,3,1,1,3,2,7,3. Построить статистическое распределение выборки, полигон и гистограмму частот.

2. Дана выборка значений случайной величины X объема 20:

12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12
18, 17, 15, 13, 17, 14, 14, 13, 14, 16

Построить статистическое распределение выборки, полигон и гистограмму частот.

3. Даны результаты измерений отклонений от нормы диаметров 50 подшипников:

-1,760	-0,291	-0,110	-0,450	0,512
-0,158	1,701	0,634	0,720	0,490
1,531	-0,433	1,409	1,740	-0,266
-0,058	0,248	-0,095	-1,488	-0,361
0,415	-1,382	0,129	-0,361	-0,087
-0,329	0,086	0,130	-0,244	-0,882
0,318	-1,087	0,899	1,028	-1,304
0,349	-0,293	0,105	-0,056	0,757
-0,059	-0,539	-0,078	0,229	0,194
0,123	0,318	0,367	-0,992	0,529

Для данной выборки построить статистическое распределение выборки, полигон и гистограмму частот

Практическая работа 7. Числовые характеристики выборки

- Цель: научиться использовать статистические данные для оценки числовых характеристик случайной величины.

Вопросы для теоретической подготовки

1. Метод произведений расчета начальных и центральных моментов ***k***-го порядка.

2. Статистические оценки: выборочная средняя, выборочная исправленная дисперсия, выборочная асимметрия и эксцесс, их свойства и отыскание с помощью ложного нуля.

3. Интервальная оценка для математического ожидания нормальной случайной величины. Точность и достоверность оценки в случае известной и неизвестной дисперсии.

Демонстрационные примеры

<u>Пример 1.</u> Методом произведений найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, асимметрию и эксцесс по данным выборки из таблицы 1.

<u>Решение.</u> Составим расчетную таблицу 2. Для этого:

1) дополним таблицу 1 еще пятью строчками;

2) в качестве ложного нуля C выберем варианту (16), которая имеет наибольшую частоту (в качестве ложного нуля C можно взять любую варианту, расположенную примерно в середине строки); в клетке четвертой строки, которая принадлежит столбцу, содержащему ложный нуль, пишем 0; слева от нуля последовательно записываем –1, –2, а справа от нуля 1, 2, 3;

3) произведения частот n_i на условные варианты u_i запишем в пятой строке; отдельно находим сумму (–25) отрицательных чисел и отдельно сумму (48) положительных чисел; сложив эти числа, их сумму (23) помещаем в последнюю клетку строки;

4) произведения частот на квадраты условных вариант, то есть $n_iu_i^2$ запишем в шестой строке (удобнее перемножить числа каждого столбца четвертой и пятой строк: $u_i \cdot n_iu_i = n_iu_i^2$); сумму чисел строки (127) помещаем в

последнюю клетку строки и так далее.

В итоге получим расчетную таблицу 2.

Таблица 2

Расчетная таблица

Номер i	1	2	3	4	5	6	
Варианта x_i	12	14	16	18	20	22	
Частота n_i	5	15	50	16	10	4	n = 100
Условная u_i	–2	–1	0	1	2	3	
n_iu_i	–10	–15	0	16	20	12	Σn_iu_i = 23
$n_iu_i^2$	20	15	0	16	40	36	$\Sigma n_iu_i^2$ = 127
$n_iu_i^3$	–40	–15	0	16	80	108	$\Sigma n_iu_i^3$ = 149
$n_iu_i^4$	80	15	0	16	160	324	$\Sigma n_iu_i^4$ = 595

Вычислим условные начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков:

$\overline{u} = (\Sigma n_i u_i)/n = 23/100 = 0{,}23;$ $\overline{u^2} = (\Sigma n_i u_i^2)/n = 127/100 = 1{,}27;$

$\overline{u^3} = (\Sigma n_i u_i^3)/n = 149/100 = 1{,}49;$ $\overline{u^4} = (\Sigma n_i u_i^4)/n = 595/100 = 5{,}95;$

$\mu_2 = \overline{u^2} - \left(\overline{u}\right)^2 = 1{,}217;$ $\mu_3 = \overline{u^3} - 3\overline{u^2}\,\overline{u} + 2\left(\overline{u}\right)^3 = 0{,}638;$

$\mu_4 = \overline{u^4} - 4\overline{u^3}\,\overline{u} + 6\overline{u^2}\left(\overline{u}\right)^2 - 3\left(\overline{u}\right)^4 = 4{,}974.$

Вычислим искомые выборочные величины, учитывая, что $h = 2$, а ложный нуль (варианта, которая имеет наибольшую частоту) $C = 16$

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot h + C = 0{,}23 \cdot 2 + 16 = 16{,}46; \quad D_x = \mu_2 h^2 = 4{,}87;$$

$$A_s = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} = 0{,}475; \quad E_k = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3 = 0{,}358.$$

Пример 4. По данным выборки из таблицы 1 найти доверительный интервал с надежностью 0,95 для математического ожидания m нормально распределенной случайной величины X.

Решение. Выборочные среднюю и дисперсию используем из примера 2. Исправленное среднее квадратическое отклонение найдем по формуле

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_x} = \sqrt{\frac{100}{99} 4{,}87} = 2{,}218.$$

Значение t_γ найдем с помощью таблицы приложения 4 и значений γ =

0,95 и n = 100: t_γ = 1,984. Найдем доверительный интервал

$$\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}.$$

Подставляя $\bar{x} = 16{,}46;\ t_\gamma = 1{,}984;\ s = 2{,}218;\ n = 100$, получим искомый доверительный интервал 16,02 < m < 16,90.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить числовые характеристики для статистического ряда:

x_i	1	2	3	4	7
n_i	2	2	3	1	2

2. Вычислить числовые характеристики для статистического ряда:

x_i	12	13	14	15	16	17	18	19
n_i	2	3	5	2	2	3	2	1

3. Вычислить числовые характеристики для статистического ряда:

Интервалы	$[-2{,}06;-1{,}46)$	$[-1{,}46;-0{,}86)$	$[-0{,}86;-0{,}26)$	$[-0{,}26;\ 0{,}34)$
Частоты n_i	2	6	11	15
Интервалы	$[0{,}34;\ 0{,}94)$	$[0{,}94;1{,}54)$	$[1{,}54;\ 2{,}14)$	
Частоты n_i	11	3	2	

Практическая работа 8. Проверка статистических гипотез

- Цель: познакомиться с типами статистических гипотез и критериями их проверки.

Вопросы для теоретической подготовки

1. Основная и альтернативная гипотеза. Статистический критерий и его критическая область. Виды критических областей.
2. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень значимости и мощность критерия.
3. Критерий согласия Пирсона проверки гипотезы о нормальном законе распределения генеральной совокупности.
4. Критерий Фишера-Снедекора проверки гипотезы о совпадении двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей. Условия применения критерия.
5. Критерий Стьюдента проверки гипотезы о совпадении двух математических ожиданий нормальных генеральных совокупностей в случае известных и неизвестных, но равных дисперсий.
6. Критерий согласия Пирсона проверки гипотезы о независимости двух признаков с помощью таблицы сопряженности признаков.
7. Критерий Стьюдента проверки гипотезы об отсутствии корреляционной зависимости между двумя нормальными генеральными совокупностями.

Демонстрационные примеры

Пример 1. Используя критерий согласия Пирсона χ^2 при уровне значимости 0,05, проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении случайной величины с заданным распределением выборки

Номер i	1	2	3	4	5	6
Варианта x_i	12	14	16	18	20	22
Частота n_i	5	15	50	16	10	4

Решение. Используя метод произведений, найдем выборочные среднюю $\bar{x} = 16{,}46$ (см. пример 1, практическая работа 7) и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 2{,}218$. Вычислим теоретические частоты, учитывая, что n=100, h=2, s=2,218, по формуле $n_i' = \frac{nh}{s}\varphi(u_i) = \frac{100 \cdot 2}{2{,}218}\varphi(u_i) = 90{,}17 \cdot \varphi(u_i), \quad u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$.

Составим расчетную таблицу 3 значений эмпирических n_i и теоретических n_i' частот.

Таблица 3

Расчетная таблица

Номер i	1	2	3	4	5	6	Σ
Варианта x_i	12	14	16	18	20	22	
Частота n_i	5	15	50	16	10	4	100
u_i	–2,01	–1,11	–0,21	0,694	1,596	2,498	
$\varphi(u_i)$	0,053	0,215	0,39	0,313	0,098	0,018	
n_i'	4,78	19,39	35,17	28,22	8,84	1,62	
$n_i - n_i'$	0,22	–4,39	14,83	–12,2	1,16	2,38	
$(n_i - n_i')^2$	0,048	19,27	220	149	1,35	5,66	
$(n_i - n_i')^2/n_i'$	0,01	0,99	6,26	5,28	0,15	3,49	16,18

Из таблицы 3 находим наблюдаемое значение критерия согласия Пирсона $\chi^2_{набл} = \Sigma(n_i - n_i')^2 / n_i' = 16{,}18$, которое характеризует степень отличия теоретических и эмпирических частот. По таблице критических точек распределения χ^2, согласно уровню значимости α = 0,05 и числу степеней свободы k = 6 – 3 = 3 (6 – максимальный номер i) находим критическую точку $\chi^2_{кр}(0{,}05;3) = 7{,}8$. Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{\text{кр}}$, то теоретические и эмпирические частоты отличаются значимо на уровне α, а гипотеза о нормальном распределении случайной величины не согласуется с заданным распределением выборки.

Пример 2. В результате обработки двух независимых выборок, объемы которых соответственно равны n_x = 5 и n_y = 6, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей X и $У$, найдены выборочные исправленные дисперсии $s_x^2 = 0{,}25;\ s_y^2 = 0{,}108$. Используя критерий Фишера-Снедекора проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных совокупностей $\boldsymbol{H_0 : D(X) = D(У)}$ при конкурирующей гипотезе $\boldsymbol{H_1 : D(X) > D(У)}$ и уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Следует отметить, что в качестве совокупности $\boldsymbol{X}$ выбирается та, для которой исправленная дисперсия больше.

<u>Решение.</u> Используя критерий Фишера-Снедекора, вычислим наблюдаемое значение критерия по формуле $F_{набл} = s_x^2 / s_y^2 = 2{,}31$. По таблице критических точек распределения Фишера–Снедекора, согласно уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числам степеней свободы $k_1 = 5 - 1 = 4$, $k_2 = 6 - - 1 = 5$ находим критическую точку распределения $F_{кр} = 5{,}19$. Так как $F_{набл} < F_{кр}$, то выборочные исправленные дисперсии отличаются незначимо на уровне значимости α и нет оснований отвергнуть гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей.

<u>Пример 3.</u> Используя критерий Стьюдента проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий двух нормальных совокупностей с неизвестными, но равными дисперсиями $\boldsymbol{H_0 : M(X) = M(У)}$ при конкурирующей гипотезе $\boldsymbol{H_1 : M(X) \neq M(У)}$ и уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

В результате обработки двух независимых выборок, объемы которых соответственно равны $n_x = 5$ и $n_y = 6$, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей X и $У$, найдены выборочные средние и исправленные дисперсии $\overline{x} = 3{,}3;\ \ \overline{y} = 2{,}48;\ \ s_x^2 = 0{,}25;\ \ s_y^2 = 0{,}108.$

<u>Решение.</u> Используя критерий Стьюдента, вычислим наблюдаемое значение критерия по формуле

$$t_{набл} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}} .$$

Подставляя заданные значения в эту формулу получим $t_{набл} = 3{,}27$. Критическое значение определяется в случае двусторонней критической области, а число степеней свободы $k = n_x + n_y - 2$. По таблице критических точек распределения Стьюдента, согласно уровню значимости $\alpha = = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 5 + 6 - 2 = 9$ находим критическую точку $t_{кр} = 2{,}26$. Так как $t_{набл} > t_{кр}$, то выборочные средние отличаются значимо на уровне α , а гипотеза о равенстве математических ожиданий двух нормальных совокупностей не согласуется с заданными распределениями выборок.

<u>Пример 4.</u> Используя критерий согласия Пирсона χ^2 при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о независимости уровня успеваемости от фамилии студента с результатами успеваемости двух студентов разных курсов.

Таблица 4

Эмпирические частоты оценок

Фамилия	Оценки студентов				Всего
	5	4	3	2	
Иванов	30	10	10	0	50
Петров	24	32	3	1	60
Итого	54	42	13	1	110

Результаты успеваемости студентов приведены в таблице 4 сопряженности рассматриваемых признаков, где указаны частоты полученных оценок за период обучения.

Решение. Введем следующие обозначения: i – номер строки таблицы, который равен 1, 2; j – номер столбца, который равен 1, 2, 3, 4; N_{ij} – эмпирическая частота, расположенная на пересечении i -й строки и j -го столбца. Для оценивания доли количества оценок каждого студента используются отношения $N_{i}.$/N , где $N_{i}. = \sum_j N_{ij}$, $N = \sum_{ij} N_{ij}$ =110. Аналогично доли всех “пятерок”, “четверок” и так далее оцениваются отношениями $N._{j}$ /N , где $N._{j} = \sum_i N_{ij}$. Если уровни успеваемости студентов отличаются незначимо, то приведенные в таблице 4 частоты приближаются теоретическими частотами $N'_{ij} = \frac{N_i . N._j}{N}$. Составим таблицу 5 теоретических частот.

Таблица 5

Теоретические частоты оценок

Фамилия	Оценки студентов				Всего
	5	4	3	2	
Иванов	24,55	19,09	5,91	0,45	50
Петров	29,45	22,91	7,09	0,55	60
Итого	54	42	13	1	110

Наблюдаемое значение критерия с учетом теоретических частот

$\chi^2_{набл} = \sum_i \sum_j \left(N_{ij} - N'_{ij}\right)^2 \left(N'_{ij}\right)^{-1} =$ 16,18, которое характеризует степень отличия теоретических и эмпирических частот. По таблице критических точек распределения χ^2, согласно уровню значимости α = 0,05 и числу степеней свободы k = (4 – 1)(2 – 1) = 3 (4 – максимальный номер j, 2 – максимальный номер i) находим критическую точку $\chi^2_{кр}(0{,}05;3) = 7{,}8$. Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то теоретические и эмпирические частоты отличаются значимо на уровне α, а гипотеза о независимости уровней успеваемости студентов не согласуется с данными успеваемости.

Пример 5. В результате обработки двумерной выборки объема n = 100, извлеченной из нормальной генеральной совокупности ($X,У$), методом произведений найден выборочный коэффициент корреляции $r_в$ = 0,76.

Используя критерий Стьюдента, проверить гипотезу об отсутствии корреляционной зависимости между двумя нормальными генеральными совокупностями $\boldsymbol{H_0 : r_{xy} = 0}$ при конкурирующей гипотезе

$\boldsymbol{H_1 : r_{xy} \neq 0}$ и уровне значимости α = 0,05 .

Решение. Используя критерий Стьюдента, вычислим наблюдаемое значение критерия по формуле $t_{набл} = r_в\sqrt{n-2}\,/\sqrt{1-(r_в)^2}$ = 11,58. Критическое значение определяется в случае двусторонней критической области, а число степеней свободы $k = n-2$. По таблице критических точек распределения Стьюдента , согласно уровню значимости α = 0,05 и числу степеней свободы k = 100 – 2 = 98 находим критическую точку $t_{кр}$ = 1,985. Так как $t_{набл} > t_{кр}$, то выборочный коэффициент корреляции отличаются от нуля значимо на уровне α, а гипотеза о об отсутствии корреляционной зависимости между двумя переменными $X,У$ не согласуется с данными выборки.

Задания для самостоятельного решения

1. В результате обработки выборки из генеральной совокупности получены следующие частоты вариант (таблица 6).

Таблица 6

Эмпирические и теоретические частоты

Эмпирические	6	13	38	74	106	85	30	14
Теоретические	3	14	42	82	99	76	37	13

При уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении случайной величины с заданным распределением выборки ($\chi^2_{набл}$ = 7,19 < $\chi^2_{кр}$(0,05; 5) = 11,1).

2. В результате обработки двух независимых выборок, объемы которых $n_x = n_y = 10$, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей X и $У$, найдены выборочные средние и исправленные дисперсии $\overline{x} = 17{,}4;\ \overline{y} = 15{,}1;\ s_x^2 = 7{,}25;\ s_y^2 = 6{,}45$. Используя критерий Стьюдента, проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий двух нормальных совокупностей с неизвестными, но равными дисперсиями $\boldsymbol{H_0}$**:** $\boldsymbol{M(X) = M(У)}$ при конкурирующей гипотезе $\boldsymbol{H_1}$**:** $\boldsymbol{M(X) \neq M(У)}$ и уровне значимости 0,05 ($t_{набл} = 1{,}97 < t_{кр}(0{,}05; 18) = 2{,}1$).

3. Анализ ранних произведений Эрнеста Хемингуэя показал, что предложения, включающие разное число слов, распределены в них следующим образом (таблица 7)

Таблица 7

Относительные частоты предложений

Число слов	2–3	4–5	6–8	9–12	13–16	17–20	21–24	25–28	> 28
Частота	0,01	0,034	0,067	0,091	0,21	0,174	0,181	0,143	0,09

Наследники автора заявили о находке рукописи ранее неопубликованного произведения своего предка. В выборке, состоящей из 2000 предложений, было обнаружено следующее распределение фраз по длине (таблица 8).

Таблица 8

Частоты предложений

Число слов	2–3	4–5	6–8	9–12	13–16	17–20	21–24	25–28	> 28
Частота	15	51	118	227	476	401	352	239	121

Могут ли эти данные подтвердить заявление наследников? ($\chi^2_{набл}$ = 61,4, что больше критического значения при любом α).

4. Используя критерий согласия Пирсона χ^2 при уровне значимости 0,05, проверить, согласуется ли гипотеза о независимости уровня успеваемости от фамилии студента с результатами успеваемости трех студентов разных курсов. Результаты успеваемости студентов приведены в таблице сопряженности рассматриваемых признаков, где указаны частоты полученных оценок за период обучения ($\chi^2_{набл}$ = 8,92 < $\chi^2_{кр}$(0,05; 6) = 12,53).

Таблица 9

Эмпирические частоты оценок

Фамилия	Оценки студентов				Всего
	5	4	3	2	
Иванов	30	10	10	0	50
Петров	30	20	10	0	60
Сидоров	18	17	4	1	40
Итого	78	47	24	1	150

5. Используя критерий Стьюдента для проверки гипотезы об отсутствии корреляционной зависимости между двумя нормальными генеральными совокупностями $\boldsymbol{H_0 : r_{xy} = 0}$ при конкурирующей гипотезе $\boldsymbol{H_1 : r_{xy} \neq 0}$ и уровне значимости α = 0,05, найти критическое значение выборочного коэффициента корреляции для выборки объема $\boldsymbol{n}$ = 100 (0,196).

Практическая работа 9. Линейные статистические модели

- Цель: научить устанавливать корреляционную зависимость между двумя нормальными случайными величинами.

Вопросы для теоретической подготовки

1. Какая зависимость называется корреляционной и чем она отличается от функциональной?
2. Компоненты двумерной случайной величины и их числовые характеристики: условные плотность и математическое ожидание.
3. Корреляционный момент и коэффициент корреляции, их вероятностный смысл и свойства.
4. Выборочное уравнение прямой линии регрессии и его числовые характеристики.

Демонстрационный пример

X	*У*	*X*	*У*	*X*	*У*	*X*	*У*	*X*	*У*
21,47	20	32	32	40	36	25	23,93	34	48,01
42	45,48	24,14	13	28,64	46,61	34,03	36,02	30	26,91
24,23	18	19,85	18,02	26	23,01	23,74	17,85	29,24	43,37
41	53,39	18,53	19,46	30,07	43,17	28,5	36,29	36,81	45,36
30	46,96	35	41,89	32,4	37,49	31,17	38	35,28	57,47
24	27,11	29,95	30	40	55,72	29,95	38,19	28	40
24,13	12	28,45	35	35,18	40,14	26	28,62	23,83	15,5
30	31,25	29	32,38	40	49,12	30,66	29	26	24,51
31	35,26	28	31,64	28	36,74	29	35	38	40
25	25,3	28	39	28,5	32,09	30,25	29	32	35,33
40	34,94	39	57,79	29,8	33,71	32	33	35,47	46
29,5	31,62	30,97	30	39	38	19,52	18,32	41	35
36,09	46	41	53	29	38	26,49	23,73	38,5	42,65
31,13	27,67	31	38,74	28,84	29	39,5	45	35,89	45
32,06	22,49	34,9	44,15	41	45,67	31	32	33,71	45,63
39	32,91	30	36	27,5	39,26	30,33	38,59	31	40
31,84	39	32,19	39,54	40,36	33,36	30,43	28,75	40,5	40,32
30	39,56	34,19	35,6	38	36,47	40	45	33,18	43,88
30,5	38,23	36,38	44,08	30,5	39,66	22,73	20,05	29	40
25	29,35	28,58	30,05	35,59	47,63	36,21	47,95	42	56

Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии *Y* на *X* согласно протоколу наблюдений двумерной выборки, приведенному в таблице.

<u>Решение</u>. Наблюдения двумерной выборки в виде 100 точек с координатами изображаются на координатной плоскости и заключаются в прямоугольник, который разбивается на прямоугольные клетки со сторонами h_x и h_y. На рисунке 6 выбрано k = 5 , а шаги $h_x = 5$, $h_y = 10$.

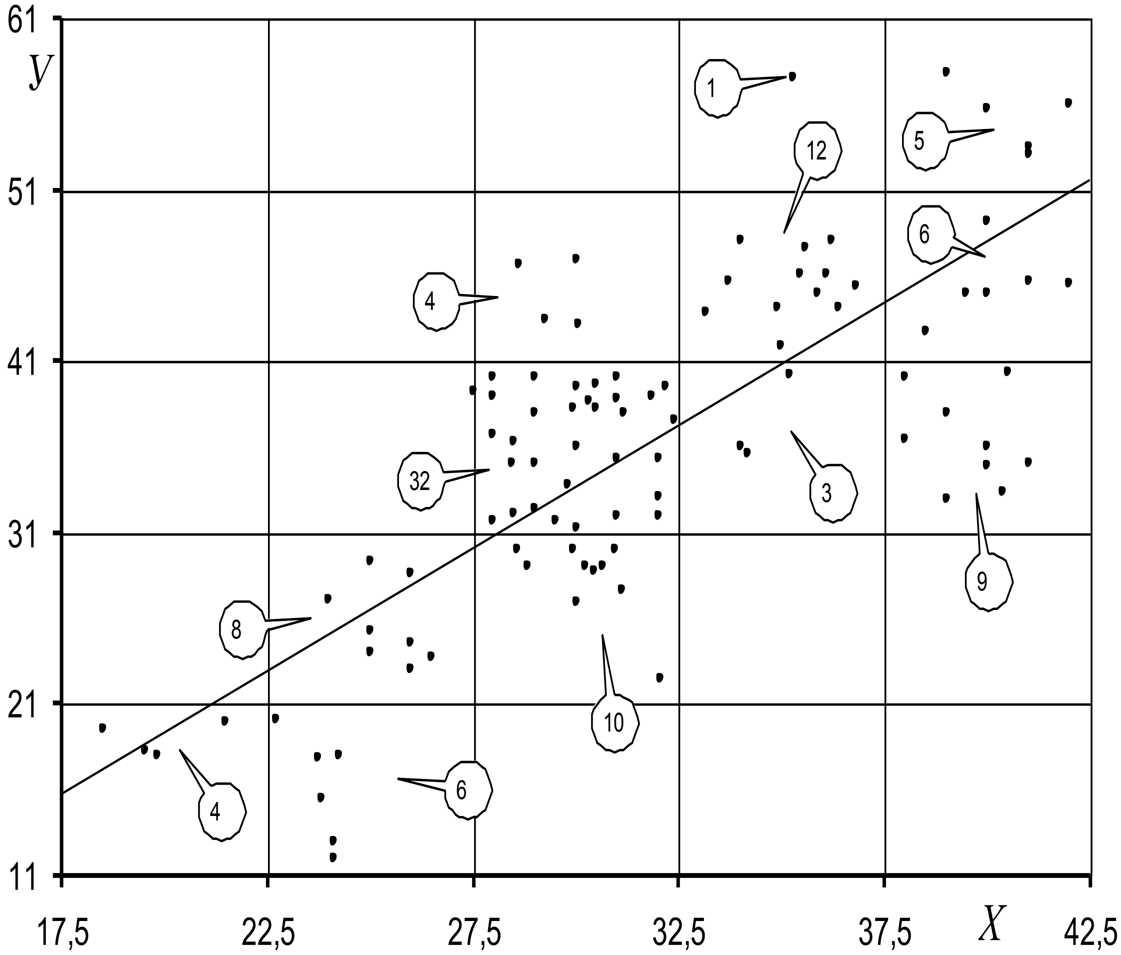

Рисунок 6 – Группировка наблюдений двумерной выборки

Количество точек, попавших в клетку, отмечено в выносках и рассматривается как частота nxy центра соответствующей клетки. Если точка расположена на границе, разделяющей две клетки, то она относится к той клетке, в которой находится больше точек. Найденные таким образом значения частот приведены в клетках корреляционной таблицы 4, обведенных двойной линией. Сверху и слева указаны соответствующие координаты центра клетки (варианты X, У), а снизу и справа – суммарные частоты вариант.

Таблица 10

Корреляционная таблица

У	*X*					n_y
	20	25	30	35	40	
16	4	6	-	-	-	10
26	-	8	10	-	-	18
36	-	-	32	3	9	44
46	-	-	4	12	6	22
56	-	-	-	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	n = 100

Для каждой случайной величины Х и У вводятся условные варианты *u* и *v*. Составим корреляционную таблицу 11 в условных вариантах

Таблица 11

Корреляционная таблица в условных вариантах

v	*u*					n_v	$U=\Sigma n_{uv}u$	*vU*
	–2	–1	0	1	2			
–2	–8 4	–6 6				10	–14	28
–1		–8 8	0 10			18	–8	8
0			0 32	3 3	18 9	44	21	0
1			0 4	12 12	12 6	22	24	24
2				1 1	10 5	6	11	22
n_u	4	14	46	16	20	100	ΣvU = 82	

Методом произведений найдем выборочные средние: сначала $\overline{u}=0{,}34$ и $\overline{u^2}=1{,}26$; затем $\overline{v}=-0{,}04$ и $\overline{v^2}=1{,}04$.

Выборочные средние квадратические отклонения условных вариант *u* и *v* найдем по формулам:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} = 1{,}07; \quad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2} = 1{,}02.$$

Затем проверяется гипотеза о нормальном распределении генеральных совокупностей X и У. Только после этого отыскивается выборочный коэффициент корреляции.

Выборочный коэффициент корреляции найдем по формуле

$$r_{\text{в}} = \frac{\Sigma n_{uv} uv - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u \sigma_v} = \frac{82 - 100 \cdot 0{,}34 \cdot (-0{,}04)}{100 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}02} = 0{,}76.$$

Поскольку значение $r_{\text{в}}$ > 0,196, то с уровнем значимости 0,05 можно утверждать о зависимости У от X. Если это условие не выполняется, то можно принять гипотезу об отсутствии корреляционной зависимости с отмеченным уровнем значимости.

Найдем выборочные средние $\overline{x}$ и $\overline{y}$, учитывая, что шаги h_x = 5, h_y = 10, а ложные нули C_x = 30; C_y = 36:

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot h_x + C_x = 0{,}34 \cdot 5 + 30 = 31{,}7; \quad \overline{y} = \overline{v} \cdot h_y + C_y = -0{,}04 \cdot 10 + 36 = 35{,}6.$$

Затем найдем выборочные средние квадратические отклонения:

$\sigma_x = h_x \sigma_u = 5 \cdot 1{,}07 = 5{,}35$; $\sigma_y = h_y \sigma_v = 10 \cdot 1{,}02 = 10{,}2$.

Подставим найденные величины в уравнение регрессии Y на X

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_{\text{в}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}). \quad \text{Получим} \quad \overline{y}_x - 35{,}6 = 0{,}76 \frac{10{,}2}{5{,}35}(x - 31{,}7)$$

или

окончательно $\overline{y}_x = 1{,}45x - 10{,}36.$ График полученной корреляционной зависимости приведен на рисунке 6. Этот график разбивает облако данных на две симметричные части и наилучшим образом приближает эти данные.

Задания для самостоятельного решения

1. В результате независимых испытаний получены пары значений случайных величин X и Y :

x_i	10	20	25	28	30
y_i	4	8	7	12	14

В таблице значения X расставлены в возрастающем порядке.

Найти выборочное уравнение линейной регрессии и выборочный коэффициент корреляции. Построить прямые регрессии.

2. В результате независимых испытаний получены пары значений случайных величин X и Y :

x_i	12	28	22	27	40
y_i	5	9	12	19	29

В таблице значения X расставлены в возрастающем порядке.

Найти выборочное уравнение линейной регрессии и выборочный коэффициент корреляции. Построить прямые регрессии

3. В результате независимых испытаний получены пары значений случайных величин X и Y :

x_i	10	20	30	40	50
y_i	2	8	12	15	17

В таблице значения X расставлены в возрастающем порядке.

Найти выборочное уравнение линейной регрессии и выборочный коэффициент корреляции. Построить прямые регрессии

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Горлач, Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: Учебник / Б.А. Горлач – Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2013. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/reader/book/4864/

Дополнительная литература

2. Емельянов, Г.В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике [Электронный ресурс]: Учебник / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович – Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2007. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/reader/book/141/
3. Кибзун, А.И. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]. Базовый курс с примерами и задачами / А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов – Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2005. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/reader/book/2198/
4. Хрущева, И.В. Теория вероятностей [Электронный ресурс]: Учебник / И.В. Хрущева – Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2009. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/reader/book/425/
5. Туганбаев, А.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: Учебник / А.А. Туганбаев, В.Г. Крупин – Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2011. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/reader/book/652/
6. Бородин, А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики [Электронный ресурс]: Учебник / А.Н. Бородин – Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2011. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/reader/book/2026/
7. Палий, И. А. Теория вероятностей [Электронный ресурс]: Учебное пособие / И.А. Палий.– Электрон. текстовые дан. - Москва: ИНФРА-М, 2012. – Режим доступа:http://znanium.com/bookread2.php?book=225156
8. Хуснутдинов, Р. Ш. Теория вероятностей [Электронный ресурс]: Учебник / Р.Ш. Хуснутдинов. – Электрон. текстовые дан. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=363773
9. Ермаков, В. И. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: Учеб. пособие / Под ред. В.И. Ермакова.– Электрон. текстовые дан. - Москва: ИНФРА-М, 2004. – Режим доступа:http://znanium.com/bookread2.php?book=76845
10. Павлов, С. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: Учебное пособие / С.В. Павлов. – Электрон. текстовые дан. - Москва: ИЦ РИОР: ИНФРА-М, 2010. – Режим доступа:http://znanium.com/bookread2.php?book=217167