Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Решетникова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
(Часть 1)

*Методические указания к практическим занятиям
для обучающихся по направлениям подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии»
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий»*

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.88:517.9](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.161.6я73
Р 47

Решетникова Е.В.
Р 47 Дифференциальные уравнения: методические указания к практическим занятиям для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий» / Е.В. Решетникова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2020 – 119 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задания для решения на практических занятиях и выполнения домашнего задания; список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для наиболее рациональной организации работы студентов на практических занятиях и дома.

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № 1 от 31.08.2020

И.о. заведующего каф. МФММ

__________/ Е.А. Вячкина

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики
Протокол № 1 от 24.09.2020

Председатель методической комиссии ФИМЭ

________________/Г.Н.Бойченко

УДК [378.147.88:517.9](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.161.6я73
Р 47

Текст представлен в авторской редакции

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий» и направлены на оказание помощи студентам и преподавателю при организации работы на практических занятиях и домашней работы студентов по дисциплине «Дифференциальные уравнения».

Курс «Дифференциальные уравнения» в объеме университетской программы складывается из глав, соответствующих различным разделам этой научной теории, являющейся ветвью математического анализа. Это элементарные методы интегрирования, теоремы о существовании, особые решения, общая теория линейных уравнений и систем уравнений. – эти главы тесно связаны с применением методов теории функции действительного и комплексного переменного, методами линейной алгебры и т.п.

Целью изучения данной дисциплины является построение прочного фундамента математического образования для изучения специализированных курсов, читаемых на направлениях, связанных с математическим обеспечением информационных технологий.

В методические рекомендации включено: краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задания для решения на практических занятиях и выполнения домашнего задания; список основной и дополнительной литературы.

Приведенные примеры решения типовых заданий представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям, контрольным работам и выполнения домашних заданий.

Таким образом, данные методические материалы позволяют студенту подготовиться к практическим занятиям и контрольным работам по соответствующим темам, успешно выполнить домашние задания. Методические указания могут оказаться полезными при написании курсовых и выпускных квалификационных работ.

1 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Задача Коши.

Дифференциальное уравнение (ДУ) — это соотношение между неизвестной функцией, ее производными и независимыми переменными.

Обыкновенное ДУ — это уравнение, содержащее производные лишь по одной независимой переменной.

Уравнение в частных производных — уравнение, содержащее производные по нескольким переменным.

Решением ДУ называется функция, которая при подстановке в ДУ обращает его в тождество.

Процесс нахождения решений ДУ называют **интегрированием,** а решение называют также **интегралом ДУ.**

Общим решением (общим интегралом) ДУ называется множество решений, содержащее все без исключения решения.

Частным решением называется функция, получающаяся из формулы общего решения с помощью придания некоторых числовых значений всем его постоянным.

Порядком ДУ называется максимальный порядок входящей в него производной неизвестной функции.

Если принять x и y за декартовы прямоугольные координаты, то кривая, определяемая уравнением $y=y(x)$, которое является решением данного ДУ, называется **интегральной кривой.**

ДУ, разрешенное относительно производной: $y' = f(x,y)$, или $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$.

Задача нахождения частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию, называется **задачей Коши:** $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл задачи Коши: найти интегральную кривую, проходящую через точку с координатами: (x_0, y_0).

Уравнения с разделяющимися переменными:

общий вид:

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)dy, \tag{1}$$

разделение переменных:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy, \tag{2}$$

потерянные при разделении переменных решения являются решениями уравнения:

$$\psi_1(y) \cdot \varphi_2(x) = 0. \tag{3}$$

Пример 1. Решить уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$.

Разделим обе части уравнения на x и умножим на dy:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

взяв интегралы от обеих частей уравнения (*проинтегрировав уравнение*), получим:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C,\ C \in (-\infty, +\infty),$$

после вычисления интегралов, получаем:

$$\ln|y| = \ln|x| + C.$$

Для более компактной записи применим процедуру *потенцирования*, заменив предварительно C на $\ln\tilde{C}$, полагая, что $\tilde{C} \in (0, +\infty)$. При этом $\ln\tilde{C} \in (-\infty, +\infty)$.

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln\tilde{C},$$

и после потенцирования:

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + \ln\tilde{C}},$$

и применения свойств степеней и логарифмов, получим общее решение:

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|} \cdot e^{\ln\tilde{C}},$$

$$y = Cx.$$

В последнем уравнении $C \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, это произошло вследствие раскрытия модуля.

Вернемся к началу решения. Для разделения переменных пришлось обе части уравнения разделить на x. Поэтому могло потеряться решение x=0. Проверим для начала является ли такая функция решением данного уравнения, для чего подставим ее в исходное уравнение:

$$\frac{d0}{dy} = \frac{0}{y},$$

получили тождество: 0=0.

Следовательно, функция x=0 является решением. Однако данная функция не содержится в формуле общего решения, так как ни при каких значениях постоянной C из этой формулы не получается.

Поэтому в общее решение данного уравнения необходимо добавить потерянное при разделении переменных частное решение x=0.

Итак, окончательно общее решение уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$:

$$\left[\begin{array}{l} y = Cx, C \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Пример 2. Решить задачу Коши $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $y(1) = 1$.

Первым шагом найдем общее решение уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \ .$$

Для разделения переменных умножим обе части уравнения на ydx:

$$xdx = -ydy\,.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int xdx = -\int ydy + \mathrm{C},\ C \in (-\infty, +\infty),$$

после вычисления интегралов, получим общее решение:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C\,.$$

Для удобства умножим обе части уравнения на 2:

$$x^2 + y^2 = C\,,$$

в последнем выражении осталась постоянная C, потому что она все равно $C \in (-\infty, +\infty)$.

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям, подставим их в общее решение и вычислим значение постоянной C:

$$1^2 + 1^2 = C\,,$$

$$C = 2\,.$$

Итак искомое решение задачи Коши: $x^2 + y^2 = 2$. График данной функции это окружность радиуса $\sqrt{2}$.

На рисунке 1.1 приведены интегральные кривые, для решений, полученных при разных значениях постоянной С. Жирным выделена интегральная кривая, являющаяся графиком решения исходной задачи Коши.

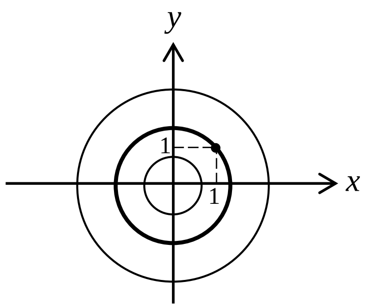

Рис.1.1 – Интегральные кривые уравнения $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

Решить уравнения, в случае наличия начальных условий найти частные решения, им удовлетворяющие и построить соответствующие интегральные кривые.

1. $y' = 2x$,

2. $y' = -\sin x$,

3. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $y(-1) = 1$,

4. $dx - \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$,

5. $y' = y$, $y(0) = 2$, $y(1) = 0$,

6. $xdy - ydx = 0$, $y(0) = 0$, $y(0) = 1$,

7. $y' = y\cos x$,

8. $y' = -y^2$, $y(1) = 1$, $y(0) = 0$,

9. $y' = \frac{2y}{x}$,

10. $y' = \frac{1}{\sin x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

11. $y' = \frac{1}{y}$, $y(1) = 1$,

12. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$, $s(0) = 0$, $s(1) = 2$,

13. $y' = \frac{1}{1 + x^2}$,

14. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$,

15. $y' = \cos x$,

16. $2x^2yy' + y^2 = 2$, $y(1) = 1$, $y(0) = 1$,

17. $y' = 5x^4$,

18. $y' = 1 + y^2$,

19. $y' = -\frac{x}{y}$,

20. $y' = y - 1$, $y(1) = 1$, $y(0) = 0$,

21. $y' = \dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$,

22. $y' = -\dfrac{1}{x^2}$, $y(1)=1$, $y(0)=1$,

23. $y' = -\sqrt{3}y$,

24. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$, $y(0)=0$, $y(1)=0$,

25. $y' = e^{-y}$,

26. $y' = y\cos x$, $y(1)=0$, $y(0)=1$,

27. $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$,

28. $xy' + y = y^2$, $y(0)=0$, $y(1)=0{,}5$,

29. $y' = -\dfrac{1}{x}$,

30. $(1-x)dy - ydx = 0$, $y(1)=1$, $y(0)=1$,

31. $y' = \sqrt{1-y}$, $y(0)=0$,

32. $xy' = -y$ $y(0)=1$, $y(1)=2$,

33. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2)=0$,

34. $z' = 10^{x+z}$, $z(0)=0$, $z(1)=2$,

35. $y' = \dfrac{1}{x-1}$,

36. $y' = \frac{1}{\cos x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y(0) = 1$,

37. $y' = 2(x-1)$,

38. $y' - xy^2 = 2xy$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$,

39. $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $y(0) = 0$,

40. $\left(x^2 - 1\right) y' = -2xy^2$, $y(1) = 0$, $y(0) = 1$,

41. $y' = 2\sqrt{y}$, $y(-1) = 1$,

42. $y' ctgx + y = 2$, $y(x) \to -1$ при $x \to 0$,

43. $x\frac{dx}{dt} + t = 1$, $x(1) = 0$,

44. $xydx + (x+1)dy = 0$, $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$,

45. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

Контрольные вопросы.

1. Какое соотношение называется дифференциальным уравнением?

2. В каком случае дифференциальное уравнение называется обыкновенным?

3. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями в частных производных?

4. Что является решением дифференциального уравнения?

5. Как еще по-другому называют процесс решения дифференциального уравнения и само решение?

6. Что называется общим решением дифференциального уравнения?

7. Что называется частным решением дифференциального уравнения?

8. Что такое порядок дифференциального уравнения?

9. Что такое интегральная кривая?

10. Запишите в общем виде дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.

11. Какая задача называется задачей Коши?

12. В чем состоит геометрический смысл задачи Коши?

13. Запишите в общем виде дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

14. Запишите в общем виде дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

15. Как происходит разделение переменных в уравнениях с разделяющимися переменными? Какие решения дифференциального уравнения могут потеряться при разделении переменных?

1.2. Исследование решений дифференциальных уравнений.

1.2.1 Метод изоклин.

Уравнение $y' = f(x, y)$ задает значение производной в каждой точке плоскости (x, y). Тогда, согласно геометрическому смыслу производной, уравнением $y' = f(x, y)$ в каждой точке плоскости задается угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в этой точке $\left(f(x, y) = tg\alpha\right)$. Построив в каждой точке плоскости отрезок, образующий с положительным направлением оси Ox угол α получим **поле направлений**, определяемой уравнением вида: $y' = f(x, y)$.

Изоклина – линия, во всех точках которой направление поля одно и то же.

Метод изоклин (для построения интегральных кривых уравнения $y' = f(x,y)$):

1) Находим область определения функции $f(x,y)$.

2) Строим кривые $f(x,y)=0$ - изоклины, в точках которых касательные параллельны оси *Ox* (линии возможных экстремумов интегральных кривых). Определяем области возрастания и убывания интегральных кривых.

3) Строим кривые $f'(x,y)=0$ - линии возможных перегибов интегральных кривых. Определяем области выпуклости и вогнутости интегральных кривых.

4) Строим еще несколько изоклин, пока не проявится схематичное изображение интегральных кривых, например:

при $f(x,y)=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ - $\alpha=\pm\frac{\pi}{6}$;

при $f(x,y)=\pm 1$ - $\alpha=\pm\frac{\pi}{4}$;

при $f(x,y)=\pm\sqrt{3}$ - $\alpha=\pm\frac{\pi}{3}$.

Пример 1. С помощью метода изоклин изобразим схематически решение уравнения $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

1) Функция $f(x,y)=-\frac{x}{y}$ определена для $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2) Определяем линию возможных экстремумов интегральных кривых.

Функция $f(x,y) = -\frac{x}{y} = 0$ в точках линии x=0. Следовательно прямая x=0 является изоклиной в точках которой касательные параллельны оси Ox.

Функция $f(x,y) = -\frac{x}{y}$ не определена в точках линии y=0. Следовательно, для определения областей монотонности будем рассматривать знаки производной в четырех полуплоскостях относительно двух прямых: x=0 и y=0:

если $x \in [0,+\infty), y \in (0,+\infty)$, то $y' = -\frac{x}{y} < 0$ и следовательно искомые функции убывают;

если $x \in (-\infty,0], y \in (0,+\infty)$, то $y' = -\frac{x}{y} > 0$ и следовательно искомые функции возрастают;

если $x \in (-\infty,0], y \in (-\infty,0)$, то $y' = -\frac{x}{y} < 0$ и следовательно искомые функции убывают;

если $x \in [0,+\infty), y \in (-\infty,0)$, то $y' = -\frac{x}{y} > 0$ и следовательно искомые функции возрастают.

В точках линии x=0 – область возрастания сменяется областью убывания при $y \in (0,+\infty)$, следовательно в верхней полуплоскости искомые интегральные кривые в точках линии x=0 имеют максимумы. При $y \in (-\infty,0)$ в точках линии x=0 – область убывания сменяется областью возрастания, следовательно в нижней полуплоскости искомые интегральные кривые в точках линии x=0 имеют минимумы.

3) Определяем линии возможных перегибов интегральных кривых. Считаем вторую производную:

$$y'' = f'(x,y) = -\left(\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

Рассматриваем условия, при которых она равна 0 или не существует:

y'' не определена в точках линии y=0. Следовательно, для определения областей выпуклости и вогнутости будем рассматривать знаки второй производной в двух полуплоскостях относительно прямой y=0:

если $y \in (-\infty, 0)$, то $y'' = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} > 0$ и следовательно искомые функции выпуклы вниз;

если $y \in (0, +\infty)$, то $y'' = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} < 0$ и следовательно искомые функции выпуклы вверх.

Итак, точки линии y=0 являются точками перегиба искомых интегральных кривых.

4) Строим изоклины:

- При $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $tg\alpha = 1$, изоклина с углом наклона касательных $\alpha = \frac{\pi}{4}$ имеет уравнение: $f(x,y) = -\frac{x}{y} = 1$ или $y = -x$.

- При $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, $tg\alpha = -1$, изоклина с углом наклона касательных $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ имеет уравнение: $f(x,y) = -\frac{x}{y} = -1$ или $y = x$.

- При $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, изоклина с углом наклона касательных $\alpha = \frac{\pi}{6}$ имеет уравнение: $f(x,y) = -\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ или $y = -\sqrt{3} \cdot x$.

- При $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $tg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, изоклина с углом наклона касательных $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ имеет уравнение: $f(x,y) = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ или $y = \sqrt{3} \cdot x$.

- При $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $tg\alpha = \sqrt{3}$, изоклина с углом наклона касательных $\alpha = \frac{\pi}{3}$ имеет уравнение: $f(x,y) = -\frac{x}{y} = \sqrt{3}$ или $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$.

- При $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $tg\alpha = -\sqrt{3}$, изоклина с углом наклона касательных $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ имеет уравнение: $f(x,y) = -\frac{x}{y} = -\sqrt{3}$ или $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

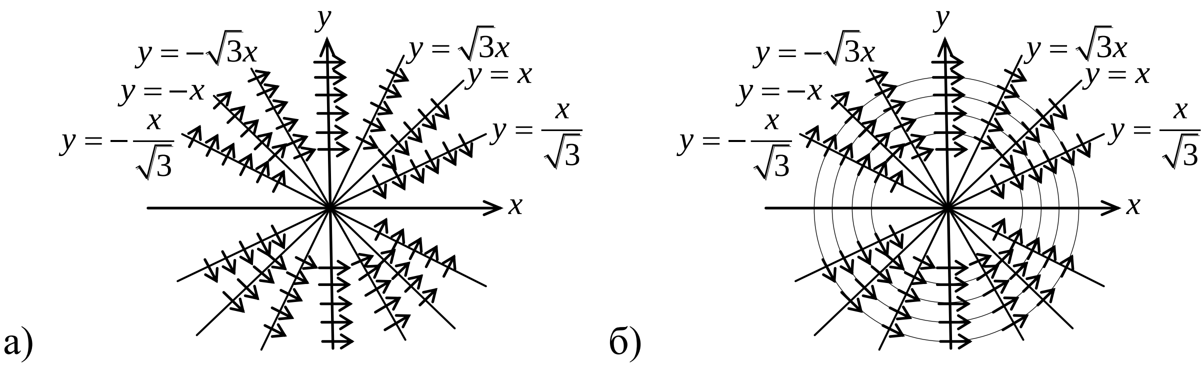

Рис. 1.2 – Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = f(x,y)$

На рисунке 1.2а) изображены полученные изоклины и поле направлений. Подключив сведения, полученные при исследовании первой и второй производной, можем схематично, согласно построенному полю направлений изобразить интегральные кривые – рисунок 1.2б). Это концентрические окружности.

1.2.2 Составление дифференциального уравнения по общему решению.

Дано: семейство функций $F(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$.

Задача: составить обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка, общим решением которого является заданное семейство.

Решение: дифференцируем уравнение $F\left(x, y, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0$ n раз и из полученной системы исключаем постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$.

Пример 2. Дано семейство функций, содержащих одну постоянную $y = Cx$, следовательно будем составлять дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференцируя заданное семейство один раз, получаем систему для исключения постоянной C:

$$\begin{cases} y = Cx, \\ y' = C. \end{cases}$$

Подставляя вместо С в первое уравнение y', получим искомое дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{x}$.

Пример 3. Дано семейство функций, содержащих три постоянных $y = x^2 C_1 + x^2 \ln x C_2 + C_3$, следовательно будем составлять дифференциальное уравнение третьего порядка. Дифференцируя заданное семейство три раза, получаем систему для исключения постоянной C:

$$\begin{cases} y = x^2 C_1 + x^2 \ln x C_2 + C_3, \\ y' = 2x C_1 + 2x \ln x C_2 + x C_2, \\ y'' = 2C_1 + 2\ln x C_2 + 2C_2 + C_2, \\ y''' = \dfrac{2C_2}{x}. \end{cases}$$

Из последнего уравнения выражаем C_2.

$$\begin{cases} y = x^2 C_1 + x^2 \ln x C_2 + C_3, \\ y' = 2xC_1 + 2x \ln x C_2 + xC_2, \\ y'' = 2C_1 + 2\ln x C_2 + 2C_2 + C_2, \\ C_2 = \dfrac{xy'''}{2}. \end{cases}$$

Подставляем выражение для C_2 во второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} y = x^2 C_1 + x^2 \ln x C_2 + C_3, \\ y' = 2xC_1 + x^2 y''' \ln x + \dfrac{x^2 y'''}{2}, \\ y'' = 2C_1 + xy''' \ln x + \dfrac{3xy'''}{2}, \\ C_2 = \dfrac{xy'''}{2}. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений выражаем $2C_2$:

$$\begin{cases} y = x^2 C_1 + x^2 \ln x C_2 + C_3, \\ 2C_1 = \dfrac{y'}{x} - xy''' \ln x - \dfrac{xy'''}{2}, \\ 2C_1 = y'' - xy''' \ln x - \dfrac{3xy'''}{2}, \\ C_2 = \dfrac{xy'''}{2}. \end{cases}$$

Приравнивая правые части второго и третьего уравнений системы, получаем искомое дифференциальное уравнение:

$$y'' - xy''' \ln x - \frac{3xy'''}{2} = \frac{y'}{x} - xy''' \ln x - \frac{xy'''}{2},$$

которое после преобразований будет иметь вид:

$$x^3 y''' - x^2 y'' + xy' = 0.$$

1.2.3 Задача об изогональных траекториях.

Изогональные кривые пересекают графики всех функций заданного семейства под одним и тем же углом. Если этот угол прямой, то кривые называются **ортогональными**.

Дано семейство функций $F\left(x, y_1, C\right)=0$.

Задача составить уравнение семейства функций $F\left(x, y_2, C\right)=0$, графики которых пересекают интегральные кривые данного семейства под одним и тем же углом α (изогональные графикам заданного семейства).

Алгоритм решения

1) Для заданного семейства функций составляем дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной: $\frac{dy_1}{dx}=\Phi\left(x, y_1\right)$ (см. п. 1.2.2).

2) Дифференциально уравнение, решением которого являются искомые кривые получаем в зависимости от значения угла α:

2.1) Пусть $\alpha=\frac{\pi}{2}$, тогда

$\frac{dy_2}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy_1}{dx}}$,

и дифференциальное уравнение ортогональных траекторий:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\Phi\left(x, y\right)}. \tag{4}$$

2.2) Пусть $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Тогда

$k=tg\alpha=tg\left(\varphi_1-\varphi_2\right)$ (см. рисунок 1.3).

$k=\frac{tg\varphi_1-tg\varphi_2}{1+tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2}$

Учитывая, что $tg\varphi_1 = \frac{dy_1}{dx} = \Phi(x, y)$, $tg\varphi_2 = \frac{dy_2}{dx}$, получаем дифференциальное уравнение изогональных траекторий:

$$k = \frac{\Phi(x, y) - \frac{dy}{dx}}{1 + \Phi(x, y) \cdot \frac{dy}{dx}}. \qquad (5)$$

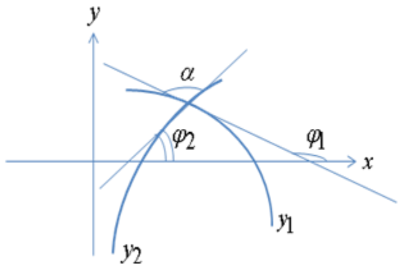

Рис. 1.3 – Кривые, пересекающиеся под углом α

Пример 4. Составить дифференциальное уравнение линий, пересекающих кривые семейства $y = Cx$ под одним и тем же углом $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

1) В примере 2 было получено дифференциальное уравнение заданного семейства $y' = \frac{y}{x}$. Следовательно, $\Phi(x, y) = \frac{y}{x}$.

2) По формуле (5) составляем уравнение линий, пересекающих кривые семейства $y = Cx$ под одним и тем же углом $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. С помощью метода изоклин исследуйте решения и изобразите схематически интегральные кривые данных дифференциальных уравнений:

1.1. $y' = 3x^2$,

1.2. $y' = y - 1$,

1.3. $y' = y\cos x$,

1.4. $y' = \frac{x + y}{x}$.

2. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых.

2.1. $y\cos x = y^2C - x$,

2.2. $\sin(x + C) = \frac{1}{y^3}$,

2.3. $\ln y = x^2C_1 + C_2$,

2.4. $x = C_1y^2 + C_2y + C_3$,

3. Составить дифференциальное уравнение линий, пересекающих кривые данного семейства под одним и тем же углом α.

3.1. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $y = Cx$,

3.2. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $x^2 + y^2 - 2yC = 0$,

3.3. $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x^2 + y^2 = R^2$

Контрольные вопросы

1. Как построить поле направлений, определяемое дифференциальным уравнением вида $y' = f(x, y)$?

2. Что такое изоклина?

3. Сформулируйте алгоритм метода изоклин для построения интегральных кривых уравнения вида $y' = f(x, y)$.

4. Сколько постоянных содержит общее решение дифференциального уравнения n-го порядка?

5. Как составить дифференциальное уравнение, общим решением которого является заданное семейство функций?

6. Что такое изогональная кривая заданного семейства функций?

7. Что такое ортогональная кривая заданного семейства функций?

8. Как найти уравнения изогональных кривых для графиков заданного семейства функций? Как изменится решение данной задачи в случае поиска ортогональных траекторий?

9. Представьте вывод формул для построения уравнений изогональных кривых.

1.3. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Теорема. Если в уравнении $y' = f(x,y)$ функция $f(x,y)$:

- непрерывна в прямоугольнике $D:\ x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b$ по всем своим аргументам,

- и удовлетворяет там условию Липшица: $\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| \le N\left|y_1 - y_2\right|$, где N – постоянная,

то в интервале $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ существует единственное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),\ M = \max_D \left|f(x,y)\right|.$$

Замечание 1. На практике вместо условия Липшица проверяют условие: $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le N$, из выполнимости которого следует выполнимость условия Липшица.

Замечание 2. Непрерывности функции $f(x,y)$ достаточно для существования решения. Условие Липшица гарантирует его единственность.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется **особым решением**.

Пример 1. Для какого значения h теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = y + xy^3$ гарантирует существование единственного решения в точке $y(0,5) = 0$ (a=b=1)?

Функция которую нужно исследовать согласно теореме $f(x,y) = y + xy^3$. Так как $x_0 = 0,5, y_0 = 0$, a=b=1, то прямоугольник D: $\{-0,5 \le x \le 1,5;\ -1 \le y \le 1\}$.

Найдем $M = \max\limits_{D}|f(x,y)| = f(1,5;1) = 1 + 1,5 \cdot 1^3 = 2,5$.

Вычислим N, для чего используем замечание 1 к теореме: $N \ge \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = 1 + 3xy^2$. В прямоугольнике D данная функция принимает наибольшее значение при x=1,5, y=1: $N \ge 1 + 3 \cdot 1,5 \cdot 1^2$. Итак, $N = 5,5$.

Считаем $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(1, \frac{1}{2,5}\right) = 0,4$.

Таким образом теорема гарантирует существование единственного решения в точке $y(0,5) = 0$ на интервале: $0,1 \le x \le 0,9$.

Для обнаружения особых решений необходимо найти геометрическое место точек, для которых выполняется первое условие теоремы (гарантирующее наличие решения), но не выполняется второе условие (гарантирующее единственность решения). Если таких точек нет, то и особых решений у уравнения нет. В случае обнаружения таких геометрических мест необходимо проверить каждую из функций – является ли она решением дифференциального уравнения (постановкой в дифференциальное уравнение) и не является ли она частным решением (получается из общего решения приданием конкретного значения постоянной). Если последние два факта подтверждаются, то делаем вывод о наличие особого решения.

Пример 2. По виду уравнения $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$, определить кривые, подозрительные на особые решения и проверить будут ли они особыми.

Проверяем первое условие теоремы: функция $f(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ непрерывна в области $\begin{cases} x > 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$

Второе условие теоремы проверим, пользуясь замечанием 1: $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}\right|$. Оно не выполняется в области: $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$

Пересечением областей, найденных при проверке условий теоремы является функция y=0.

Исходное уравнение, при подстановке в него функции y=0, обращается в тождество: $0' = \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{x}}$, следовательно, найденная функция является решением уравнения.

Далее найдем общее решение уравнения и проверим наличие в нем функции y=0.

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + C,$$

$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C.$$

Действительно, ни при каких значения постоянной C, решение y=0 из общего решения данного уравнения не получается.

Итак, функция y=0 является особым решением уравнения $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

Пример 3. Решить задачи Коши $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y(0) = 0, y(1) = 1$, предварительно проверив выполнимость условий теоремы о существовании и единственности решения в заданных точках.

Для начала поработаем с условием $y(1) = 1$:

Проверяем первое условие теоремы: функция

$f(x, y) = \left.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \dfrac{1}{2}$ -непрерывна в точке (1,1). Следовательно, решение в точке (1,1) существует.

Второе условие теоремы проверим, пользуясь замечанием 1: $\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = 0$. Следовательно, второе условие также выполняется в точке (1,1), что свидетельствует об единственности решения в данной точке.

Итак, согласно теореме, задача Коши $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y(1) = 1$ имеет единственное решение.

Найдем его:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

$$\int dy = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} + C$$

$$y = \sqrt{x} + C,$$

$$1 = \sqrt{1} + C,$$

C=0.

Решение задачи Коши с начальным условием $y(1) = 1$: $y = \sqrt{x}$.

Теперь изучим условия теоремы для начальных данных $y(0) = 0$:

Проверяем первое условие теоремы: $\lim\limits_{\substack{x \to 0, \\ y \to 0}} f(x,y) = \infty$. Первое условие не выполняется. В случае бесконечного предела в точке может быть вертикальная касательная. Проверить этот случай можно, рассмотрев данное уравнение относительно функции x: $x' = 2\sqrt{x}$:

Проверяем первое условие теоремы: функция $\tilde{f}(x,y) = 2\sqrt{x}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$ - непрерывна в точке (0,0). Следовательно, решение в точке (0,0) существует.

Второе условие теоремы проверим, пользуясь замечанием 1: $\left|\frac{\partial\tilde{f}(x,y)}{\partial x}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}}$ - не ограничена в точке (0,0). Невыполнение второго условия говорит о возможно неединственном решении в точке (0,0). Поэтому решать уравнение будем очень внимательно, чтобы не пропустить возможное второе решение:

$x' = 2\sqrt{x}$,

$\frac{dx}{dy} = 2\sqrt{x}$,

$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dy$, при разделении переменных обе части уравнения поделили на $\sqrt{x}$, что могло привести к потере решения $x = 0$. Убеждаемся подстановкой данной функции в уравнение $x' = 2\sqrt{x}$, что она является решением.

$\int dy = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} + C$

$y = \sqrt{x} + C$,

Итак, общее решение: $y = \sqrt{x} + C$, $x = 0$.

Подставляя начальные условия $y(0) = 0$, находим константу C:

$0 = \sqrt{0} + C$,

C=0.

Решение задачи Коши с начальным условием $y(0) = 0$: $y = \sqrt{x}$ и $x = 0$.

Однако, функция $x = 0$ не является решением исходного уравнения $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Поэтому для уравнения $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ задача Коши с начальным условием $y(0) = 0$ имеет единственное решение $y = \sqrt{x}$.

Такая сложная ситуация с точкой (0,0) получилась потому что она во-первых является конечной точкой кривой $y = \sqrt{x}$, а во-вторых в этой точке к интегральной кривой существует вертикальная касательная, именно поэтому $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} f(x, y) = \infty$.

На рисунке 1.2 изображена найденная интегральная кривая.

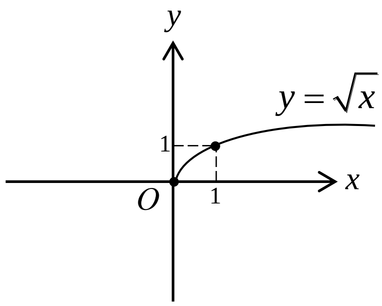

Рис.1.2– Интегральная кривая уравнения $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, являющаяся графиком решения задач Коши с начальными условиями: $y(0) = 0, y(1) = 1.$

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. Для какого значения h теорема существования и единственности решения задачи Коши гарантирует существование единственного решения

1.1. для уравнения $y' = xy + 0{,}5$ в точке $y(0) = 0$ (a=b=0,5)?

1.2. для уравнения $y' = y + xy^3$ в точке $y(0) = 0$ (a=1, b=0,5)?

2. По виду уравнений определить кривые, подозрительные на особые решения и проверить будут ли они особыми.

2.1. $y' = 4x\sqrt{y-1}$,

2.2. $y' = \dfrac{e^y}{x}$,

2.3. $y' = 2\sqrt{y}$,

2.4. $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, 2.5. $y' = \dfrac{\sqrt{y-1}}{x}$.

3. Для всех задач Коши из п. 1.1 проверить выполнимость условий теоремы. Выявить частные и особые решения.

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$. Выполнение какого из условий достаточно для утверждения существования решения?

2. Какое условие проверяют на практике вместо условия Липшица?

3. Какое решение уравнения $y' = f(x, y)$ называется особым?

4. Докажите теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ двумя методами: методом Пикара и методом сжимающих отображений.

1.4. Задачи, приводящие к составлению дифференциальных уравнений.

Для решения геометрических задач надо прежде всего построить чертеж, обозначить искомую кривую через $y = y(x)$ (если задача решается в прямоугольных координатах) и выразить все упоминаемые в задаче величины через *x*, *y* и y'. После этого данное в условии задачи соотношение превращается в дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию $y(x)$.

Пример 1. Найти кривые, у которых частное от деления длины поднормали на длину подкасательной в любой точке равно 1.

В системе координат изобразим условия задачи (см. рисунок 1.3). В произвольной точке $M(x,y)$ искомой кривой проведем касательную и нормаль. Тогда данными величинами этой задачи будут:

Дано: $|OA| = x$, $|OB| = y$, $tg\angle ACM = y'$.

Также из условия задачи известно, что $|AD| : |AC| = 1$, где $|AC|$ - подкасательная, а $|AD|$ - поднормаль. Из данного выражения получится дифференциальное уравнение, если $|AC|$ и $|AD|$ выразить через данные величины.

Из прямоугольного треугольника *ACM* (угол *A* прямой): $|AC| = \dfrac{|AM|}{tg\angle ACM} = \dfrac{y}{y'}$.

Из прямоугольного треугольника *CMD* (угол *M* прямой): $ctg\angle CDM = ctg\left(90^\circ - \angle DCM\right) = tg\angle DCM = y'$/

Из прямоугольного треугольника *ACD* (угол *A* прямой): $|AD| = |AM| \cdot ctg\angle ADM = y \cdot y'$.

Итак, получили дифференциальное уравнение: $yy' : \dfrac{y}{y'} = 1$ или $y'^2 = 1$.

Разрешая данное уравнение как квадратное относительно y', получим два уравнения с разделяющимися переменными:

$y' = 1$ и $y' = -1$,

или $\dfrac{dy}{dx} = \pm 1$,

$dy = \pm dx$

$y = \pm x + C$.

Итак, решением является два семейства прямых: параллельные биссектрисам первого и второго координатных углов.

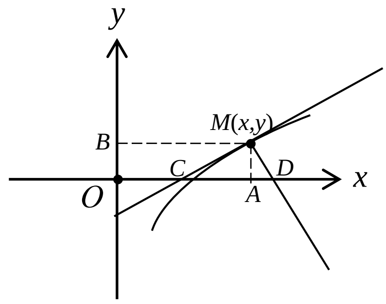

Рис.1.3 – рисунок к примеру 1

В физических задачах надо прежде всего решить какую из величин взять за независимое переменное x, а какую – за искомую функцию y. Затем надо выразить на сколько изменится искомая функция y, когда независимое переменное x получит приращение Δx, то есть выразить разность $y(x + \Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию.

В большинстве задач содержатся условия, с помощью которых можно определить значения постоянных, входящих в общее решение дифференциального уравнения.

Пример 2. В сосуд, содержащий 10 л воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 мин?

Примем за независимое переменное время t, а за искомую функцию $y(t)$ – количество соли в сосуде через t минут после начала опыта.

Найдем, на сколько изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$.

За одну минуту в сосуд поступает 2 л раствора, тогда за Δt минут в сосуд поступит $2\Delta t$ литра раствора. Так как в каждом литре поступившего раствора содержится 0,3 кг соли, то за время Δt минут количество соли в сосуде увеличится на $0,3\cdot 2\Delta t$ кг.

За одну минуту из сосуда вытекает также 2 л раствора, тогда за Δt минут из сосуда вытечет также $2\Delta t$ литра раствора. В каждом литре вытекающего в момент времени t минут раствора содержится $y(t)$ кг соли. Следовательно, за время Δt минут количество соли в сосуде уменьшится на $2y(t)\Delta t$ кг.

Итак, приращение соли в сосуде за Δt минут составит:

$$\Delta y = 0,6\Delta t - 2y\Delta t.$$

Разделим полученное уравнение на Δt и возьмем предел от левой и правой частей уравнения при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[0,6-2y\right].$$

Воспользовавшись определением производной, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = 0,6 - 2y.$$

Разделим переменные и проинтегрируем это уравнение:

$$\frac{dy}{0,6-2y} = dt,$$

$$y = 0{,}3 - Ce^{-2t}.$$

В тексте задачи есть начальные условия: «В сосуд, содержащий 10 л воды…», согласно им $y(0) = 0$ - то есть в начальный момент времени соль в сосуде отсутствовала. Решаем поставленную задачу Коши:

$$0 = 0{,}3 - Ce^{-2\cdot 0},$$

$$C = 0{,}3.$$

Окончательно, закон зависимости количества соли в времени в данном сосуде имеет вид:

$$y(t) = 0{,}3\left(1 - e^{-2t}\right).$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, подставим в полученную формулу t=5:

$$y(5) = 0{,}3\left(1 - e^{-2\cdot 5}\right) \approx 0{,}3 \text{ кг.}$$

Иногда дифференциальное уравнение можно составить более простым путем, воспользовавшись физическим смыслом производной (если независимое переменное x – время, то $\frac{dy}{dx}$ - скорость изменения величины y).

В некоторых задачах при составлении уравнения следует использовать физические законы, сформулированные в тексте задачи или перед задачей.

Пример 3. Известно, что физический закон, описывающий процесс радиоактивного распада, состоит в следующем: скорость распада отрицательна и пропорциональна количеству нераспавшегося к данному моменту времени вещества. Коэффициент пропорциональности называется постоянной распада и является величиной, характеризующей данное вещество.

Примем за независимое переменное время *t*, а за искомую функцию $y(t)$ – количество нераспавшегося вещества через *t* минут после начала опыта. Обозначим постоянную распада за *k*. Используя закон распада и физический смысл производной, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = -ky\,.$$

Разделим переменные и проинтегрируем это уравнение:

$$y = Ce^{-kt}\,.$$

Для определения физического смысла постоянной *C*, подставим начальные условия: $y(0) = y_0$:

$$y_0 = Ce^{-k\cdot 0},$$

$$C = y_0\,.$$

Итак, закон, зависимости количества вещества от времени:

$$y = y_0 e^{-kt}\,.$$

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. Цилиндрический резервуар с высотой 6 м и диаметром основания 4 м поставлен вертикально и наполнен водой. За какое время вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиуса 1/12 м, сделанного в дне резервуара?

Рекомендации: для решения задач на вытекание из сосудов жидкости следует использовать выражение для скорости истечения жидкости из отверстия: $\mu(2gh)^{1/2}$, где μ=0,6 – коэффициент вязкости воды; *h*- высота столба жидкости над отверстием.

2. В комнате, где температура 20ºС, некоторое тело остыло за 20 мин от 100 до 60ºС. Найти закон охлаждения тела; через несколько минут оно остынет до 30ºС? Повышением температуры в комнате пренебречь.

Рекомендации: для решения задач на нагревание (остывание) тел следует использовать утверждение о том, что скорость нагревания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды).

3. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/сек, через 4 сек скорость ее 1м/сек. Когда скорость уменьшится до 1см/сек? Какой путь может пройти лодка до остановки?

Рекомендации: для решения задач на движение используют второй закон Ньютона $ma = \sum_i F_i$, где m – масса движущегося тела, a – ускорение, F_i – действующие на движущееся тело силы.

4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (-1,-1) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый от оси Ох касательной, проведенной в любой точке кривой, равен квадрату абсциссы точки касания.

5. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:2.

Контрольные вопросы.

1. Как составляется дифференциальное уравнение для решения геометрических задач?

2. Как составляется дифференциальное уравнение для решения физических задач?

1.5. Замена переменных в дифференциальном уравнении, разрешенном относительно производной.

Уравнением, разрешенным относительно производной называется уравнение вида: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Рассмотрим основные виды уравнений, разрешенных относительно производной:

1) Уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$. Для решения используется замена: $z(x) = ax + by$, $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x - y} + 1$. Это уравнение вида 1. Сделаем замену: $z = x - y$, тогда $y = x - z$, $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$. После замены, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1,$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z},$$

$$zdz = -dx,$$

$$\frac{z^2}{2} = -x + C.$$

Возвратимся в замену и запишем общее решение исходного уравнения: $(x - y)^2 = -2x + C$.

2) Уравнение вида $\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ называется однородным уравнением. Для решения используется замена: $z(x)=\dfrac{y}{x}$, $y=z(x)\cdot x$, $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{dz}{dx}+z$.

Пример 2. Решить уравнение $(x+y)dx-(y-x)dy=0$. Разрешим его относительно производной: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x+y)}{(y-x)}$ и разделим числитель и знаменатель правой части на x: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{y}{x}-1}$. Как видно это уравнение вида 2 (однородное). Сделаем замену: $z=\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{dz}{dx}+z$. После замены, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\frac{dz}{dx}+z=\frac{1+z}{z-1},$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{1+2z-z^2}{z-1},$$

$$\frac{(z-1)dz}{1+2z-z^2}=\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+2z-z^2\right|=\ln|x|+\ln C,$$

$$1+2z-z^2=\frac{C}{x^2},$$

Возвратимся в замену и запишем общее решение исходного уравнения:

$$1+2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{C}{x^2}.$$

3) Уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ называется приводящимся к однородному. Для поиска замены решаем систему $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases}$ Пусть ее решение: $x = x_1$, $y = y_1$. Тогда замена $x = X + x_1$, $y = Y + y_1$ приводит исходное уравнение к однородному (вида 2).

Пример 3. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$. Это уравнение вида 3 (приводящееся к однородному). Для поиска замены решаем систему:

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ x+y-3=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2. \end{cases}$$

Итак, в исходном уравнении сделаем замену: $X = x-1$, $Y = y-2$ и получим однородное уравнение (вида 2): $\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y}$.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

Разрешить уравнения относительно производной. Определить вид уравнения, преобразовав правую часть к соответствующему виду. Сделав нужную замену, решить уравнения.

1. $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$.
2. $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$.
3. $xy'\ln\left(\frac{y}{x}\right) = x + y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.
4. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

5. $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$.

6. $y'-y=2x-3$.

7. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$.

8. $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$.

Контрольные вопросы.

1. Какое уравнение называется разрешенным относительно производной?

2. В каком уравнении и как делается линейная замена переменных?

3. Какое уравнение называется однородным? Как выполняется замена в однородном уравнении?

4. Какое уравнение называется приводящимся к однородному? Какой заменой данное уравнение приводится к однородному уравнению?

1.6. Метод вариации постоянной. Метод Бернулли.

Линейное неоднородное уравнение первого порядка имеет вид:

$y'+p(x)y=g(x)$.

Уравнение Бернулли имеет вид: $y'+p(x)y=g(x)y^n$.

Для решения указанных типов уравнений применяем ***метод вариации постоянной***:

- решаем соответствующее однородное уравнение: $y'+p(x)y=0$, его решение: $y=Ce^{-\int p(x)dx}$.

- в исходном уравнении делаем замену: $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$, $y'=C'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

- интегрируя получившееся уравнение, находим $C(x)$.

Пример 1. Уравнение $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2$ является линейным неоднородным уравнением первого порядка. Решим его методом вариации постоянной. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$. Его общее решение: $y=Cx$. Сделаем замену в исходном равнении: $y=C(x)\cdot x$, $y'=C'(x)\cdot x+C(x)$:

$$C'x+C-\frac{Cx}{x}=x^2,$$

$$C'=x,$$

$$C=\frac{x^2}{2}+\tilde{C}.$$

Подставляем найденное решение в замену и получим общее решение исходного уравнения: $y=\frac{x^3}{2}+\tilde{C}x$.

Для решения уравнений указанного вида также можно использовать ***метод Бурнулли***:

- делаем замену $y=u(x)\cdot v(x)$, $y'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$: $u'v+uv'+p(x)uv=g(x)$.

- ищем функцию *u*, решая уравнение $u'+p(x)u=0$. В качестве функции *u* берем любое частное решение.

- найденную функцию *u* подставляем в уравнение $uv'=g(x)$ и ищем функцию *v*.

Пример 2. Решим уравнение $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2$ методом Бернулли. После замены $y=u(x)\cdot v(x)$, $y'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$, данное уравнение примет вид: $u'v+uv'-\frac{uv}{x}=x^2$.

Ищем функцию u, решая уравнение $u' - \frac{u}{x} = 0$. Его частное решение: $u = x$ (C=1).

Подставляя $u = x$ в уравнение, получаем:

$$xv' = x^2,$$

$$v = \frac{x^2}{2} + C.$$

Итак, общее решение исходного уравнения: $y = \frac{x^3}{2} + Cx$.

Линейные уравнения и уравнения Бернулли несимметричны относительно неизвестной функции и переменной, поэтому иногда для решения нужно рассматривать уравнения для неизвестной функции $x(y)$.

Линейное неоднородное уравнение относительно функции x(y): $x' + p(y)x = g(y)$.

Уравнение Бернулли относительно функции x(y): $x' + p(y)x = g(y)x^n$.

Пример 3. Уравнение $y' = \frac{y}{x + y^3}$ не является ни линейным неоднородным уравнением ни уравнением Бернулли относительно функции $y(x)$. Рассмотрим его относительно функции $x(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^3},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^3}{y}$$

$$x' = \frac{x}{y} + y^2.$$

Последнее уравнение является линейным неоднородным относительно функции $x(y)$.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. $xy' - y = x^2 \cos x$,

2. $y' + \dfrac{x}{1-x^2} y = x\sqrt{y}$,

3. $\left(2e^y - x\right) y' = 1$,

4. $y' + ytgx = \sec x$,

5. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$,

6. $(2xy+3)dy - y^2 dx = 0$,

7. $y' - y\sin x = \sin x \cos x$,

8. $3y^2 y' + y^3 = -x$,

9. $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + a \sin 2y}$

Контрольные вопросы.

1. Какое уравнение называется линейным неоднородным уравнением первого порядка?

2. Какое уравнение называется уравнением Бернулли?

3. Как решаются линейное неоднородное и уравнение Бернулли методом вариации постоянных?

4. Как решаются линейное неоднородное и уравнение Бернулли методом Бернулли?

5. Каков общий вид линейного неоднородного уравнения первого порядка и уравнения Бернулли если их рассматривать, как уравнения относительно функции $x(y)$?

1.7. Уравнения в полных дифференциалах. Метод интегрирующего множителя.

Уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется **уравнением в полных дифференциалах,** если существует функция $U(x,y)=C$, такая, что $dU(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$. То есть для функции $U(x,y)=C$: $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$, $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$.

Теорема. Если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y},\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, в некоторой односвязной области D, то для того, чтобы уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ было уравнением в полных дифференциалах необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ (условие Эйлера).

Решение уравнения в полных дифференциалах:

Способ 1 (Основан на доказательстве достаточности условия Эйлера).

1) Пусть $U(x,y)=C$ - решение исходного уравнения, тогда из определения уравнения в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=M(x,y). \tag{7}$$

2) Интегрируем уравнение (7) относительно x:

$$U(x,y)=\int M(x,y)\partial x+\varphi(y). \tag{8}$$

3) Дифференцируем (8) по y:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\int M(x,y)\partial x\right)}{\partial y}+\varphi'(y). \tag{9}$$

4) С другой стороны из определения уравнения в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=N(x,y). \tag{10}$$

Приравнивая правые части уравнений (9) и (10), получим:

$$N(x,y)=\frac{\partial\left(\int M(x,y)\partial x\right)}{\partial y}+\varphi'(y). \qquad (11)$$

5) Интегрируем уравнение (11), находим:

$$\varphi(y)=\int\left(N(x,y)-\frac{\partial\left(\int M(x,y)\partial x\right)}{\partial y}\right)dy. \qquad (12)$$

6) Подставляя (12) в (8), получаем решение исходного уравнения $\int M(x,y)\partial x+\int\left(N(x,y)-\frac{\partial\left(\int M(x,y)\partial x\right)}{\partial y}\right)dy=C$.

Пример 1. Уравнение $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$ является уравнением в полных дифференциалах. Действительно условие Эйлера выполняется:

$$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y}=1, \qquad \frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x}=1.$$

Следовательно левая часть исходного уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)=C$. Ищем функцию $U(x,y)=C$ способом 1.

1) $\dfrac{\partial U}{\partial x}=x+y+1,$

2) $U=\int(x+y+1)dx+\varphi(y)=\dfrac{x^2}{2}+xy+x+\varphi(y),$

3) $\dfrac{\partial U}{\partial y}=x+\varphi'(y),$

4) С другой стороны $\dfrac{\partial U}{\partial y}=x-y^2+3$, следовательно

$x+\varphi'(y)=x-y^2+3,$

$\varphi'(y)=-y^2+3,$

5) $\varphi(y)=-\dfrac{y^3}{3}+3y+C$

6) $U(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+xy+x-\dfrac{y^3}{3}+3y+C$.

Общий интеграл исходного уравнения:

$$\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y=C.$$

Способ 2. Можно определить функцию $U(x,y)=C$ по ее полному дифференциалу, взяв криволинейный интеграл от $dU(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$ между некоторой фиксированной точкой (x_0, y_0) и точкой с переменными координатами (x,y) по любому пути интегрирования:

$$U(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left[M(x,y)dx+N(x,y)dy\right].$$

В качестве пути интегрирования удобно брать ломаную, составленную из двух звеньев, параллельных осям координат (рисунок 1.4).

Рисунок 1.4 – пути интегрирования для криволинейного интеграла

В этом случае

$$U(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left[M(x,y)dx+N(x,y)dy\right]=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)}N(x,y)dy+\int\limits_{(x_0,y)}^{(x,y)}M(x,y)dx,$$

(рисунок 1.4а)

или

$$U(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left[M(x,y)dx+N(x,y)dy\right]=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)}M(x,y)dx+\int\limits_{(x,y_0)}^{(x,y)}N(x,y)dy.$$

(рисунок 1.4б).

Пример 2 Для уравнения из примера 1 найдем функцию $U(x,y)=C$ способом 2:

$$U(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left[M(x,y)dx+N(x,y)dy\right]=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left[(x+y+1)dx+(x-y^2+3)\right]dy.$$

За начальную точку выбираем, например начало координат, а в качестве пути интегрирования ломаную с рисунка 1.4б), тогда:

$$U(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,0)}(x+y+1)dx+\int\limits_{(x,0)}^{(x,y)}(x-y^2+3)dy=\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y.$$

Общий интеграл уравнения: $\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y=C$.

В некоторых случаях, когда левая часть уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ не является полным дифференциалом, удается подобрать функцию $\mu(x,y)$, после умножения на которую левая часть уравнения превращается в полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)=C$. То есть $dU(x,y)=M(x,y)\mu(x,y)dx+N(x,y)\mu(x,y)dy$.

Такая функция называется ***интегрирующим множителем***.

Утверждение 1. Всякое дифференциальное уравнение первого порядка, удовлетворяющее условиям теоремы о существовании и единственности решения, имеет интегрирующий множитель.

Утверждение 2. Число интегрирующих множителей такого уравнения бесконечно.

Утверждение 3. Если $\mu(x,y)$- некоторый интегрирующий множитель уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, то формула $\varphi(U)\mu(x,y)$ задает все возможные интегрирующие множители данного уравнения.

Следствие. Если известны два существенно различных (различающихся не только постоянными множителями) интегрирующих множителя μ и μ_1 уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, то его общий интеграл: $\frac{\mu_1}{\mu}=const$.

Общего алгоритма нахождения интегрирующего множителя не существует. Однако это возможно, когда заранее можно предположить функцией какого аргумента он является.

Если $$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}-M(x,y)\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}}\equiv\varphi(w(x,y))$$ (является функцией только аргумента $w(x,y)$, то существует интегрирующий множитель $\mu=\mu(w(x,y))$, который находится из уравнения $\frac{d\mu}{dw}=\varphi(w)\mu$, и равен $\mu(x,y)=e^{\int\varphi(w)dw}$.

Например, условия, при которых уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ имеет интегрирующий множитель, **зависящий только от *x* ($\mu=\mu(x)$):**

$$\frac{-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{N(x,y)}\equiv\varphi(x). \tag{13}$$

И сам интегрирующий множитель:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{N(x,y)}dx}. \tag{14}$$

Пример 3. Проверим существование интегрирующего множителя вида (14) у уравнения $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$. Данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как условие Эйлера не выполняется:

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2x+x^2+y^2.$$

Проверяем условие (13):

$$\frac{-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{N(x,y)}=\frac{-2x+2x+x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

То есть $\varphi(x)=1$ и интегрирующий множитель, зависящий только от x существует, найдем его по формуле (14): $\mu=e^x$.

После умножения исходного уравнения на найденный интегрирующий множитель, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+e^x\left(x^2+y^2\right)dy=0.$$

Действительно для последнего уравнения выполняется условие Эйлера:

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=e^x2x+e^x\left(x^2+y^2\right),\ \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=e^x\left(2x+x^2+y^2\right).$$

Условия, при которых уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ имеет интегрирующий множитель, **зависящий только от y ($\mu=\mu(y)$):**

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{M(x,y)}\equiv\psi(y) \qquad (15)$$

И сам интегрирующий множитель:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{M(x,y)}dy}. \qquad (16)$$

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. Убедиться, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, проверив условие Эйлера. Проинтегрировать уравнение двумя способами.

1.1. $\left(y^2-2x^3\right)dx+2xydy=0$,

1.2. $\left(1-3x^2-y\right)dx=\left(x-3y^2\right)dy$,

1.3. $y'+\dfrac{2}{3y^2}+\dfrac{y}{3x}=0$,

1.4. $y'=\dfrac{y^4+2xy}{3x^2-y^2}$.

2. Найти интегрирующий множитель. После умножения на него уравнения, проверить условие Эйлера. Проинтегрировать полученное уравнение в полных дифференциалах.

2.1. $y'+2xy=xe^{-x^2}$,

2.2. $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$,

2.3. $\left(x^2+y^2+x\right)dx+ydy=0$,

2.4. $xyy'=y^2+2x^2$,

2.5. $y'-y\sin x=\sin x\cos x$,

2.6. $4x^2y^2dx+x^3(2y-1)dy=0$,

2.7. $-4xy'+2y+x^5y^3e^x=0$,

2.8. $\left(2xy^2-y\right)dx+\left(y^2\ln y+x-y\right)dy=0$.

Контрольные вопросы.

1. В каком случаем уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется уравнением в полных дифференциалах?

2. Сформулируйте и докажите теорему об условии Эйлера.

3. Опишите этапы метода решения уравнений в полных дифференциалах, основанного на теореме об условии Эйлера.

4. Опишите метод интегрирования уравнения в полных дифференциалах, основанный на построении криволинейных интегралов.

5. Какая функция называется интегрирующим множителем?

6. Сформулируйте и докажите утверждения об интегрирующем множителе и их следствие.

7. Приведите вывод условия существования интегрирующего множителя, зависящего только от аргумента $w(x,y)$. Как получить такой интегрирующий множитель, если условие выполняется?

8. Как получить интегрирующий множитель, зависящий только от x?

9. Как получить интегрирующий множитель, зависящий только от y?

10. Найдите интегрирующий множитель для линейного неоднородного уравнения, для уравнения Бернулли, для уравнения с разделяющимися переменными, для однородного уравнения.

1.8. Уравнение, неразрешенное относительно производной.

Общий вид уравнения, неразрешенного относительно производной: $F(x, y, y') = 0$.

Частные случаи уравнений, неразрешенных относительно производных и методы их решения:

1. Уравнение n-ой степени относительно производной:

$$F(x, y, y') \equiv A_n(x, y)y'^n + A_{n-1}(x, y)y'^{n-1} + \ldots + A_0(x, y) = 0.$$

Такое уравнение можно разрешить в элементарных функциях относительно y':

$$y' = f_k(x, y), \quad k \le n \tag{17}$$

Совокупность общих интегралов уравнений (17): $\psi_k(x, y) = C$ будет общим интегралом исходного уравнения. Решение можно записать также в виде одной формулы: $[\psi_1(x, y) - C] \cdot [\psi_2(x, y) - C] \ldots [\psi_k(x, y) - C] = 0$.

Пример 1. Уравнение $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ является уравнением второй степени относительно производной. Решая его, получим два дифференциальных уравнения: $y' = \sqrt{-y^2 + 1}$ и $y' = -\sqrt{-y^2 + 1}$.

Решениями которых будут семейства функций: $\arcsin y = x + C$ (при $-\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2}$) и $\arcsin y = -x + C$ (при $-\frac{\pi}{2} < -x + C < \frac{\pi}{2}$), а также функции $y = 1$ и $y = -1$.

Общее решение можно записать, объединив два семейства в одно: $y = \sin(x + C)$, $y = 1$, $y = -1$.

2. Неполные уравнения.

2.1. Отсутствуют x и y $F(y') = 0$**.**

Пусть $y' = k$, тогда $\frac{dy}{dx} = k$, и $y = kx + C$. Откуда $k = \frac{y - C}{x} = y'$.

Общий интеграл исходного уравнения: $F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0$.

Пример 2. Решением уравнение типа 2.1: $y'^7 + y'^5 - y' + 3 = 0$ будет функция: $\left(\frac{y - C}{x}\right)^7 + \left(\frac{y - C}{x}\right)^5 - \left(\frac{y - C}{x}\right) + 3 = 0$.

2.2. Отсутствует y $F(x, y') = 0$**.**

Будем искать общее решение в параметрическом виде. Вводим параметр *t*:

$$x = \varphi(t), \; y' = \psi(t). \qquad (18)$$

В формулу $dy = y'dx$, подставим выражения (18):

$$dy = \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (19)$$

(19) является дифференциальным уравнением с разделенными переменными. Проинтегрировав (19) получим: $y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C$.

Итак, общее решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \end{cases}$

Замечание: Если уравнение $F(x, y') = 0$ легко разрешимо относительно *x*, то в качестве параметра удобно ввести $t = y'$, т.е. $\psi(t) = t$.

Пример 3. Решим уравнение типа 2.2. $x = y'^3 - y' - 1$. Согласно замечанию вводим параметр: $y' = t,\; x = t^3 - t - 1$ и подставляем в формулу $dy = y'dx$:

$$dy = t(3t^2 - 1)dt,$$

$$y = \frac{3t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + C.$$

Общее решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x = t^3 - t - 1, \\ y = \dfrac{3t^4}{4} - \dfrac{t^2}{2} + C. \end{cases}$

Пример 4. Для решения уравнения типа 2.2. $x\sqrt{1+y'^2}=y'$, вводим параметр *t*: $y'=tgt$, тогда $x=\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\dfrac{tgt}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}}=\sin t$ $\left(1+tg^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)$.

Подставляем в формулу $dy=y'dx$:

$$dy=\sin t dt,$$

$$y=-\cos t+C.$$

Общее решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=-\cos t+C. \end{cases}$

Можно получить общее решение, исключив параметр: $x^2+(y-C)^2=1$.

2.3. Отсутствует x $F(y,y')=0$.

Решается аналогично типу 2.2. Будем искать общее решение в параметрическом виде. Вводим параметр *t*:

$$y=\varphi(t),\ y'=\psi(t) \tag{20}$$

В формулу $dx=\dfrac{dy}{y'}$, подставим выражения (20):

$$dx=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}. \tag{21}$$

(21) является дифференциальным уравнением с разделенными переменными. Проинтегрировав (21) получим формулу: $x=\int\dfrac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C$.

Итак, общее решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$

Замечание. Если уравнение $F(y, y') = 0$ легко разрешимо относительно y, то в качестве параметра удобно ввести $t = y'$, т.е. $\psi(t) = t$.

Пример 5. Для решения уравнения типа 2.3. $y = y'^5 + y'^3 + y' + 5$, согласно замечанию вводим параметр: $y' = t,\ y = t^5 + t^3 + t + 5$ и подставляем в формулу $dx = \dfrac{dy}{y'}$:

$$dx = \frac{\left(t^5 + t^3 + t + 5\right)' dt}{t} = \frac{5t^4 + 3t^2 + 1}{t} dt,$$

$$x = \frac{5t^4}{4} + \frac{3t^2}{2} + \ln|t| + C.$$

Общее решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \dfrac{5t^4}{4} + \dfrac{3t^2}{2} + \ln|t| + C, \\ y = t^5 + t^3 + t + 5. \end{cases}$

Пример 6. Для решения уравнения типа 2.3. $\dfrac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1$, вводим параметр: $y' = sht$, тогда $y = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + sh^2 t} = cht$ $(1 + sh^2 t = ch^2 t)$.
Подставляем в формулу $dx = \dfrac{dy}{y'}$: $dx = dt$.

Общее решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x = t + C, \\ y = cht \end{cases}$

Можно получить общее решение, исключив параметр: $y = ch(x - C)$.

3. Метод введения параметра в полном уравнении: $F(x, y, y') = 0$**.**

3.1. Уравнение легко разрешимо относительно x: $x = f(y, y')$**.**

В качестве параметров берем *y* и *t*:

$$y' = t,\ x = f(y,t). \tag{22}$$

В формулу $dy = y'dx$ подставим выражения (22):

$$dy = tdf(x, y) = t\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial t}dt\right). \tag{23}$$

(23) - уравнение, разрешимое относительно производной. Если общий интеграл (23): $\Phi(x,t,C) = 0$, то общий интеграл исходного уравнения в параметрическом виде: $\begin{cases} \Phi(x,t,C) = 0, \\ x = f(x,t). \end{cases}$

3.2. Уравнение легко разрешимо относительно y: $y = f(x, y')$**.**

В качестве параметров берем *x* и *t*:

$$y' = t,\ \ y = f(x,t). \tag{24}$$

В формулу $dy = y'dx$ подставим выражения (24):

$$df(x,t) = tdx, \tag{25}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt = tdx.$$

(25) – уравнение, разрешимое относительно производной. Если общий интеграл (25): $\Phi(x,t,C) = 0$, то общий интеграл исходного уравнения в параметрическом виде: $\begin{cases} \Phi(x,t,C) = 0, \\ y = f(x,t). \end{cases}$

Пример 7. Для решения уравнения типа 3.2. $y'^2 - y'x + \frac{x^2}{2} = y$, вводим параметры: $y' = t$, $y(x,t) = t^2 - tx + \frac{x^2}{2}$ и подставляем в формулу $dx = \frac{dy}{y'}$:

$$dx = \frac{1}{t}\big((-t + x)dx + (2t - x)dt\big),$$

$$(2t - x)\left(1 - \frac{dt}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{dt}{dx} = 1 \text{ или } 2t - x = 0,$$

$$x = t + C \text{ или } t = \frac{x}{2} \text{ - особое решение.}$$

Общее решение в параметрическом виде: $\begin{cases} x = t + C, \\ y = t^2 - tx + \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$ или исключая параметр, получим общее решение: $y = (x + C)^2 - (x + C)x + \frac{x^2}{2}$.

Особое решение $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

3.2.1. Уравнение, линейное относительно x и y: $y = \varphi(y')x + \psi(y')$ **(*уравнение Лагранжа*).**

После введения параметров по формулам (24), уравнение (25) будет линейным неоднородным относительно *x(t):* $\frac{dx}{dt} + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - t}x = \frac{\psi'(t)}{t - \varphi(t)}$.

Если существуют вещественные решения t_i уравнения $\varphi(t)-t=0$, то $y=t_i x+\psi(t_i)$ являются особыми решениями уравнения Лагранжа.

Пример 8. Решим уравнение Лагранжа $y=2xy'-y'^3$.

Вводим параметры: $y'=t,\ y=2tx-t^3$ и подставляем в формулу $dy=y'dx$, получаем линейное неоднородное уравнение $2tdx+\left[2x-3t^2\right]dt=tdx$ или $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{2}{t}x=3t$. Общее решение последнего уравнения: $x=\dfrac{3t^2}{4}+\dfrac{C}{t^2}$. Причем $t=0$ - его особое решение.

Общее решение исходного уравнения в параметрическом виде: $\begin{cases} x=\dfrac{3t^2}{4}+\dfrac{C}{t^2}, \\ y=2t\left[\dfrac{3t^2}{4}+\dfrac{C}{t^2}\right]-t^3. \end{cases}$ Особое решение исходного уравнения $y=0$.

3.2.1.1. Уравнение Клеро $y=y'x+\psi(y')$.

Данное уравнение представляет частный случай уравнения Лагранжа. После введения параметров по формулам (24), уравнение (25) будет иметь вид:

$\left[x+\psi'(t)\right]dt=0,$

$dt=0$ или $\left[x+\psi'(t)\right]=0,$

$t=C$ или $x=-\psi'(t)$ - особое решение.

Общее решение исходного уравнения: $y=Cx+\psi(C)$,

Особое решение исходного уравнения: $\begin{cases} y=tx+\psi(t), \\ x=-\psi'(t) \end{cases}$

Пример 9. Решим уравнение Клеро $y = xy' - y'^2$. Вводим параметры: $y' = t,\ y = tx - t^2$ и подставляем в формулу $dy = y'dx$, получаем уравнение $[x - 2t]dt = 0$. Общее решение последнего уравнения: $t = C$, особое решение $x = 2t$.

Общее решение исходного уравнения: $y = Cx - C^2$.

Особое решение исходного уравнения: $\begin{cases} y = tx - t^2, \\ x = 2t. \end{cases}$. Или, после исключения параметра: $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Огибающей некоторого семейства $\Phi(x, y, C) = 0$ называется такая кривая, через каждую точку которой проходит кривая семейства, имеющая в этой точке ту же касательную, но не совпадающая с огибающей в сколь угодно малой окрестности этой точки.

График особого решения является огибающей семейства кривых общего решения.

Пример 10. Рассмотрим решения уравнения из примера 9. Общее решение $y = Cx - C^2$ - семейство прямых, а его особое решение $y = \dfrac{x^2}{4}$ - парабола, являющаяся огибающей семейства прямых общего решения. На рисунке 1.5 изображены графики этих функций.

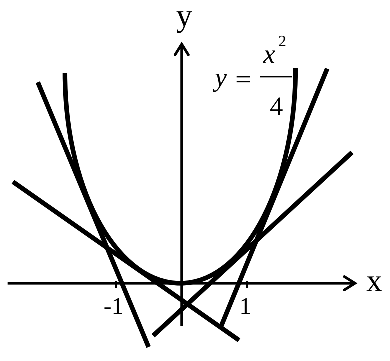

Рисунок 1.5. – Графики семейства общего решения и особого решения (огибающей) для уравнения из примера 9.

Уравнение огибающей семейства функций $\Phi(x, y, C) = 0$ можно найти, исключив постоянную C из системы уравнений:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial C} = 0. \end{cases} \qquad (26)$$

Теорема. Существует единственное решение $y = y(x)$, $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, где h достаточно мало, уравнения $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, для которого $y'(x_0) = y'_0$, где y'_0 - один из действительных корней уравнения $F(x_0, y_0, y') = 0$, если в замкнутой окрестности точки (x_0, y_0, y'_0) функция $F(x, y, y')$ удовлетворяет условиям:

1) $F(x, y, y')$ непрерывна по всем аргументам.

2) Существует производная $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \ne 0$.

3) Существует $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \le N_1$.

Замечание. Если не выполняется условие $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \ne 0$ теоремы, то не выполняется условие Липшица. Следовательно, особое решение определяется из системы:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0. \end{cases} \qquad (27)$$

Исключая в (27) y', получим функции $\Phi(x, y) = 0$, графики которых называются ***дискриминантная кривая*** уравнения $F(x, y, y') = 0$. ***Только***

среди точек дискриминантной кривой <u>могут быть</u> точки особого множества. То есть если некоторая ветвь дискриминантной кривой: $y = \varphi(x)$ является решением уравнения и в ее точках нарушена единственность, то это есть особое решение**.**

Пример 11. Найдем дискриминантную кривую для уравнения из примера 1 $y'^2 + y^2 - 1 = 0$. Рассмотрим систему вида (27):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2y' = 0, \\ y'^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение системы значение $y' = 0$, получим уравнение дискриминантной кривой: $y^2 = 1$, или $y = 1$ и $y = -1$. Обе функции являются решением.

Найдем огибающую для семейства функций $y = \sin(x + C)$, являющегося общим решением данного уравнения. Составим систему вида (26):

$$\begin{cases} y = \sin(x + C), \\ \cos(x + C) = 0. \end{cases}$$

Выражаем постоянную С из второго уравнения и подставляем в первое:

$$\begin{cases} y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2} + \pi k - x \right), \\ C = \dfrac{\pi}{2} + \pi k - x. \end{cases}$$

Итак огибающая имеет уравнение $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$ или $y = 1$ и $y = -1$.

То есть обе ветви дискриминантной кривой являются особыми решениями данного уравнения. На рисунке 1.6 изображено общее и особые решения уравнения.

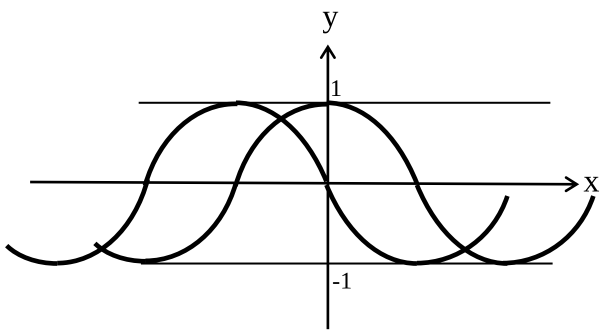

Рисунок 1.6. - Общее и особые решения уравнения $y'^2 + y^2 - 1 = 0$

Пример 12. Изучим решение уравнения $y'^2 - y^3 = 0$. Разрешив данное уравнение относительно производной, получим два уравнения: $y' = \pm\sqrt{y^3}$ *и* $y' = \pm\sqrt{y^3}$. Решения последних уравнений можно объединить в одно общее решение исходного уравнения: $y = \dfrac{1}{(x+C)^2}$.

Дискриминантную кривую получим из системы:

$$\begin{cases} y'^2 - y^3 = 0, \\ 2y' = 0. \end{cases}$$

Дискриминантная кривая имеет уравнение *y*=0. Данная функция является решением дифференциального уравнения.

Для построения огибающей составим систему: $\begin{cases} y = \dfrac{1}{(x+C)^2}, \\ 0 = -\dfrac{2}{(x+C)^3}. \end{cases}$

Исключить постоянную *C* из последней системы невозможно, следовательно особых решений (огибающих) нет.

Итак, хотя условия теоремы на дискриминантной кривой y=0 и не выполняются, интегральные кривые общего решения не доходят до нее. Следовательно, условие единственности не нарушается. y=0 является частным решением. Графики общего и частного решения y=0 уравнения изображены на рисунке 1.7.

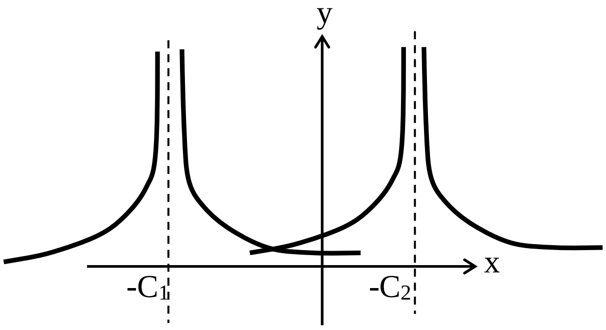

Рисунок 1.7. - Общее и частное решения уравнения $y'^2 - y^3 = 0$

Пример 13. Изучим решение уравнения $x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3$.

Его общее решение: $(y - C)^2 = (x - C)^3$.

Дискриминантную кривую определим, пользуясь системой:

$$\begin{cases} x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3, \\ 0 = \frac{8}{9}y' - \frac{8}{9}y'^2. \end{cases}$$

Получим две ветви $x - y = 0$, $x - y = \frac{4}{27}$. Из них только функция $x - y = \frac{4}{27}$ является решением дифференциального уравнения. Она является огибающей семейства полукубических парабол $(y - C)^2 = (x - C)^3$. Следовательно, $x - y = \frac{4}{27}$ - особое решение.

Вторая ветвь $x - y = 0$ не является решением дифференциального уравнения.

Графики общего решения и ветви дискриминантной кривой уравнения изображены на рисунке 1.8.

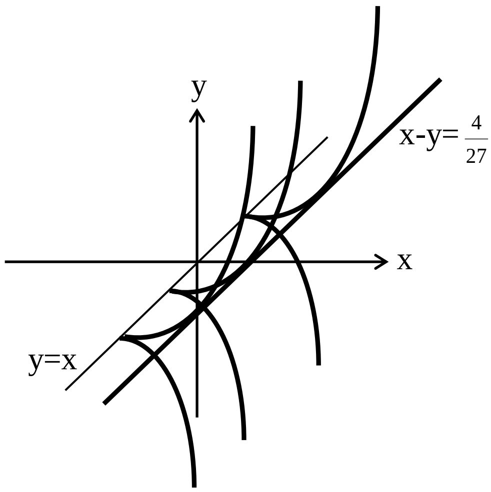

Рисунок 1.8. - Общее решение и две ветви дискриминантной кривой уравнения $x-y=\frac{4}{9}y'^2-\frac{8}{27}y'^3$

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. Решить неполные уравнения.

1.1. $y'^2-\ln y'^3-\cos y'=0$.

1.2. $y'^4=\dfrac{y'^3-\cos y'}{e^{y'}}$.

1.3. $x=y'^3+y'$.

1.4. $8y'^3=27y$.

1.5. $y=y'^2+2y'^3$.

1.6. $3y'^2-4e^{2x}y'+4ye^{2x}=0$.

2. Решить уравнения методом введения параметра.

2.1. $y=2xy'-4y'^3$.

2.2. $y = xy' - y'^2$

2.3. $xy'^2 = y' - \frac{3}{4}e^{-2y}$.

2.4. $y = 2xy' + y^2 y'^3$.

2.5. $6yy'^2 = 2xy'^3 + 3x^4$.

2.6. $y = -xy' + y'^2$.

2.7. $4yy' = xy'^2 + x^3$.

2.8. $x^2 y'^2 = xyy' + 1$.

2.9. $1 + yy' + y' \ln y' = xy'$.

2.10. $xy'^3 - yy'^2 + 4 = 0$.

3. Исследовать уравнения из заданий 1 и 2 на наличие дискриминантной кривой. Выяснить являются ли ветви дискриминантной кривой решениями уравнений. При возможности найти огибающую.

Контрольные вопросы.

1. Какие дифференциальные уравнения называются неразрешенными относительно производной?

2. Какой общий вид дифференциальных уравнений n-ой степени относительно производной? Как они интегрируются? Какие особенности составления частных решений таких уравнений?

3. Какого типа бывают неполные уравнения, неразрешенные относительно производной?

4. Как решаются уравнения, в которых отсутствуют x и y?

5. Как решаются уравнения в которых отсутствуют либо x либо y? Каковы условия выбора функции для введения параметра?

6. Как используется метод введения параметры в случае полного уравнения?

7. Каков общий вид уравнений Лагранжа и Клеро? Каковы их особенности решения?

8. В чем особенность исследования единственности решения задачи Коши для уравнения, неразрешенного относительно производной?

9. Сформулируйте и докажите теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения, неразрешенного относительно производной.

10. Что такое дискриминантная кривая дифференциального уравнения? Как найти уравнение дискриминантной кривой?

11. Что такое огибающая семейства функций? Как найти уравнение огибающей?

2 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

2.1 Уравнения, допускающие понижение порядка.

Дифференциальное уравнение n-ого порядка: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Дифференциальное уравнение n-ого порядка, разрешенное относительно старшей производной: $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$.

Задача Коши для дифференциального уравнения n-ого порядка: $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка: $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Геометрический смысл задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка: найти интегральную кривую, проходящую через точку с координатами (x_0, y_0) и имеющую в этой точке угловой коэффициент $tg\alpha = y_0'$.

Механический смысл задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка: найти закон движения, по которому в начальный момент времени точка имела координаты (x_0, y_0) и скорость $v = y_0'$.

Неполные уравнения высшего порядка:

1) Отсутствует неизвестная функция y и (n-1) ее производных: $y^{(n)} = f(x)$. Решается последовательным интегрированием:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\int f(x)dxdx + C_1 x + C_2,$$

...

$$y = \underbrace{\int\int...\int}_{n\ \text{раз}} f(x)dxdx...dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_{n-1}x + C_n.$$

Пример 1. Решим задачу Коши: $\frac{d^3y}{dx^3} = \ln x$, $y(1) = 1, y'(1) = 0, y''(1) = 0.$

Последовательно интегрируем уравнение и подставляем начальные условия:

$$y''' = \ln x,$$

$$y'' = \int \ln x dx + C_1 = x\ln x - x + C_1,\ 0 = \ln 1 - 1 + C_1,\ C_1 = 1.$$

$$y' = \int\left(x\ln x - x + 1\right)dx + C_2 = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} + x + C_2,$$

$$0 = \frac{\ln 1}{2} - \frac{3}{4} + 1 + C_2,\ C_2 = -\frac{1}{4}.$$

$$y=\int\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{3x^2}{4}+x-\frac{1}{4}\right)dx+C_3=\frac{x^3\ln x}{6}-\frac{11x^3}{36}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+C_3,$$

$$1=\frac{\ln 1}{6}-\frac{11}{36}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+C_3,\ C_3=\frac{1}{2}.$$

$$y==\frac{x^3\ln x}{6}-\frac{11x^3}{36}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}.$$

2) Отсутствуют неизвестная функция y и k-1 первых производных: $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)})=0$. Заменой $y^{(k)}=z(x)$, $y^{(k+1)}=z'$, …, $y^{(n)}=z^{(n-k)}$ порядок понижается на k: $F(x,z,z',...,z^{(n-k)})=0$.

Пусть $\Phi(x,z,C_1,C_2,...,C_{n-k})=0$ - общее решение полученного в результате замены уравнения. Возвращаясь к исходной неизвестной функции, получим уравнение k-го порядка: $\Phi(x,y^{(k)},C_1,C_2,...,C_{n-k})=0$ - уравнение типа 1).

Пример 2. Решим уравнение $y'=xy''-y''^2$. Отсутствует неизвестная функция y. Сделаем замену: $z=y'$, $z'=y''$, позволяющую понизить порядок уравнения до первого: $z=xz'-z'^2$.

Общее и особое решения полученного уравнения (уравнение Клеро):

$z=xC_1-C_1{}^2$ и $z=\dfrac{x^2}{4}$.

Возвращаясь к исходной функции, получим два уравнения:

$y'=xC_1-C_1{}^2$ и $y'=\dfrac{x^2}{4}$, решения которых:

$y=\dfrac{C_1}{2}x^2-C_1^2x+C_2$ - общее решение исходного уравнения,

$y=\dfrac{x^3}{12}+C$ - особые решения исходного уравнения.

3) Отсутствуют переменная x: $F(y,y',y'',...,y^{(n)})=0$. Заменой: $y'=z(y)$, $y''=z\cdot z'$, $y'''=z^2z''+z\left(z'\right)^2$,… порядок уравнения понижается на единицу: $F\left[y,z,zz',...,\omega\left(z,z',z',...,z^{(n-1)}\right)\right]=0$.

Пусть $\Phi(y,z,C_1,...,C_{n-1})=0$ - общее решение полученного в результате замены уравнения. Возвращаясь к исходной неизвестной функции, получим уравнение первого порядка: $\Phi(y,y',C_1,...,C_{n-1})=0$.

Пример 3. Решим уравнение $y''=yy'-y'^2$. Отсутствуют переменная x. Сделаем замену: $y'=z(y)$, $y''=z\cdot z'$, позволяющую понизить порядок уравнения до первого: $zz'=yz-z^2$.

Общее решение полученного уравнения (линейное неоднородное уравнение первого порядка): $z=C_1e^{-y}+y-1$, особое решение: $z=0$.

Возвращаясь к исходной функции, получим два уравнения:

$y'=C_1e^{-y}+y-1$ и $y'=0$, решения которых:

$\int\frac{dy}{C_1e^{-y}+y-1}=x+C_2$ - общее решение исходного уравнения,

$y=C$ - особые решения исходного уравнения.

4) Однородные уравнения высшего порядка $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$, где F - однородная функция аргументов $y,y',...,y^{(n)}$:

$F(x,ky,ky',...,ky^{(n)})=k^mF(x,y,y',...,y^{(n)})$, m – степень однородности.

Заменой $y'=yz$, $y''=y'z+yz'=y(z^2+z')$, $y'''=y(z^3+3zz'+z'')$, …, $y^{(n)}=yw(z,z',..,z^{(n-1)})$ порядок уравнения понижается на единицу:

$y^mF(x,1,z,z^2+z',...,w(z,z',..,z^{(n-1)}))=0$ - уравнение n-1 порядка.

Пусть $z=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_{n-1})$ общее решение полученного в результате замены уравнения. Возвращаясь к исходной неизвестной функции, получим уравнение первого порядка: $y' = y\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$, общее решение которого $y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})dx}$.

Пример 4. Решим уравнение $yy'' = y'^2 + 6xy^2$**.** Проверим его на однородность:

$$ky \cdot ky'' = (ky')^2 + 6x(ky)^2,$$

$k^2(yy'') = k^2\left(y'^2 + 6xy^2\right)$ - однородность второй степени.

Сделаем замену: $y' = yz$, $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$, позволяющую понизить порядок уравнения до первого: $y \cdot y(z^2 + z') = y^2z^2 + 6xy^2$.

Общее решение полученного уравнения (уравнение с разделяющимися переменными): $z = 3x^2 + C_1$.

Возвращаясь к исходной функции, получим уравнение с разделяющимися переменными: $y' = y\left(3x^2 + C_1\right)$, его общее решение: $y = C_2 e^{x^3 + C_1 x}$.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. Определив тип уравнения, решить.

1.1. $y''' = -\cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

1.2. $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$.

1.3. $2xy'' + y''' = 0$.

1.4. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

1.5. $y''' = xe^{-x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 2$.

1.6. $y''(2y + 3) - 2y'^2 = 0$.

1.7. $(1-x^2)y''-xy'=2$.

1.8. $yy''=15y^2\sqrt{x}+y'^2$.

1.9. $yy''-y'^2=0$.

1.10. $xy''=y'+x\sin\dfrac{y'}{x}$.

Контрольные вопросы.

1. Как решается уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$?

2. Сформулируйте и докажите лемму Коши о замене n-кратного интеграла на однократный.

3. Как решается уравнение вида $F(y^{(n)}, x)=0$?

4. Как решается уравнение вида $F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}\right)=0$?

5. Как решается уравнение вида $F\left(y^{(n)}, y^{(n-2)}\right)=0$?

6. Как понизить порядок уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)})=0$?

7. Как понизить порядок уравнения вида $F(y, y', y'',\ldots,y^{(n)})=0$?

8. Как понизить порядок однородного уравнения вида $F(x, y, y',\ldots,y^{(n)})=0$, где F однородная функция относительно аргументов $y, y',\ldots,y^{(n)}$?

9. Как понизить порядок однородного уравнения вида $F(x, y, y',\ldots,y^{(n)})=0$, где F однородная функция относительно аргументов $x, y, dx, dy, d^2y,\ldots,d^n y$?

10. Какое уравнение n-го порядка называется обобщенным однородным? Какой подстановкой оно приводится к неполному уравнению?

11. Какие уравнения называются уравнениями в точных производных и как понижается порядок таких уравнений?

2.2 Общая теория линейных дифференциальных уравнений порядка *n*.

Линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n: $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0$.

Функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$, определенные в интервале $[a,b]$, называются ***линейно-зависимыми*** в этом интервале, если существую постоянные $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, не все одновременно равные 0, так что $\forall x\in[a,b]$ выполняется: $\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(x)=0$. Если таких $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ не существует, то $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$ – ***линейно-независимы.***

Пример 1. Докажем, что если одна из функций $\varphi_i(x)\equiv 0$, то функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$ линейно-зависимы. Действительно, пусть например $\varphi_n(x)\equiv 0$, тогда возьмем $\alpha_i=0, i=1,2,\ldots,n-1$, а $\alpha_n\neq 0$, имеем: $\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(x)=\alpha_n\varphi_n(x)=0,\ \forall x.$

Пример 2. Докажем, что функции $1,x,x^2,\ldots,x^n$ – линейно-независимы. Допустим, что существует набор $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, таких, что выполняется

$$\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\ldots+\alpha_nx^n=0. \qquad (1)$$

(1) является алгебраическим уравнением степени *n*, следовательно имеет не более *n* корней, а значит справедливо не для любого *x*.

Пример 3. Докажем, что функции $x^{k_1},x^{k_2},\ldots,x^{k_n}$ при $k_1,k_2,\ldots,k_n\in R,\ k_1<k_2<\ldots<k_n$ линейно-независимы. Допустим, что существует набор $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, таких, что

$$\alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \alpha_3 x^{k_3} + \ldots + \alpha_n x^{k_n} = 0,\ \forall x>0. \tag{2}$$

Умножим (2) на x^{-k_1}:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x^{k_2-k_1} + \alpha_3 x^{k_3-k_1} + \ldots + \alpha_n x^{k_n-k_1} = 0. \tag{3}$$

Перейдем в (3) к пределу при $x \to 0$, получим $\alpha_1 = 0$.

Умножив (2) на x^{-k_2} и перейдя к пределу при $x \to 0$, получим $\alpha_2 = 0$.

Таким образом, получим $\alpha_i = 0$, $\forall i$.

Пример 4. Докажем, что функции $\varphi_1(x) = \sin^2 x, \varphi_2(x) = \cos^2 x, \varphi_3(x) = 1$ линейно-зависимы. Возьмем, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1,$ тогда $\forall x$ справедливо $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$.

Пусть имеется n функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, имеющих непрерывные производные до (n-1) порядка, тогда определитель

$$W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{4}$$

называется ***определителем Вронского*** **(*Вронскианом*).**

Теоремы об определителе Вронского.

Теорема 1.1 Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно-зависимы, то $W(x) \equiv 0$.

Теорема 1.2 Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно-независимые в интервале $[a,b]$ решения линейного однородного дифференциального уравнения порядка n, то $W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0$ ни в одной точке интервала $[a,b]$.

Пример 5. Даны два частных решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - y = 0$: $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$. Составляют ли они фундаментальную систему решений?

Проверим линейную независимость данных решений, используя теоремы об определителе Вронского. Составим определитель Вронского по формуле (4): $W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Согласно теореме 1.2. $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ линейно-независимы и следовательно составляют фундаментальную систему решений заданного уравнения.

Любая система из n линейно-независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n называется ***фундаментальной системой решений***.

Теоремы о фундаментальной системе решений.

Теорема 2.1. Для любого линейного однородного дифференциального уравнения порядка n существует фундаментальная система решений.

Теорема 2.2. Если $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ образуют фундаментальную систему, то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения порядка n задается формулой: $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$.

Пример 6. Согласно теоремам о фундаментальной системе решений общее решение уравнения из примера 5 можно записать как $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Теоремы о построении линейного однородного дифференциального уравнения порядка n по фундаментальной системе решений.

Теорема 3.1. Если имеется n+1 частных решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n $y_1(x), y_2(x), ..., y_{n+1}(x)$, то между ними существует линейная зависимость.

Теорема 3.2. Если два линейных однородных дифференциальных уравнения порядка n: $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0$ и $y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + ... + q_n(x)y = 0$ имеют общую фундаментальную систему решений, то они тождественны между собой: $p_i(x) \equiv q_i(x)$, $\forall i = \overline{1, n}$.

Следствие. Фундаментальная система вполне определяет линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n.

Для построения линейного однородного дифференциального уравнения порядка n по известной фундаментальной системе решений $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ приравняем к нулю определитель:

$$W[y_1, y_2, ..., y_n, y] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n & y \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' & y' \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Пример 7. Построим линейное однородное дифференциальное уравнение по известной фундаментальной системе решений $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$. Воспользовавшись формулой (5), получим уравнение третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & y \\ 1 & 2x & 3x^3 & y' \\ 0 & 2 & 6x & y'' \\ 0 & 0 & 6 & y''' \end{vmatrix} = 0,$$

$$y'''\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} - y''\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} + y'\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$y'''\left[6x(2x^2 - x^2) - 2(3x^3 - x^3)\right] - y''\left[6x(2x^2 - x^2)\right] + y'\left[6 \cdot 2x\right] - y\left[6 \cdot 2\right] = 0,$$

$$2x^3 y''' - 6x^2 y'' + 12xy' - 12y = 0.$$

Для уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ справедлива формула ***Лиувилля-Остроградского:***

$$W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}. \qquad (6)$$

Формула (6) может применяться для нахождения общего решения уравнения второго порядка по одному известному частному решению.

Пример 8. Для уравнения $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ известно одно частное решение $y_1 = x$. Найти его общее решение, используя формулу Лиувилля-Остроградского.

Преобразуем данное уравнение: $y'' - \dfrac{2x}{1 - x^2}y' + \dfrac{2}{1 - x^2}y = 0$.

Следовательно, $p_1(x) = -\dfrac{2x}{1 - x^2}$.

Воспользуемся формулой (6):

$$\begin{vmatrix} x & y(x) \\ 1 & y'(x) \end{vmatrix} = C_1 e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx},$$

$$\frac{xy'(x) - y(x)}{x^2} = \frac{C_1 e^{-\ln\left|1-x^2\right|}}{x^2},$$

$$\left(\frac{y(x)}{x}\right)' = \frac{C_1}{x^2\left(1 - x^2\right)},$$

$$\frac{y(x)}{x} = C_1 \int \frac{dx}{x^2\left(1 - x^2\right)} + C_2,$$

$$y(x) = C_1 x\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x}\right) + C_2 x,$$

$$y(x) = \frac{C_1 x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - C_1 + C_2 x.$$

Если частное решение неизвестно его можно попробовать найти путем подбора.

Пример 9. Найти частное решение уравнения $\left(1-2x^2\right)y'' + 2y' + 4y = 0$, являющееся многочленом.

Сначала найдем степень многочлена

$$y = x^n + \ldots. \tag{7}$$

Подставляем (7) в исходное уравнение:

$$\left(1-2x^2\right)\left(n(n-1)x^{n-2} + \ldots\right) + 2\left(nx^{n-1} + \ldots\right) + 4\left(x^n + \ldots\right) = 0.$$

Выписываем коэффициенты при старшей степени *x*:

$$-2n(n-1) + 4 = 0.$$

Решения последнего уравнения: $n_1 = 2$ и $n_2 = -1$. Второй корень не годен (степень многочлена - целое положительное число). Следовательно, частное решение это многочлен второй степени. Ищем его в виде:

$$y = x^2 + Ax + B. \tag{8}$$

Подставляем (8) в исходное уравнение:

$$\left(1-2x^2\right)\cdot 2 + 2\left(2x + A\right) + 4\left(x^2 + Ax + B\right) = 0.$$

Выписываем коэффициенты при одинаковых степенях *x*:

x^1: $4 + 4A = 0,$

x^0: $2 + 2A + 4B = 0.$

Отсюда $A = -1,\ B = 0$.

Итак, частное решение исходного уравнения $y_1 = x^2 - x$.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. Проверить с помощью теорем о вронскиане линейную независимость данных функций. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение наибольшего порядка, фундаментальная система которого содержит данные функции.

1.1. $y_1 = 1, y_2 = \cos x$,

1.2. $y_1 = shx, y_2 = chx, y_3 = 2e^x - 1, y_4 = 3e^x + 5$,

1.3. $y_1 = x, y_2 = x \ln x$,

1.4. $y_1 = x^2 - x + 3, y_2 = 2x^2 + x, y_3 = 2x - 4$,

1.5. $y_1 = x^2 - 2x + 2, y_2 = (x-2)^2,\ y_3 = x^2 + x - 1, y_4 = 1 - x$.

2. Найти общее решение, используя формулу Лиувилля-Остроградского (если частное решение не дано, подобрать его в виде $y_1 = e^{\alpha x}$ или $y_1 = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$).

2.1. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0, y_1 = 1 + \dfrac{1}{x}$,

2.2. $(x^2+1)y'' - 2y = 0$,

2.3. $xy'' + 2y' - xy = 0,\ y_1 = \dfrac{e^x}{x}$,

2.4. $y'' + 2xy' - 2y = 0$,

2.5. $x(2x+1)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0$.

Контрольные вопросы.

1. В каком случае функции являются линейно зависимыми?
2. Какой определитель называется определителем Вронского?

3. Сформулируйте и докажите теоремы об определителе Вронского.

4. Что называют фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n?

5. Сформулируйте и докажите теоремы о фундаментальной системе.

6. Сформулируйте и докажите теоремы о построении линейного однородного дифференциального уравнения порядка n по фундаментальной системе решений.

7. По какой формуле записать линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n, если известна его фундаментальная система решений?

8. Запишите формулу Лиувилля-Остроградского для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

9. Как найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка по известному частному решению, используя формулу Лиувилля-Остроградского?

2.3 Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение фундаментальной системы решений.

Линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами: $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0$ ($p_i \equiv const$).

Общее решение:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \tag{9}$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ - ***фундаментальная система решений***.

Для составления элементов фундаментальной системы решений y_j:

I. Решаем ***характеристическое уравнение:***

$k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1}k + p_n = 0$.

II. Для каждого корня характеристического уравнения k_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ составляем элемент фундаментальной системы решений (частное решение) y_j, используя следующие формулы:

1) если k_j - простой корень, то ему соответствует одно решение $y_j = e^{k_j x}$;

2) если k_j - кратный корень кратности *s*, то ему соответствует *s* решений $y_{j_1} = e^{k_j x}$, $y_{j_2} = xe^{k_j x}$, $y_{j_3} = x^2 e^{k_j x}$, $\ldots, y_{j_s} = x^{s-1} e^{k_j x}$;

3) если $k_j = \alpha + i\beta,\ k_{j+1} = \alpha - i\beta$ - пара комплексно сопряженных корней, то им соответствует пара решений $y_j = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_{j+1} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

4) если $k_j = \alpha + i\beta,\ k_{j+1} = \alpha - i\beta$ - *s*-кратная пара комплексно сопряженных корней, то им соответствует *s* пар решений $y_{j_1} = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $y_{j_1+1} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $y_{j_2} = xe^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $y_{j_2+1} = xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots,\ y_{j_s} = x^{s-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_{j_s+1} = x^{s-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

Пример 1. Решим уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$. Его характеристическое уравнение: $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет два простых корня $k_1 = 1,\ k_2 = 2$. Используя формулы из п. 1), составим фундаментальную систему решений: $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$. Общее решение исходного уравнения составим по формуле (9): $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Пример 2. Решим уравнение $y''' - 2y'' + y' = 0$. Его характеристическое уравнение: $k(k-1)^2 = 0$ имеет один простой корень

$k_1 = 0$ и один двукратный корень $k_2 = k_3 = 1$. Используя формулы из п. 1), составим частное решение для простого корня: $y_1 = 1$. По формулам из п. 2) составим два частных решения для двукратного корня: $y_2 = e^x, y_3 = xe^x$. Общее решение исходного уравнения составим по формуле (9): $y = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x$.

Пример 3. Решим уравнение $y''' + 2y'' + 2y' = 0$. Его характеристическое уравнение: $k\left(k^2 + 2k + 2\right) = 0$ имеет один простой корень $k_1 = 0$ и два комплексно-сопряженных корня $k_2 = -1 + i$, $k_3 = -1 - i$. Используя формулы из п. 1), составим частное решение для простого корня: $y_1 = 1$. По формулам из п. 3) составим два частных решения для комплексно-сопряженной пары корней: $y_2 = e^{-x}\cos x, y_3 = e^{-x}\sin x$. Общее решение исходного уравнения составим по формуле (9): $y = C_1 + C_2e^{-x}\cos x + C_3e^{-x}\sin x$.

Пример 4. Решим уравнение $y^{(8)} - 2y^{(4)} + y = 0$. Его характеристическое уравнение: $\lambda^8 - 2\lambda^4 + 1 = 0$ или $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2\left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0$ имеет два действительных двукратных корня $k_1 = k_2 = 1$ и $k_3 = k_4 = -1$ и двукратную пару комплексно-сопряженных корней $k_{5,6} = k_{7,8} = \pm i$. Используя формулы из п. 2), составим частные решение для действительных кратных корней: $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = e^{-x}$, $y_4 = xe^{-x}$. По формулам из п. 4) составим частные решения для двукратной комплексно-сопряженной пары корней: $y_5 = \cos x$, $y_6 = \sin x$, $y_7 = x\cos x$, $y_8 = x\sin x$. Общее решение исходного уравнения составим по формуле (9): $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 \cos x + C_6 \sin x + C_7 x \cos x + C_8 x \sin x$.

Некоторые линейные уравнения с переменными коэффициентами после замены приводятся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Уравнение Эйлера: $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$,

$(a_i \equiv const)$. ***Замена:*** $x = e^t$, $t = \ln x$, $\dfrac{dx}{dt} = e^t$, $\dfrac{dt}{dx} = e^{-t}$,

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}\left[e^{-t}\dfrac{dy}{dt}\right]e^{-t} = e^{-2t}\left[\dfrac{d^2 y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right], \ldots,$

$\dfrac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt}\left[\dfrac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \dfrac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \ldots + \alpha_{k-1}\dfrac{dy}{dt}\right]$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами, с характеристическим уравнением:

$$k(k-1)\ldots(k-n+1) + a_1 k(k-1)\ldots(k-n+2) + \ldots + a_n = 0. \qquad (10)$$

Уравнение Лагранжа

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = 0,$$

$(a_i \equiv const)$ приводится к уравнению постоянными коэффициентами заменой $ax + b = e^t$.

Пример 5. Решим уравнение $x^2 y'' - x y' + y = 0$.

делаем замену $x = e^t$, $\dfrac{dy}{dx} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t}\left[\dfrac{d^2 y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right]$:

$$e^{2t} e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - e^t e^{-t}\frac{dy}{dt} + y = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0,$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = 1,$$

$$y_1 = e^t, \ y_2 = te^t.$$

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t,$$

$$y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x.$$

В этом примере можно было сразу построить характеристическое уравнение по формуле (10): $k(k-1) - k + 1 = 0$.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. Решить линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами:

1.1. $y'' - 2y' + y = 0$.

1.2. $y'' + y = 0$.

1.3. $y'' + 3y' + 2y = 0$.

1.4. $y'' + 5y' + 6y = 0$.

1.5. $y'' + \dfrac{1}{4} y = 0$.

1.6. $y'' + 2y' + y = 0$.

1.7. $y'' + 4y = 0$.

1.8. $y'' - y = 0$.

1.9. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

1.10. $y'' - 2y' - 3y = 0$.

1.11. $y'' + y' - 2y = 0$.

1.12. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

1.13. $y'' + y' = 0$.

1.14. $y'' + y' - 2y = 0$.

1.15. $y'' - y' = 0$.

1.16. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

1.17. $y'' + 9y = 0$.

1.18. $y'' - 4y = 0$.

1.19. $y''' + y' = 0$.

1.20. $y''' + y = 0$.

1.21. $y''' - 2y'' + y' = 0$.

1.22. $y'' + 4y' + 3y = 0$.

1.23. $y'' - 2y' = 0$.

1.24. $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

1.25. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

1.26. $y''' - 8y = 0$.

1.27. $y^{IV} - y = 0$.

1.28. $y^{IV} + 4y = 0$.

1.29. $y^{IV} + 64y = 0$.

1.30. $4y'' + 4y' + y = 0$.

1.31. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

1.32. $y^{V} - 10y^{III} + 9y' = 0$.

1.33. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

1.34. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

1.35. $y''' - y'' - y' + y = 0$.

1.36. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.

1.37. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.

1.38. $y''' - 3y' + 2y = 0$.

1.39. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.

2. Решить уравнения Эйлера и Лагранжа:

2.1. $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

2.2. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0$.

2.3. $x^2 y'' - 6y = 0$.

2.4. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$.

2.5. $x^2 y'' + xy' - y = 0$.

2.7. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$.

2.8. $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$.

2.9. $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = 0$.

2.10. $(2x+3)^2 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$.

Контрольные вопросы.

1. Докажите, используя свойства дифференциального оператора, что функции $y_i = e^{k_i x}$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения $k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n \in R$.

2. Докажите, используя свойства дифференциального оператора, что функции $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$, $y_3 = x^2 e^{kx}$, ..., $y_m = x^{m-1} e^{kx}$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае m-кратного действительного корня характеристического уравнения k.

3. Докажите, используя свойства дифференциального оператора, что функции $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения $k = \alpha + i\beta$, $k^* = \alpha - i\beta$.

4. Докажите, используя свойства дифференциального оператора, что функции $y_j = x^{j-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_s = x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$, $j, s = \overline{1, r}$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае r-кратных комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения $k = \alpha + i\beta$, $k^* = \alpha - i\beta$.

2.4 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянных.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение порядка n: $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x)$. ***Соответствующее однородное уравнение***: $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0$.

Метод вариации постоянных.

Пусть $y_o = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ - общее решение соответствующего однородного уравнения. Общее решение неоднородного будем искать в виде: $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n$, где $C_i(x)$ - неизвестные функции, которые находим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \qquad (11)$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' + 4y = ctg 2x$.

Соответствующее однородное уравнение: $y'' + 4y = 0$. Его общее решение: $y_o = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Тогда решение исходного уравнения будем искать в виде: $y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$.

Составляем систему вида (11):

$$\begin{cases} C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x = 0, \\ C_1'(-2\sin 2x) + C_2'(2\cos 2x) = ctg 2x. \end{cases}$$

Решим ее методом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ ctg 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\cos 2x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & ctg 2x \end{vmatrix} = \frac{\cos^2 2x}{\sin 2x},$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2.$$

$$C_1(x) = \int \frac{-cos 2x}{2} dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \tilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos^2 2x}{2\sin 2x} dx + \tilde{C}_2 = \frac{1}{4}\left(\cos 2x + \ln|tgx|\right) + \tilde{C}_2.$$

Итак, общее решение исходного уравнения $y = \left(-\frac{1}{4}\sin 2x + \tilde{C}_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{4}\left(\cos 2x + \ln|tgx|\right) + \tilde{C}_2\right)\sin 2x$. Или

$$y = \tilde{C}_1 \cos 2x + \tilde{C}_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\ln|tgx|.$$

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

Решить уравнения

1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$,

2. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$,

3. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{(e^x + 1)}$,

4. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$,

5. $y'' \cos\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} y \cos\dfrac{x}{2} = 1$,

6. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

Контрольные вопросы.

1. Какое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением порядка n?

2. Как построить соответствующее однородное уравнение для линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка n?

3. В каком виде ищется решение линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка n методом вариации постоянных?

4. Как построить систему для нахождения неизвестных функций $C_i(x)$?

2.5. Метод неопределенных коэффициентов для линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка *n* с постоянными коэффициентами и специальными правыми частями.

Теорема. Общее решение на отрезке $x \in [a, b]$ уравнения $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x)$ с непрерывными на этом отрезке коэффициентами $p_i(x)$ и правой частью $f(x)$ равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения y^*: $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y^*$.

Частное решение y^* составляем по виду правой части уравнения $f(x)$, используя следующие формулы:

Если

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_{m_1}^{(1)}(x)\cos\beta x + P_{m_2}^{(2)}(x)\sin\beta x\right], \qquad (12)$$

где $P_{m_1}^{(1)}(x)$ и $P_{m_2}^{(2)}(x)$ - многочлены степеней m_1 и m_2 соответственно,

$\gamma = \alpha \pm i\beta$ называется **характеристическим числом правой части.**

Тогда

$$y^* = x^r e^{\alpha x}\left[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right], \qquad (13)$$

где r=0, если $\gamma = \alpha \pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения и равно кратности корня в противном случае.

$Q_m^{(1)}(x)$ и $Q_m^{(2)}(x)$ - многочлены с неопределенными коэффициентами степени $m = \max\{m_1, m_2\}$. Коэффициенты этих многочленов находим **методом неопределенных коэффициентов**, после подстановки y^* в исходное уравнение.

Пример 1. Решить уравнение $y''' - y'' - 4y' + 4y = -3e^x$ методом неопределенных коэффициентов.

Решаем соответствующее однородное уравнение

$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0,$

$k^3 - k^2 - 4k + 4 = 0$,

$k_1 = -2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$,

$y_o = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$.

Составим частное решение по правой части: $f(x) = -3e^x$.

Ориентируясь на формулу (12), имеем: $\gamma = 1$, $m = 0$, r=1. Итак, частное решение будем искать в виде (13): $y^* = xAe^x$, тогда

$y^{*\prime} = Ae^x + xAe^x$,

$y^{*\prime\prime} = 2Ae^x + xAe^x$,

$y^{*\prime\prime\prime} = 3Ae^x + xAe^x$.

Неопределенный коэффициент A найдем подстановкой частного решения в исходное уравнение:

$3Ae^x + xAe^x - \left(2Ae^x + xAe^x\right) - 4\left(Ae^x + xAe^x\right) + 4xAe^x = -3e^x$, откуда A=1.

Итак, общее решение исходного уравнения: $y = y_o + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + xe^x$

Пример 2. Решить уравнение $y''' - y'' - 4y' + 4y = -8(\cos 2x + 2\sin 2x)$ методом неопределенных коэффициентов.

$y_o = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$ (см. пример 1)

Составим частное решение по правой части: $f(x) = -8(\cos 2x + 2\sin 2x)$.

Ориентируясь на формулу (12), имеем: $\gamma = 2i$, $m = 0$, r=0. Итак, частное решение будем искать в виде (13): $y^* = B\cos 2x + C\sin 2x$, тогда

$y^{*\prime} = -2B\sin 2x + 2C\cos 2x$,

$y^{*''}=-4B\cos 2x-4C\sin 2x$,

$y^{*'''}=8B\sin 2x-8C\cos 2x$.

Неопределенные коэффициенты B и C найдем подстановкой частного решения в исходное уравнение:

$$8B\sin 2x-8C\cos 2x-\left(-4B\cos 2x-4C\sin 2x\right)-4\left(-2B\sin 2x+2C\cos 2x\right)+$$
$$+4\left(B\cos 2x+C\sin 2x\right)=-8(\cos 2x+2\sin 2x)$$

Приравниваем коэффициенты при синусах и при косинусах:

$\sin 2x:\ \ 8B+4C+8B+4C=-16$,

$\cos 2x:\ \ -8C+4B-8C+4B=-8$.

Откуда находим: B=-1, C=0.

Итак, общее решение исходного уравнения: $y=y_o+y^*=C_1e^{-2x}+C_2e^x+C_3e^{2x}-\cos 2x$.

Принцип суперпозиции. Если y_i^* – частные решения уравнений $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=f_i(x)$, $(i=\overline{1,m})$, то $y^*=y_1^*+y_2^*+...+y_m^*$, $\alpha_i=const$ является решением уравнения $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=f_1(x)+f_2(x)+...+f_m(x)$.

Пример 3. Решить уравнение

$y'''-y''-4y'+4y=-8(\cos 2x+2\sin 2x)-3e^x$ методом неопределенных коэффициентов.

Правая часть исходного уравнения представляет собой сумму двух функций $f_1(x)=-8(\cos 2x+2\sin 2x)$ и $f_2(x)=-3e^x$ с характеристическими числами $\gamma_1=2i$ и $\gamma_2=1$ соответственно.

Следовательно, согласно принципу суперпозиции будем искать частные решения отдельно для уравнений $y''' - y'' - 4y' + 4y = -8(\cos 2x + 2\sin 2x)$ (см. пример 2) и $y''' - y'' - 4y' + 4y = -3e^x$ (см. пример 1). Частное решение исходного уравнения составляется как их сумма: $y^* = -\cos 2x + xe^x$.

Итак, общее решение исходного уравнения: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + C_3e^{2x} - \cos 2x + xe^x$.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

Решить уравнения методом неопределенных коэффициентов.

1. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$,
2. $y'' + y = 6\cos 2x + 3\sin 2x$,
3. $y'' - y = 2e^x - x^2$,
4. $y'' + 4y = \cos^2 x$,
5. $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$,
6. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$,
7. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$,
8. $y'' - y = e^x x\cos x$,
9. $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$,
10. $x^2y'' + 3xy' - 3y = -\dfrac{15}{2\sqrt{x}}$.

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте и докажите теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка n.

2. Докажите, что $y^* = Q_m(x)$ является частным решением уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = P_m(x)$, в случае если 0 не является корнем характеристического уравнения.

3. Докажите, что $y^* = x^r Q_m(x)$ является частным решением уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = P_m(x)$, в случае если 0 - r-кратный корень характеристического уравнения.

4. Докажите, что $y^* = e^{\alpha x} Q_m(x)$ является частным решением уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = e^{\alpha x} P_m(x)$, в случае если корень характеристического уравнения $k \neq \alpha$.

5. Докажите, что $y^* = x^r e^{\alpha x} Q_m(x)$ является частным решением уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = e^{\alpha x} P_m(x)$, в случае если $k = \alpha$ − r-кратный корень характеристического уравнения.

6. Докажите, что $y^* = x^r e^{\alpha x}\left\lfloor 2Q_m^*(x)\cos\beta x - 2Q_m^{**}\sin\beta x \right\rfloor$ является частным решением уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x)$, где $f(x) = e^{\alpha x}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_n^{(2)}(x)\sin\beta x]$, в случае если $\gamma = \alpha \pm i\beta$ является r-кратным корнем характеристического уравнения.

7. В чем заключается метод неопределенных коэффициентов для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка n со специальной правой частью?

8. Сформулируйте принцип суперпозиции. Как он используется для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка n со специальной правой частью?

3 СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Нормальная система дифференциальных уравнений. Метод исключения для решения систем дифференциальных уравнений.

Общий вид системы дифференциальных уравнений:

$$F_k\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(m_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(m_n)}\right) = 0, \quad k = 1, 2, ..., n \qquad (1)$$

Решением системы является система функций: $y_k = \varphi_k\left(x, C_1, ..., C_n\right)$, $k = 1, 2, ..., n$, обращающая каждое уравнение системы (1) в тождество.

Каноническая система дифференциальных уравнений:

$$y_k^{(m_k)} = f_k\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(m_2-1)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(m_n-1)}\right), \quad k = 1, 2, ..., n \qquad (2)$$

Нормальная система дифференциальных уравнений:

$$y_k' = f_k\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right), \quad k = 1, 2, ..., n \qquad (3)$$

Задача Коши $y_1(x_0) = y_1^{(0)}, y_2(x_0) = y_2^{(0)}, ..., y_n(x_0) = y_n^{(0)}$.

Теорема о замене канонической системы нормальной. Каноническую систему уравнений (2) можно заменить эквивалентной ей системой из $m_1+m_2+\ldots+m_n$ уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных всех искомых функций (нормальной системой (3)).

Теорема об эквивалентности нормальной системы и уравнения *n*-го порядка. Нормальная система из n дифференциальных уравнений эквивалентна дифференциальному уравнению n-го порядка.

Пример 1. Привести уравнение $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ к нормальной системе.

1) Вводим новые неизвестные функции: $y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y'',..., y_n = y^{(n-1)}$.

2) Составляем систему: $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3, \\ ..., \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$

Метод исключения для решения систем дифференциальных уравнений.

1) Выбираем любое уравнение системы (3) и дифференцируем n раз. Пусть, например, это будет первое уравнение системы:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n),$$

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n),$$

$$y_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + ... + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \cdot f_n = F_3(x, y_1, y_2, ..., y_n),$$

…

$$y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, ..., y_n),$$

$$y_1^{(n)} = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} \cdot f_1 + ... + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \cdot f_n.$$

2) Выражаем функции $y_2, ..., y_{n-1}, y_n$ через функцию, выбранного уравнения y_1, используя n-1 первых уравнений, полученных в п.1).

3) Подставляем полученные в п.2) выражения в n – ое уравнение, полученное в п.1).

Пример 1. Решим методом исключения систему второго порядка:
$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + x, \\ y_2' = 4y_1 - y_2 - 1. \end{cases}$$

1) Выбираем первое уравнение системы:

$$y_1{}' = 3y_1 - y_2 + x$$

и дифференцируем его один раз:

$$y_1{}'' = 3y_1{}' - y_2{}' + 1 = 3(3y_1 - y_2 + x) - (4y_1 - y_2 - 1) + 1 = 5y_1 - 2y_2 + 3x + 2,$$

2) Из первого уравнения п.1) выражаем: $y_2 = -y_1{}' + 3y_1 + x$.

3) Подставляем выражение для второй неизвестной функции, полученное в п.2) во второе уравнение п.1):

$$y_1{}'' = 5y_1 - 2\left(-y_1{}' + 3y_1 + x\right) + 3x + 2 = 2y_1{}' - y_1 + x + 2.$$

Итак, уравнение эквивалентное данной системе:

$$y_1{}'' - 2y_1{}' + y_1 = x + 2.$$

Решаем его и находим неизвестную функцию $y_1 = C_1e^x + C_2xe^x + x + 4$.

Затем, используя выражение п.2) находим вторую неизвестную функцию $y_2 = (2C_1 - C_2)e^x + 2C_2xe^x + 4x + 11.$

Совокупность этих функций является решением системы:

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^x + C_2xe^x + x + 4, \\ y_2 = (2C_1 - C_2)e^x + 2C_2xe^x + 4x + 11. \end{cases}$$

Замечание. Метод исключения неприменим в случае неразрешимости системы из п.1) относительно искомых неизвестных функций.

Условие разрешимости этой системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4)$$

Пример 2. Преобразовать систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 2e^{-t}, \\ \dot{y} = x + 2y - z - e^{-t}, \\ \dot{z} = x - y + 2z - 3e^{-t}. \end{cases}$ к эквивалентному уравнению.

Выберем для применения метода исключения первое уравнение исходной системы:

$\dot{x} = 2x - y + z - 2e^{-t} = f_1(x, y, z, t)$,

дифференцируем: $\ddot{x} = 2\dot{x} - \dot{y} + \dot{z} + 2e^{-t}$,

подставляем значения производных из системы:

$\ddot{x} = 2\left(2x - y + z - 2e^{-t}\right) - \left(x + 2y - z - e^{-t}\right) + \left(x - y + 2z - 3e^{-t}\right) + 2e^{-t}$,

упрощаем: $\ddot{x} = 4x - 5y + 5z - 4e^{-t} = F_2(x, y, z, t)$,

дифференцируем второй раз: $\dddot{x} = 4\dot{x} - 5\dot{y} + 5\dot{z} + 4e^{-t}$,

подставляем значения производных из системы:

$\dddot{x} = 4\left(2x - y + z - 2e^{-t}\right) - 5\left(x + 2y - z - e^{-t}\right) + 5\left(x - y + 2z - 3e^{-t}\right) + 4e^{-t}$,

упрощаем: $\dddot{x} = 8x - 19y + 19z - 14e^{-t}$.

Проверим условие разрешимости (4) относительно y и z полученной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 2e^{-t} = f_1(x, y, z, t), \\ \ddot{x} = 4x - 5y + 5z - 4e^{-t} = F_2(x, y, z, t). \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом условие разрешимости не выполняется и для применения метода исключения к исходной системе необходимо выбирать другое уравнение (не первое).

1. Решить методом исключения:

1.1. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^{t}, \\ \dot{y} = 5x - y - (2t+6)e^{t}. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 36t, \\ \dot{y} = -4x - 5y. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - y, \\ \dot{y} = x - 3y - 9e^{2t}. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 2e^{-t}, \\ \dot{y} = x + 2y - z - e^{-t}, \\ \dot{z} = x - y + 2z - 3e^{-t}. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} \dot{x} = y + 1, \\ \dot{y} = 2e^{t} - x. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - e^{-t}, \\ \dot{y} = -2x - 2y - e^{-t}. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - e^{-t}, \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + t, \\ \dot{y} = x - 2z - 3t^2, \\ \dot{z} = -y + 2z + 3t - 2. \end{cases}$

2. Решить системы, не приведенные к нормальному виду:

2.1. $\begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y, \\ \ddot{y} = x - 2y. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 2\dot{x} - 5\dot{y} = 4y - x, \\ 3\dot{x} - 4\dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} \ddot{x} = 2y, \\ \ddot{y} = -2x \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0. \end{cases}$

3. Решить задачи Коши:

3.1. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^t, \\ \dot{y} = -4x - 2y + te^t. \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$

3.2. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{2}y + 2x, \\ \dot{y} = -18x - 4y + 18te^{2t}. \end{cases}$ $x(0) = \dfrac{1}{3}y(0) = 2$

Контрольные вопросы.

1. Какой общий вид имеет система обыкновенных дифференциальных уравнений?

2. Какой вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется каноническим?

3. Какой вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется нормальным (формой Коши)?

4. Сформулируйте и докажите теорему о замене канонической системы нормальной.

5. Сформулируйте и докажите теорему об эквивалентности нормальной системы и уравнения n-го порядка.

6. Как выглядит условие разрешимости для метода исключений?

3.2. Метод Эйлера для однородных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Метод Эйлера применим только к ***однородной системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:***

$$y_i' = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

Общее решение системы (5) составляется следующим образом:

$$y_i = C_1 y_i^1 + C_2 y_i^2 + \ldots + C_2 y_i^n, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

где $C_i, \ i = 1,2,\ldots,n$ - произвольные постоянные,

$y_i^j, \ i, j = 1,2,\ldots,n$ - ***фундаментальная система решений*** системы (5).

Для построения фундаментальной системы решений составим матрицу системы (5):

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Далее составим ***характеристическое уравнение*** системы (5):

$$\left| M - \lambda_j E \right| = 0, \tag{8}$$

где M – матрица системы (7),

E – единичная матрица размерности n,

$\lambda_j, \ j = 1,2,\ldots,n$ - корни характеристического уравнения.

Для каждого корня характеристического уравнения составляется ровно один компонент фундаментальной системы решений. Правило составления элемента фундаментальной системы определяется типом соответствующего корня характеристического уравнения (8).

Правило составления компонентов фундаментальной системы:

1 случай λ_j - ***простой корень характеристического уравнения*** (8).

Для составления элемента фундаментальной системы, соответствующего простому корню характеристического уравнения (8) необходимо найти ***собственный вектор***. Для этого решаем систему уравнений:

$$\left(M-\lambda_j E\right)\cdot \bar{k}^{\,j}=0, \qquad (9)$$

где $\bar{k}^{\,j}=\begin{pmatrix} k_1^j \\ k_2^j \\ \ldots \\ k_n^j \end{pmatrix}$, $j=1,2,\ldots,n$ - собственный вектор, соответствующий характеристическому числу λ_j.

Итак, в случае простого характеристического числа λ_j, соответствующий ему э***лемент фундаментальной системы*** :

$$\bar{y}^{\,j}=\bar{k}^{\,j}e^{\lambda_j t},\ j=1,2,\ldots,n, \qquad (10)$$

где $\bar{y}^{\,j}=\begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \\ \ldots \\ y_n^j \end{pmatrix}$.

Пример 1. Решим систему $\begin{cases} \dot{x}=-6x+8y, \\ \dot{y}=-4x+6y \end{cases}$ методом Эйлера.

Матрица системы: $M = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение по формуле (8):

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 8 \\ -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 4 = 0,$$

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2.$$

Корни характеристического уравнения простые. Ищем собственные векторы.

Для нахождения собственного вектора корня $\lambda_1 = -2$ составим систему по формуле (9) и решим ее:

$$\begin{pmatrix} -6-(-2) & 8 \\ -4 & 6-(-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_2^1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} -4k_1^1 + 8k_2^1 = 0, \\ -4k_1^1 + 8k_2^1 = 0. \end{cases}$$

Полученная система линейных однородных уравнений имеет бесконечное число решений, так как ее определитель равен 0. Возьмем для составления собственного вектора любое нетривиальное решение, например, $\begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Составим элемент фундаментальной системы, соответствующий простому корню $\lambda_1 = -2$ по формуле (10):

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \text{ или } x_1 = 2e^{-2t},\ y_1 = e^{-2t}.$$

Аналогично найдем собственный вектор корня $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -6-2 & 8 \\ -4 & 6-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1^2 \\ k_2^2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} -8k_1^2 + 8k_2^2 = 0, \\ -4k_1^2 + 4k_2^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} k_1^2 \\ k_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

И элемент фундаментальной системы, соответствующий простому корню $\lambda_2 = 2$ по формуле (10):

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \text{ или } x_2 = e^{2t},\ y_2 = e^{2t}.$$

Общее решение системы составляем по формуле (6):

$$\begin{cases} x = C_1 x_1 + C_2 x_2, \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}, \\ y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

2 случай $\lambda_j = \alpha + i\beta,\ \lambda_{j+1} = \alpha - i\beta$ - ***пара комплексно сопряженных корней характеристического уравнения*.**

Для составления элементов фундаментальной системы, соответствующих паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения (8) также как и в случае 1 сначала находим ***собственный вектор*** любого корня из пары. Для этого решаем систему уравнений (9).

После этого строим промежуточные комплексные частные решения по формуле (10) (в случае использования характеристического корня λ_j):

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1^j \\ \tilde{y}_2^j \\ \dots \\ \tilde{y}_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^j \\ k_2^j \\ \dots \\ k_n^j \end{pmatrix} e^{\lambda_j t}, \ j = 1,2,\dots,n. \qquad (11)$$

Для построения действительных элементов фундаментальной системы раскладываем экспоненту в (11) по формуле Эйлера:

$$e^{i\beta t} = \cos\beta t + i\sin\beta t. \qquad (12)$$

После чего выделяем из получившегося комплексного выражения мнимую и действительную части – это и будут два элемента фундаментальной системы, соответствующие комплексно-сопряженной паре $\lambda_j = \alpha + i\beta,\ \lambda_{j+1} = \alpha - i\beta$:

$$y_i^j = \operatorname{Re}\tilde{y}_i^j, \quad y_i^{j+1} = \operatorname{Im}\tilde{y}_i^j, \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad (13)$$

Пример 2. Решим систему $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y, \\ \dot{y} = 3x - y \end{cases}$ методом Эйлера.

Матрица системы: $M = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

$$\lambda_1 = 2 + 3i,\ \lambda_2 = 2 - 3i.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные. Ищем собственный вектор, например для $\lambda_1 = 2 + 3i$. Для чего решаем систему:

$$\begin{pmatrix} 5-(2+3i) & -6 \\ 3 & -1-(2+3i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_2^1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases}(3-3i)k_1^1-6k_2^1=0,\\ 3k_1^1-(3+3i)k_2^1=0.\end{cases}$$

Полученная система линейных однородных уравнений имеет бесконечное число решений, так как ее определитель равен 0. Возьмем для составления собственного вектора любое нетривиальное решение, например, $\begin{pmatrix}k_1^1\\ k_2^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+i\\ 1\end{pmatrix}$.

Составим промежуточные комплексные частные решения по формуле (11):

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+i\\ 1\end{pmatrix}e^{(2+3i)t} \text{ или } \tilde{x}=\left(1+i\right)e^{(2+3i)t},\ \ \tilde{y}=e^{(2+3i)t}.$$

Раскладываем экспоненту по формуле (12):

$$\tilde{x}=\left(1+i\right)e^{2t}\left(\cos 3t+i\sin 3t\right)=e^{2t}\left(\cos 3t-\sin 3t\right)+ie^{2t}\left(\sin 3t+\cos 3t\right),$$
$$\tilde{y}=e^{2t}\left(\cos 3t+i\sin 3t\right)=e^{2t}\cos 3t+ie^{2t}\sin 3t.$$

Выделяя мнимую и действительную части, составляем фундаментальную систему решений:

$$x^1=\operatorname{Re}\tilde{x}=e^{2t}\left(\cos 3t-\sin 3t\right),\ \ x^2=\operatorname{Im}\tilde{x}=e^{2t}\left(\sin 3t+\cos 3t\right),$$
$$y^1=\operatorname{Re}\tilde{y}=e^{2t}\cos 3t,\quad y^2=\operatorname{Im}\tilde{y}=e^{2t}\sin 3t.$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases}x=C_1e^{2t}\left(\cos 3t-\sin 3t\right)+C_2e^{2t}\left(\sin 3t+\cos 3t\right),\\ y=C_1e^{2t}\cos 3t+C_2e^{2t}\sin 3t.\end{cases}$$

3 случай λ_j ***кратный корень характеристического уравнения кратности*** *m*.

Определяем ***ранг матрицы*** $\left(M-\lambda_jE\right)$: $r=\operatorname{rank}\left(M-\lambda_jE\right)$.

Пусть $P_{m-n+r}^{j}(t)$- многочлены с неопределенными коэффициентами.

Элемент фундаментальной системы составляем по формуле:

$$\overline{y}^{j}=\begin{pmatrix} P_{m-n+r}^{1}(t) \\ P_{m-n+r}^{2}(t) \\ \dots \\ P_{m-n+r}^{n}(t) \end{pmatrix} e^{\lambda_j t}, \; j=1,2,\dots,n. \qquad (14)$$

Коэффициенты многочленов определяем подстановкой решения в исходную систему уравнений.

Пример 3. Решим систему $\begin{cases} \dot{x}=-2x+y, \\ \dot{y}=-4x+2y. \end{cases}$ методом Эйлера.

Матрица системы: $M=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

$$\lambda^2=0,$$

$$\lambda_1=\lambda_2=0.$$

Характеристическое уравнение имеет корень $\lambda=0$ кратности m=2. Вычисляем ранг матрицы $\left(M-\lambda_j E\right)=\begin{pmatrix} -2-0 & 1 \\ -4 & 2-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Он равен 1: $r = \operatorname{rank}\left(M-\lambda_j E\right)=1$.

Следовательно, степень искомых многочленов: m-n+r=2-2+1=1.

Решение ищем по формуле (14):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2^1(t) \\ P_2^2(t) \end{pmatrix} e^{0\cdot t} = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов, подставляем решение в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 = -2\left(a_1 t + b_1\right) + a_2 t + b_2, \\ a_2 = -4\left(a_1 t + b_1\right) + 2\left(a_2 t + b_2\right). \end{cases}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t в каждом из уравнений:

$$t^0: \begin{cases} a_1 = -2b_1 + b_2, \\ a_2 = -4b_1 + 2b_2, \end{cases}$$

$$t^1: \begin{cases} 0 = -2a_1 + a_2, \\ 0 = -4a_1 + 2a_2. \end{cases}$$

Решаем уравнения. Два коэффициента должны быть свободными (исходная система второго порядка), поэтому положим $a_1 = C_1$ и $b_1 = C_2$ и выразим коэффициенты a_2 и b_2 через C_1 и C_2:

$$a_2 = 2C_1,$$

$$b_2 = C_1 + 2C_1.$$

Итак, общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 t + C_1 \\ 2C_1 t + C_1 + 2C_2 \end{pmatrix}.$$

Задание для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Решить методом Эйлера

1.1. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 6y, \\ \dot{y} = 8x + 9y. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8y, \\ \dot{y} = -4x + 6y. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 6y, \\ \dot{y} = 18x - 11y. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y, \\ \dot{y} = 10x + 7y. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 10y, \\ \dot{y} = 5x + 5y. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, \\ \dot{y} = -9x - 7y. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + z. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 8y + 6z, \\ \dot{y} = -4x + 10y + 6z, \\ \dot{z} = 4x - 8y - 4z. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y - 8z, \\ \dot{y} = 7x - 11y - 17z, \\ \dot{z} = -3x + 4y + 6z. \end{cases}$

1.10 $\begin{cases} \dot{x} = 9x - 6y - 2z, \\ \dot{y} = 18x - 12y - 3z, \\ \dot{z} = 18x - 9y - 6z. \end{cases}$

1.12 $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = 6x + 7y. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} \dot{x} = -12x - 8y, \\ \dot{y} = 20x + 12y. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

1.15 $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y, \\ \dot{y} = -16x - 2y. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -9x + 7y. \end{cases}$

1.17 $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = -x - y + 2z. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y + 9z, \\ \dot{y} = 10x + 9y - 10z, \\ \dot{z} = x + y + 3z. \end{cases}$

1.19 $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 7y + 4z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = -2x + 3y. \end{cases}$

1.20 $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 6y - 15z, \\ \dot{y} = x + y - 5z, \\ \dot{z} = x + 2y - 6z. \end{cases}$

Контрольные вопросы.

1. Какая система называется линейной однородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений?

2. Как построить общее решение линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений?

3. Как составить характеристическое уравнение линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений? Приведите обоснование его построения.

4. Как найти фундаментальную систему решений в случае простых корней характеристического уравнения? Приведите обоснование формул.

5. Как найти фундаментальную систему решений в случае комплексных корней характеристического уравнения? Приведите обоснование формул.

6. Как найти фундаментальную систему решений в случае кратных корней характеристического уравнения? Приведите обоснование формул.

3.3. Решение систем линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Система линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$y_i' = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{in}y_n + f_i(t), \quad i = 1,2,...,n. \tag{15}$$

Метод вариации постоянных.

Находим общее решение ***соответствующей однородной системы***:

$$y_i' = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{in}y_n, \quad i = 1,2,...,n, \tag{16}$$

$$y_i^{одн.} = C_1 y_i^1 + C_2 y_i^2 + ... + C_2 y_i^n, \quad i = 1,2,...,n.$$

Решение исходной системы ищем в виде:

$$y_i = C_1(x) y_i^1 + C_2(x) y_i^2 + ... + C_n(x) y_i^n, \quad i = 1,2,...,n, \tag{17}$$

где $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ - некоторые непрерывно дифференцируемые функции.

Для нахождения функций $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ подставляем (17) в исходную систему.

Пример 1. Решить методом вариации постоянных систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8y + 1, \\ \dot{y} = -4x + 6y - e^{2t}. \end{cases}$$

Решение соответствующей однородной системы: $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8y, \\ \dot{y} = -4x + 6y \end{cases}$

было найдено в примере 1 п. 3.2:

$$\begin{cases} x^{одн.} = 2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}, \\ y^{одн.} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

Решение исходной системы ищем в виде (17):

$$\begin{cases} x = 2C_1(t) e^{-2t} + C_2(t) e^{2t}, \\ y = C_1(t) e^{-2t} + C_2(t) e^{2t}. \end{cases} \tag{18}$$

Вычисляем производные функций (18):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\dot{C}_1(t) e^{-2t} - 4C_1(t) e^{-2t} + \dot{C}_2(t) e^{2t} + 2C_2(t) e^{2t}, \\ \dot{y} = \dot{C}_1(t) e^{-2t} - 2C_1(t) e^{-2t} + \dot{C}_2(t) e^{2t} + 2C_2(t) e^{2t}. \end{cases} \tag{19}$$

Для нахождения функций $C_1(t), C_2(t)$ подставляем (18-19) в исходную систему:

$$\begin{cases} 2\dot{C}_1 e^{-2t} - 4C_1 e^{-2t} + \dot{C}_2 e^{2t} + 2C_2 e^{2t} = -6\left(2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}\right) + 8\left(C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}\right) + 1, \\ \dot{C}_1 e^{-2t} - 2C_1 e^{-2t} + \dot{C}_2 e^{2t} + 2C_2 e^{2t} = -4\left(2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}\right) + 6\left(C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}\right) - e^{2t}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\dot{C}_1 e^{-2t} + \dot{C}_2 e^{2t} = 1, \\ \dot{C}_1 e^{-2t} + \dot{C}_2 e^{2t} = -e^{2t}. \end{cases} \tag{20}$$

Система (20) является линейной неоднородной системой относительно неизвестных $\dot{C}_1, \dot{C}_2$. Решим ее методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2e^{-2t} & e^{2t} \\ e^{-2t} & e^{2t} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{\dot{C}_1} = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{2t} + e^{4t},\ \Delta_{\dot{C}_2} = \begin{vmatrix} 2e^{-2t} & 1 \\ e^{-2t} & -e^{2t} \end{vmatrix} = -2 - e^{-2t}.$$

Итак, $\begin{cases} \dot{C}_1 = \dfrac{\Delta_{\dot{C}_1}}{\Delta} = e^{2t} + e^{4t}, \\ \dot{C}_2 = \dfrac{\Delta_{\dot{C}_2}}{\Delta} = -2 - e^{-2t}, \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 = \int\left(e^{2t} + e^{4t}\right)dt = \dfrac{e^{2t}}{2} + \dfrac{e^{4t}}{4} + \tilde{C}_1, \\ C_2 = -\int\left(2 + e^{-2t}\right)dt = -2t + \dfrac{e^{-2t}}{2} + \tilde{C}_2, \end{cases}$

Подставляя полученные выражения в решение (18), получаем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x = 2\tilde{C}_1 e^{-2t} + \tilde{C}_2 e^{2t} + \dfrac{3}{2} + \left(-2t + \dfrac{1}{2}\right)e^{2t}, \\ y = \tilde{C}_1 e^{-2t} + \tilde{C}_2 e^{2t} + 1 + \left(-2t + \dfrac{1}{4}\right)e^{2t}. \end{cases}$$

Метод неопределенных коэффициентов.

Находим общее решение соответствующей однородной системы (16).

Решение исходной системы ищем в виде:

$$y_i = C_1 y_i^1 + C_2 y_i^2 + \ldots + C_n y_i^n + y_i^*,\ \ i = 1,2,\ldots,n, \tag{21}$$

где y_i^* - частные решения исходной системы составляем в зависимости от вида функций $f_i(t)$ системы (15).

Если $f_i(t) = e^{\alpha t}\left[P_{m_1}^{(1)}(t)\cos\beta t + P_{m_2}^{(2)}(t)\sin\beta t\right],$ (22)

то $y_i^* = e^{\alpha x}\left[Q_{m+r}^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_{m+r}^{(2)}(x)\sin\beta x\right],$ (23)

где $m = \max\{m_1, m_2\}$,

$\gamma = \alpha \pm i\beta$ - ***характеристическое число правой части*** является r – кратным корнем характеристического уравнения.

Коэффициенты в многочленах $Q_{m+r}^{(1)}(t)$ и $Q_{m+r}^{(2)}(t)$ находим **методом неопределенных коэффициентов**, после подстановки y_i^* в исходную систему уравнений.

Если в уравнениях системы присутствуют функции $f_i(t)$, имеющие различные характеристические числа, то частные решения y_i^* составляются для каждой функции отдельно, и все прибавляются к общему решению однородной системы (принцип суперпозиции).

Пример 2. Решить методом неопределенных коэффициентов систему $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8y + 1, \\ \dot{y} = -4x + 6y - e^{2t}. \end{cases}$

Решение соответствующей однородной системы было найдено в примере 1 п. 3.2:

$$\begin{cases} x^{одн.} = 2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}, \\ y^{одн.} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

Решение исходной системы ищем в виде (21):

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + x^*, \\ y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + y^*. \end{cases} \tag{24}$$

В правых частях уравнений исходной системы стоят две функции:

$$f_1(t) = 1, \quad f_2(t) = -e^{2t}. \tag{25}$$

Характеристические числа, которых: $\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 2$.

Так как числа различны частные решения будем составлять отдельно для каждой функции (25), используя формулу (23):

Частные решения для функции $f_1(t)=1$:

$$\begin{cases} x_1^* = A_1, \\ y_1^* = A_2. \end{cases} \tag{26}$$

Частные решения для функции $f_2(t)=-e^{2t}$*:*

$$\begin{cases} x_2^* = (B_1 t + C_1)e^{2t}, \\ y_2^* = (B_2 t + C_2)e^{2t}. \end{cases} \tag{27}$$

Складывая частные решения (26) и (27), получаем выражение для частных решений исходной системы:

$$\begin{cases} x^* = A_1 + (B_1 t + C_1)e^{2t}, \\ y^* = A_2 + (B_2 t + C_2)e^{2t}. \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = B_1 e^{2t} + 2(B_1 t + C_1)e^{2t}, \\ \dot{y}^* = B_2 e^{2t} + 2(B_2 t + C_2)e^{2t}. \end{cases} \tag{29}$$

Подставляем (28, 29) в исходную систему:

$$\begin{cases} B_1 e^{2t} + 2(B_1 t + C_1)e^{2t} = -6\Big(A_1 + (B_1 t + C_1)e^{2t}\Big) + 8\Big(A_2 + (B_2 t + C_2)e^{2t}\Big) + 1, \\ B_2 e^{2t} + 2(B_2 t + C_2)e^{2t} = -4\Big(A_1 + (B_1 t + C_1)e^{2t}\Big) + 6\Big(A_2 + (B_2 t + C_2)e^{2t}\Big) - e^{2t}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 e^{2t} + 2B_1 te^{2t} + C_1 e^{2t} = -6A_1 - 6B_1 te^{2t} - 6C_1 e^{2t} + 8A_2 + B_2 te^{2t} + C_2 e^{2t} + 1, \\ B_2 e^{2t} + 2B_2 te^{2t} + 2C_2 e^{2t} = -4A_1 - 4B_1 te^{2t} - 4C_1 e^{2t} + 6A_2 + 6B_2 te^{2t} + 6C_2 e^{2t} - e^{2t}. \end{cases}$$

Применяем метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{r} t^0: \\ \\ te^{2t}: \\ \\ e^{2t}: \\ \\ \end{array} \begin{cases} 0 = -6A_1 + 8A_2 + 1, \\ 0 = -4A_1 + 6A_2, \\ 2B_1 = -6B_1 + 8B_2, \\ 2B_2 = -4B_1 + 6B_2, \\ B_1 + 2C_1 = -6C_1 + 8C_2, \\ B_2 + 2C_2 = -4C_1 + 6C_2 - 1. \end{cases}$$

Решая, последнюю систему находим коэффициенты частных решений:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{3}{2}, \\ A_2 = 1, \\ B_1 = -2, \\ B_2 = -2, \\ C_1 = \dfrac{1}{2}, \\ C_2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Подставляя найденные коэффициенты в (28), а (28) в (24), получаем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + \dfrac{3}{2} + \left(-2t + \dfrac{1}{2}\right) e^{2t}, \\ y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + 1 + \left(-2t + \dfrac{1}{4}\right) e^{2t}. \end{cases}$$

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Решить методом неопределенных коэффициентов:

1.1. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 36t, \\ \dot{y} = -4x - 5y. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^t, \\ \dot{y} = 5x - y - (2t + 6)e^t. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} \dot{x} = y + 1, \\ \dot{y} = 2e^t - x. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - e^{-t}, \\ \dot{y} = -2x - 2y - e^{-t}. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 2e^{-t}, \\ \dot{y} = x + 2y - z - e^{-t}, \\ \dot{z} = x - y + 2z - 3e^{-t}. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - y + 3, \\ \dot{y} = x - 3y - 9e^{2t}. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - e^{-t}, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + t, \\ \dot{y} = x - 2z - 3t^2, \\ \dot{z} = -y + 2z + 3t - 2. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -4x - 2y + te^{t}. \end{cases}$

2. Решить методом вариации постоянных

2.1. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y + \dfrac{1}{1+e^{t}}, \\ \dot{y} = -2x + 4y - \dfrac{1}{1+e^{t}}. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 6y + \dfrac{1}{\cos^3 3t}, \\ \dot{y} = 3x - 3y. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = -4x + y + \dfrac{1}{te^{t}}. \end{cases}$

Контрольные вопросы.

1. Какая система называется линейной неоднородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений?

2. Как построить общее решение линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом вариации постоянных?

3. Как построить общее решение линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом неопределенных коэффициентов?

4. УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная учебная литература

Романко, В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления : учебное пособие / В. К. Романко. — 4-е изд. (эл.). — Москва : Лаборатория знаний, 2015. — 347 с. — ISBN 978-5-9963-3013-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/70785.

Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению : учебное пособие / под редакцией В. К. Романко. — 5-е изд. (эл.). — Москва : Лаборатория знаний, 2015. — 222 с. — ISBN 978-5-9963-2662-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/70710.

Дополнительная учебная литература

Жабко, А. П. Дифференциальные уравнения и устойчивость : учебник / А. П. Жабко, Е. Д. Котина, О. Н. Чижова. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-1759-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/60651.

Бибиков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / Ю. Н. Бибиков. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2011. — 304 с. — ISBN 978-5-8114-1176-4. — Текст :

электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/1542.

Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения : учебное пособие / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 280 с. — ISBN 978-5-8114-4099-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/115196.