Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

А.В. Фомина

ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ

Методические рекомендации по изучению дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профиль: «Математика и Информатика»

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.88:511.11](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.131я73
Ф45

Фомина А.В.
Ф45 Числовые системы: методические рекомендации по изучению дисциплины для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профиль «Математика и информатика / А.В. Фомина; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2020 – 24 с.

В работе изложены методические рекомендации по изучению дисциплины «Числовые системы»: основные теоретические сведения, варианты контрольной работы, методические рекомендации к выполнению контрольной работы, примеры решения типовых заданий, критерии оценки учебной деятельности студента, список основной и дополнительной литературы.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль: «Математика и Информатика».

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 2 от 16.09.2020

И.о. заведующего каф. МФММ

__________/ Е.А. Вячкина

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 1 от 24.09.2020

Председатель методической комиссии ФИМЭ

__________/ Г.Н. Бойченко

УДК [378.147.88:511.11](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.131я73
Ф45

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические рекомендации адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлению подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль: «Математика и Информатика».

Понятие числа является одним из основных понятий в математике. Числа и их свойства изучаются в школьном курсе математики. Аксиомы теории числовых систем важны и составляют основу таких дисциплин, как алгебра, геометрия, математический анализ, логика. Изучение дисциплины «Числовые системы» формирует у студентов умение правильно рассуждать, выстраивать логические цепочки содержательных выводов из аксиом. Привычные представления об операциях над числами получают строгое обоснование.

Целью изучения дисциплины «Числовые системы» является формирование систематизированных знаний в области числовых систем и ее методов, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях, в школьном курсе математики.

Для достижения поставленной цели необходимо:

1) сформировать у студентов систематизированные знания о числах, исходя из аксиом;

2) создать научный фундамент для изучения чисел в школьной математике;

3) обучить студентов логическому научному мышлению при решении задач по числовым системам.

В методические рекомендации включено: основные теоретические сведения, варианты контрольной работы, методические рекомендации по выполнению контрольной работы, примеры решения типовых заданий, критерии оценки учебной деятельности студента по дисциплине, список основной и дополнительной литературы.

Теоретические сведения и приведенные примеры решения некоторых заданий представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям и выполнения контрольной работы.

Таким образом, данные методические материалы позволяют получить студенту целостное представление о содержании дисциплины «Числовые системы», подготовиться к практическим занятиям по данному курсу, успешно выполнить контрольную работу. Методические рекомендации могут оказаться полезными при написании курсовых и выпускных квалификационных работ, а также при прохождении производственной (педагогической) практики.

1. СИСТЕМА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Аксиомы Пеано.

Множество натуральных чисел N представляется в виде множества элементов, обозначаемых 1,2,3,4,... При этом для каждого элемента $x \in N$ определен элемент $x' \in N$, такой что $1' = 2,\ 2' = 3,\ 3' = 4, \ldots$ Такое взаимное расположение чисел можно охарактеризовать как «непосредственно следует за».

Рассмотрим аксиомы, описывающие натуральный ряд, которые называются аксиомами Пеано по имени итальянского математика Джузеппе Пеано (1858 – 1932).

Аксиома 1. (P_1)

Во множестве N существует элемент, называемый *единицей*, который не следует ни за каким другим числом.

$(\exists\ 1 \in N)(\forall\ \mathrm{a} \in N)\ a' \neq 1.$

Аксиома 2. (P_2)

Для каждого элемента натурального ряда существует единственный элемент, следующий за ним.

$(\forall\ \mathrm{a} \in N)(\exists\, a' \in N)\ a = b \Rightarrow a' = b'.$

Аксиома 3. (P_3)

Каждый элемент N следует не более чем за одним элементом натурального ряда.

$a' = b' \Rightarrow a = b.$

Аксиома 4 (P_4*: Аксиома индукции).*

Если подмножество M множества N содержит в себе единицу, а также вместе с каждым своим элементом a содержит и следующий за ним элемент a', то M совпадает с N.

$$\left.\begin{array}{l} M \subseteq N, 1 \in M \\ a \in M \Rightarrow a' \in M \end{array}\right] \Rightarrow M = N.$$

Натуральным рядом называется система $\langle N,' \rangle$ с основным множеством N, элементы которого называются натуральными числами, бинарным отношением ‘ (штрих), которое записывается в виде $a = c'$ (a непосредственно следует за c), причем выполняются аксиомы Пеано.

Принцип полной математической индукции.

Теорема индукции. Пусть некоторое утверждение $T(n)$ сформулировано для всех натуральных чисел, и пусть а) $T(1)$ – истинно, б) из того, что $T(k)$ истинно, следует, что $T(k')$ также истинно. Тогда утверждение $T(n)$ справедливо для всех натуральных чисел.

Аксиома индукции позволяет создать метод доказательства теорем «по индукции». Данный метод играет ключевую роль при доказательстве основных теорем арифметики, касающихся натуральных чисел. Он состоит в следующем:

1) проверяется справедливость утверждения для $n=1$ ***(база индукции),***

2) предполагается справедливость этого утверждения для $n=k$, где k – произвольное натуральное число ***(индукционное предположение),*** и с учётом этого предположения устанавливается справедливость утверждения для $n= k'$ ***(индукционный шаг)***.

Доказательство, основанное на данном алгоритме, называется доказательством ***методом математической индукции***.

Сложением натуральных чисел называется бинарная операция +, определенная на множестве N и удовлетворяющая следующим двум аксиомам:

А): $m + 1 = m' \;\; \forall m \in N$,

В): $m + n' = (m+n)' \; \forall m, n \in N.$

Основные свойства сложения.

1. Сложение натуральных чисел ***ассоциативно***:
$(k+m)+n = k+(m+n) \forall k, m, n \in N.$

2. Сложение натуральных чисел ***коммутативно***:
$m + n = n + m \;\; \forall m, n \in N.$

3. Операция сложения натуральных чисел обладает свойством ***сократимости***:

если $k+n=m+n$, то $k=m \;\; \forall k,m,n \in N.$

Система $\langle A,*\rangle$ называется ***полугруппой***, если операция * ассоциативна. Если она и коммутативна, то полугруппа называется ***коммутативной***. Полугруппа $\langle A,*\rangle$ называется полугруппой ***с сокращением***, если операция * обладает свойством сократимости.

Если операция в полугруппе обозначается +, то она называется сложением, а сама полугруппа называется ***аддитивной.*** Если операция обозначается $\cdot$, то она называется умножением, а полугруппа называется ***мультипликативной.***

Сложением натуральных чисел называется бинарная операция $\cdot$, определенная на множестве N и удовлетворяющая следующим двум аксиомам:

C): $m \cdot 1 = m \;\; \forall m \in N$,

D): $m \cdot n' = m \cdot n + m \;\; \forall m,n \in N$.

Основные свойства умножения.

1. Умножение натуральных чисел ***дистрибутивно относительно сложения***:

$k \cdot (m+n) = km + kn \;\; \forall k,m,n \in N$; $(m+n) \cdot k = mk + nk \;\; \forall k,m,n \in N$.

2. Умножение натуральных чисел ***ассоциативно:***
   $(km) \cdot n = k \cdot (mn) \;\; \forall k,m,n \in N$.
3. Умножение натуральных чисел ***коммутативно:***
   $mn = nm \;\; \forall m,n \in N$.

Полукольцом называется система $\langle A,+,\cdot\rangle$, удовлетворяющая условиям:

1) сложение + ассоциативно и коммутативно, т.е. система $\langle A,+\rangle$ является коммутативной полугруппой;

2) умножение $\cdot$ ассоциативно, т.е. система $\langle A,\cdot\rangle$ является полугруппой;

3) умножение дистрибутивно относительно сложения.

Если умножение коммутативно, то полукольцо называется коммутативным.

Линейно упорядоченное множество натуральных чисел.

Будем говорить, что натуральное число a ***меньше***, чем натуральное число b (и обозначать $a < b$), если существует такое натуральное k, что $b=a+k$.

Система $\langle A,<\rangle$ называется ***линейно упорядоченным множеством***, если выполнены условия:

1) свойство трихотомии: $\forall a,b \in A$ имеет место только одно из следующих трёх утверждений: $a < b,\ a = b,\ b < a$.

2) свойство транзитивности: $\forall a,b,c \in A$ если $a < b,\ b < c$, то $a < c$.

При этом отношение < называется ***отношением линейного порядка***.

Теперь введем понятия >, ≤, ≥.

$a > b \Leftrightarrow b < a;$

$a \le b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$

$a \ge b \Leftrightarrow a > b \vee a = b.$

Рассмотрим ***свойства монотонности***:

1) для операции сложения:

$a < b \Rightarrow a + c < b + c;$

$a + c < b + c \Rightarrow a < b;$

$a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d.$

Эти свойства имеют место и для других знаков >, ≤, ≥.

2) для операции умножения:

$a < b \Rightarrow a\cdot c < b\cdot c;$

Закон сокращения: $ac = bc \Rightarrow a = b$

$ac < bc \Rightarrow a < b;$

$a < b \wedge c < d \Rightarrow ac < bd.$

Те же свойства имеют место и для других знаков >, ≤, ≥.

Различные виды доказательств по индукции.

При доказательстве ряда теорем можно использовать и следующие вариации принципа математической индукции.

1) ***Усиленный принцип полной математической индукции.***

Пусть некоторое утверждение $T(n)$ сформулировано для всех натуральных чисел, и пусть:

а) $T(1)$ – истинно,

б) из того, что $T(k)$ истинно для всех натуральных k меньших, чем некоторое натуральное m, следует, что $T(m)$ также истинно.

Тогда утверждение *T(n)* справедливо для всех натуральных чисел.

2) *Обобщённый принцип полной математической индукции.*

Пусть некоторое утверждение *T(n)* сформулировано для всех натуральных чисел $n \geq a$ (a – некоторое натуральное число), и пусть:

а) *T(a)* – истинно,

б) из того, что *T(k)* истинно для некоторого $k \geq a$, следует, что *T(k+1)* также истинно.

Тогда утверждение *T(n)* справедливо для всех натуральных чисел $n \geq a$.

3) *Обобщённый усиленный принцип полной математической индукции.*

Пусть некоторое утверждение *T(n)* сформулировано для всех натуральных чисел $n \geq a$ $(a \in N)$, и пусть:

а) T(a) – истинно,

б) из того, что *T(k)* истинно для всех натуральных k, таких что $a \leq k < m$ следует, что *T(m)* также истинно.

Тогда утверждение *T(n)* справедливо для всех натуральных чисел $n \geq a$.

Система $\langle K, +, \cdot, < \rangle$ называется ***упорядоченным полукольцом***, если выполнены следующие условия:

1) $\langle K, +, \cdot \rangle$ - полукольцо, содержащее более одного элемента;

2) $\langle K, < \rangle$ - линейно упорядоченное множество;

3) операции сложения и умножения монотонны.

2. СИСТЕМА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Система $\langle K, +, \cdot \rangle$ называется ***кольцом***, если выполнены следующие условия:

1) система $\langle K, + \rangle$ является коммутативной группой, т.е.

а) сложение $+$ ассоциативно и коммутативно;

б) $\exists 0 \in K$, называемый нулем, такой что $a + 0 = a \quad \forall a \in K$;

в) $\forall a \in K \quad \exists -a \in K$, называемый противоположным для a, такой что $a + (-a) = 0$;

2) система $\langle K, \cdot \rangle$ является полугруппой, т.е. умножение ассоциативно;

3) умножение дистрибутивно относительно сложения.

Если умножение в кольце коммутативно, то кольцо называется ***коммутативным***.

Системой целых чисел называется кольцо $\langle Z,+,\cdot\rangle$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) оно содержит полукольцо натуральных чисел $\langle N,+,\cdot\rangle$;

2) всякий элемент из Z принадлежит одному из подмножеств N, $\{0\}$, $-N=\{-n\,|\,n\in N\}$.

Элементы множества Z называются ***целыми числами***, а система $\langle Z,+,\cdot\rangle$ называется кольцом целых чисел.

Пусть дано кольцо $\langle K,+,\cdot\rangle$. Подмножество $H\subseteq K$ называется ***подкольцом,*** если выполнены условия:

1) H замкнуто относительно сложения и умножения, т.е. если $a,b\in H$, то $a+b\in H$ и $a\cdot b\in H$;

2) $0\in H$;

3) если $a\in H$, то $-a\in H$.

Определим $\forall a,b\in K$ $b-a$ как решение уравнения $a+x=b$. Отображение $K\times K\to K$, ставящее в соответствие всякой упорядоченной паре элементов (b,a) элемент $b-a$, называется ***вычитанием***, а элемент $b-a$ называется ***разностью*** элементов b и a.

Каждое целое число представимо в виде разности двух натуральных $z=b-a$. Сопоставим каждому целому числу z соответствующую пару (b,a).

Если выполняется условие:
$a-b=a_1-b_1\Leftrightarrow a+b_1=b+a_1$, то упорядоченные пары (a,b) и (a_1,b_1) изображают одно и то же целое число. Такие пары называют ***эквивалентным классом пар***, эквивалентных паре (a,b) и обозначают $\overline{(a,b)}$. Множество всех классов эквивалентных пар обозначают $\bar{Z}$, а всякий класс $\overline{(a,b)}$ называют ***целым числом***.

Введем понятия сложения и умножения классов пар на $\bar{Z}$:

1) $\overline{(a,b)}\oplus\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)}$;

2) $\overline{(a,b)} \otimes \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)}$.

Нейтральным элементом по сложению служит класс пар вида $\overline{(c,c)}$:

$\overline{(a,b)} \oplus \overline{(c,c)} = \overline{(a+c, b+c)} \cong \overline{(a,b)}$, так как $a+c+b=b+c+a$ (справедливо для любых натуральных чисел).

Кроме того, для каждого класса пар $\overline{(a,b)}$ имеется ***противоположный*** к нему. Таким классом будет класс $\overline{(b,a)}$.

Действительно, $\overline{(a,b)} + \overline{(b,a)} = \overline{(a+b, b+a)} = \overline{(a+b, a+b)} \cong \overline{(c,c)}$.

Упорядоченным кольцом называется система $\langle K, +, \cdot, < \rangle$, удовлетворяющая условиям:

1) $\langle K, +, \cdot \rangle$ - ненулевое кольцо;

2) $\langle K, < \rangle$ - линейно упорядоченное множество;

3) сложение и умножение монотонны.

3. СИСТЕМА РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Система $\langle P, +, \cdot \rangle$ называется ***полем***, если выполнены следующие условия:

1) система $\langle P, + \rangle$ является коммутативной группой, т.е.

а) сложение $+$ ассоциативно и коммутативно;

б) $\exists 0 \in P$, называемый нулем, такой что $a + 0 = a \;\; \forall a \in P$;

в) $\forall a \in P \;\; \exists -a \in P$, называемый противоположным для a, такой что $a + (-a) = 0$.

2) Если $P^* = P / \{0\}$, то система $\langle P^*, \cdot \rangle$ является коммутативной группой, т.е.

а) умножение ассоциативно и коммутативно;

б) $\exists e \in P^*$, называемый единицей, такой что $a \cdot e = a \;\; \forall a \in P^*$;

в) $\forall a \in P^*$ существует обратный элемент a^{-1} такой, что $a \cdot a^{-1} = e$.

3) Умножение дистрибутивно относительно сложения.

Пусть $\langle P, +, \cdot \rangle$ - поле; $a, b \in P$ и $b \neq 0$. Элемент $a \cdot b^{-1}$ называется ***отношением*** элементов a и b и записывается в виде $\dfrac{a}{b}$.

Системой рациональных чисел называется поле $\langle Q,+,\cdot\rangle$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) оно содержит кольцо целых чисел $\langle Z,+,\cdot\rangle$;

2) всякий элемент из Q представим в виде отношения целых чисел, т.е. $\forall q\in Q$ существуют $a,b\in Z$ такие, что $b\neq 0$ и $q=\dfrac{a}{b}$.

Элементы множества Q называются ***рациональными числами***, а система $\langle Q,+,\cdot\rangle$ называется полем рациональных чисел.

Подполем поля $\langle P,+,\cdot\rangle$ называется подмножество $H\subseteq P$ удовлетворяющее условиям:

1) H замкнуто относительно сложения и умножения, т.е. если $a,b\in H$, то $a+b\in H$ и $a\cdot b\in H$;

2) $0\in H$ и единица поля принадлежит H;

3) если $a\in H$, то $-a\in H$, и если, кроме того, $a\neq 0$, то $a^{-1}\in H$.

Рациональное число $\dfrac{a}{b}$ «смоделируем» в виде упорядоченной пары чисел (a,b), $a,b\in Z$. Класс, содержащий пару (a,b), обозначим $\overline{(a,b)}$.

Если выполняется условие:

$a\cdot b_1=b\cdot a_1$, то упорядоченные пары (a,b) и (a_1,b_1) изображают одно и то же рациональное число. Множество всех классов эквивалентных пар обозначают $\bar{Q}$, а всякий класс $\overline{(a,b)}$ называют ***рациональным числом***.

Введем понятия сложения и умножения классов пар на $\bar{Q}$:

1) $\overline{(a,b)}\oplus\overline{(c,d)}=\overline{(ad+bc,bd)}$;

2) $\overline{(a,b)}\otimes\overline{(c,d)}=\overline{(ac,bd)}$.

Для любых $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}\in Q$ положим $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow ad<bc$.

Упорядоченным полем называется система $\langle P,+,\cdot,<\rangle$, удовлетворяющая условиям:

1) $\langle P,+,\cdot\rangle$ - поле;

2) $\langle P,<\rangle$ - линейно упорядоченное множество;

3) сложение и умножение монотонны.

4. СИСТЕМА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим аксиоматическую теорию действительных чисел, опираясь на понятие предела фундаментальной последовательности.

Фундаментальная последовательность – это последовательность (a_n), удовлетворяющая условию, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что модуль разности между любыми двумя членами данной последовательности с номерами, большими, чем n_0, будет меньше, чем ε.

$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\, n_0 \in \mathbf{N})\ (\forall\, n, m > n_0)\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$

Теорема 1. Всякая сходящаяся последовательность в нормированном поле фундаментальна, но не всякая фундаментальная последовательность сходится.

Теорема 2. Если последовательность сходится, то у неё имеется только один предел.

Последовательность (x_n) называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что $|x_n| < M$.

Теорема 3. Всякая фундаментальная последовательность ограничена.

Последовательность называется ***стационарной***, если все её члены равны между собой. Стационарная последовательность является простейшим примером фундаментальной последовательности.

Упорядоченное поле называется ***Архимедовски упорядоченным***, если для любого элемента a данного поля и любого элемента данного поля $b > 0$, существует такое натуральное число n, что $a < bn$.

Аксиоматически множество ***действительных чисел*** определяется как Архимедовски упорядоченное поле, которое обладает ***свойством полноты*** (то есть любая фундаментальная последовательность в этом поле сходится). Поле действительных чисел обозначается символом $\boldsymbol{R}$.

Моделью множества действительных чисел служит множество классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел (две последовательности принадлежат к одному классу, если разность между соответствующими членами последовательности является бесконечно малой последовательностью, то есть последовательностью сходящейся к нулю).

Операция сложения фундаментальных последовательностей может быть задана по следующему правилу: суммой двух фундаментальных последовательностей *(a_n) + (b_n)* называется последовательность, все элементы которой есть суммы соответствующих элементов из складываемых последовательностей, то есть $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$.

Теорема 4. Сумма фундаментальных последовательностей есть снова последовательность фундаментальная.

Аналогично вводятся понятия разности и произведения фундаментальных последовательностей..

Теорема 5. Произведение фундаментальных последовательностей есть снова последовательность фундаментальная.

Для классов эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей определения операций вводятся аналогично.

Для доказательства того, что полученное множество классов фундаментальных последовательностей является полем, непосредственно проверяются все законы (они справедливы для рациональных чисел, а значит и для составленных из них фундаментальных последовательностей). Последовательность называется ***нулевой***, если все её члены сколь угодно малы по модулю (последовательность является бесконечно малой), то есть для любого ε, начиная с некоторого номера, $|a_n| < \varepsilon$. Сумма двух нулевых последовательностей есть последовательность нулевая, и произведение нулевой последовательности на любую фундаментальную последовательность также есть последовательность нулевая. Нулевая последовательность всегда является фундаментальной (так как она сходится к нулю, то есть имеет предел).

Последовательность называется ***положительной***, если существует такое положительное число K и такой натуральный номер, что все члены последовательности начиная с данного номера будут больше, чем K. Последовательность называется ***отрицательной***, если противоположная ей последовательность положительна.

Теорема 6. Всякая фундаментальная последовательность является либо положительной, либо отрицательной, либо нулевой.

Теорема 7 (об Архимедовской упорядоченности). Для любой фундаментальной последовательности (a_n) рациональных чисел, а также для любой положительной фундаментальной последовательности рациональных чисел $(b_n)>0$ существует такое натуральное число k, что при всех достаточно больших номерах n выполняется условие:

$a_n < kb_n$ или $(kb_n – a_n) > 0$.

Множество классов эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел есть ***Архимедовски упорядоченное поле***.

Если поставить в соответствие сходящимся последовательностям их рациональные пределы, а всем остальным фундаментальным последовательностям – некоторые новые символы, которые будут являться иррациональными числами, то мы получим модель поля действительных чисел.

Теорема 8. Для любого действительного числа α и для любого рационального $\varepsilon > 0$, существует такое рациональное число r, что $|\alpha - r| < \varepsilon$.

Теорема 9. Любая фундаментальная последовательность, составленная из классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел, сходится.

5. СИСТЕМА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Системой комплексных чисел называется минимальное поле, содержащее поле действительных чисел и элемент i, такой что $i^2 = -1$, т.е. система $\langle C,+,\cdot\rangle$ называется системой комплексных чисел, если выполнены условия:

1) $\langle C,+,\cdot\rangle$ - поле;
2) поле действительных чисел $\langle R,+,\cdot\rangle$ содержится в поле $\langle C,+,\cdot\rangle$;
3) существует $i \in C$ такой, что $i^2 = -1$;
4) если C_0 - подполе, содержащее R и i, то $C_0 = C$.

Всякий элемент из C называется ***комплексным числом***, а элемент i - ***мнимой единицей***.

Числовым полем называется всякое подполе поля комплексных чисел.

Представление комплексного числа в виде $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица, называется его ***алгебраической формой***, с действительной частью $a = \mathrm{Re}z$ и мнимой частью $b = \mathrm{Im}z$. Сложение и умножение в множестве C комплексных чисел осуществляется по правилам:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$,

$(a + bi)(c + di) = (ac – bd) + (ad + bc)\,i$.

Идея геометрического представления комплексных чисел заключается в том, что комплексному числу $x + yi$ сопоставляется точка плоскости с координатами (x, y).

Пусть $\bar{C} = \{(a,b) \mid a,b \in R\}$. Определим на $\bar{C}$ операции сложения и умножения:

1) $\overline{(a,b)} \oplus \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}$;

2) $\overline{(a,b)} \otimes \overline{(c,d)} = \overline{(ac-bd, ad+bc)}$.

Теорема 10. Алгебраическая форма комплексного числа единственна.

Теорема 11. На множестве комплексных чисел можно определить отношение линейного порядка так, чтобы операция сложения была монотонной, но поле комплексных чисел нельзя превратить в упорядоченное поле.

6. КОЛЬЦО m-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Зафиксируем натуральное число $m > 1$ и назовем ***m – адическим*** числом всякую запись вида $...a_n a_{n-1}...a_1 a_0, a_{-1}...a_{-k}$, где буквы с индексами обозначают цифры m-ичной системы счисления, а многоточие в начале записи указывает на наличие вполне определенной бесконечной «дорожки» цифр.

Если цифры после запятой отсутствуют, то запись называется ***целым*** m – адическим числом.

Два m – адических числа называют равными, если равны их соответствующие цифры.

Множество m – адических чисел обозначают Q_m.

Сложение и умножение m – адических чисел определяются аналогично этим операциям в m-ичной системе счисления.

При произвольном m положительные целые числа записываются в виде целых m – адических чисел с нулем в периоде, а отрицательные – с (m-1) в периоде.

Сложение и умножение m – адических чисел коммутативны, ассоциативны и умножение дистрибутивно относительно сложения.

Целые числа 0 и 1, которые записываются в виде m – адических чисел соответственно …00,00…0 и …001,00…0, играют роль нуля при сложении и единицы при умножении. Для всякого m – адического числа α существует противоположное m – адическое число $-\alpha$. Таким образом, множество Q_m относительно сложения и умножения образует кольцо, которое называется ***кольцом*** m – адических чисел. Если m=p – простое число, то деление m – адических чисел возможно всегда. В этом случае кольцо Q_p является ***полем***.

Всякое периодическое m – адическое число является записью некоторого рационального числа.

7. ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1) На множестве М задано бинарное отношение α. Будет ли α отношением эквивалентности? M=R, $\alpha = \{(x, y) | x + y = 1\}$.

2) Докажите, что $2^{2n+1} \cdot 3^{n+3} + 1$ делится на 11 при любом натуральном n.

3) В аддитивной полугруппе $\langle \sqrt{2}N, + \rangle$ для любого $\sqrt{2}n \in \sqrt{2}N$ определено, что $\left(\sqrt{2}n\right)' = \sqrt{2}n + \sqrt{2}$. Докажите, что система $\langle \sqrt{2}N, ' \rangle$ является натуральным рядом.

4) В кольце $\langle \bar{Q}, \oplus, \otimes \rangle$ найти сумму, разность, произведение и частное для классов $\left(\overline{2,3}\right)$ и $\left(\overline{6,9}\right)$.

5) Докажите, что в кольце $\langle \bar{Z}, \oplus, \otimes \rangle$ всякое целое число представимо в виде разности натуральных чисел: $\left(\overline{a,b}\right) = \bar{a} - \bar{b}$.

6) Запишите в виде отношения целых чисел периодическое 7-адическое число: (263)35.

Вариант 2.

1) На множестве М задано бинарное отношение α. Будет ли α отношением эквивалентности? M=R, $\alpha = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

2) Докажите, что $3^{2n}+2^{6n-5}$ делится на 11 при любом натуральном *n*.

3) Будет ли счетным множество всех иррациональных чисел?

4) В кольце $\langle \bar{Q}, \oplus, \otimes \rangle$ решите уравнение: $\left(\overline{2,3}\right)\otimes\left(\overline{x,y}\right)\oplus\left(\overline{4,5}\right)=\left(\overline{6,7}\right)$.

5) Докажите, что в кольце $\langle \bar{Z}, \oplus, \otimes \rangle$ всякое подкольцо, содержащее $\bar{N}$, совпадает с $\bar{Z}$.

6) Запишите в виде отношения целых чисел периодическое 5-адическое число: (124)01.

Вариант 3.

1) На множестве M задано бинарное отношение α. Будет ли α отношением эквивалентности? M=R, $\alpha=\{(x,y)|x+1<y\}$.

2) Докажите неравенство: $2^n<n!$ для любого натурального $n\geq 4$.

3) Докажите, что пересечение двух подколец есть подкольцо. Найти пересечение подколец $2Z$ и $3Z$.

4) В кольце $\langle \bar{Z}, \oplus, \otimes \rangle$ решите уравнение: $\left(\overline{x,y}\right)\otimes\left(\overline{2,1}\right)\oplus\left(\overline{1,2}\right)=\left(\overline{5,7}\right)$.

5) Докажите, что в упорядоченном поле рациональных чисел отношение “меньше” единственно.

6) Запишите в виде отношения целых чисел периодическое 7-адическое число: (124)63.

Вариант 4.

1) На множестве M задано бинарное отношение α. Будет ли α отношением эквивалентности? M=R, $\alpha=\{(x,y)|x-y<y\}$.

2) Докажите неравенство: $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ для любого натурального $n>1$.

3) Докажите, что пересечение двух подколец есть подкольцо. Найти пересечение подколец $6Z$ и $15Z$.

4) В кольце $\langle \bar{Z}, \oplus, \otimes \rangle$ выполните действия: $\left(\overline{6,8}\right) \otimes \left(\overline{3,2}\right) \oplus \left(\overline{9,10}\right) \otimes \left(\overline{5,7}\right)$.

5) Докажите, что в поле рациональных чисел для любого простого числа p уравнение $x^2 = p$ решения не имеет.

6) Запишите в виде отношения целых чисел периодическое 5-адическое число: (402)31.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Бинарные отношения на множестве натуральных чисел

1) Определите свойства следующих отношений на множестве натуральных чисел:

1. «число х больше числа у на 2»;
2. «число х делится на число у без остатка».

Решение:

1. *xRy:* «число х больше числа у на 2» (на множестве натуральных чисел). Это отношение: a) не является рефлексивным, так как ни для одного элемента из множества натуральных чисел не выполняется «число *x* больше числа *x* на 2»; b) не является симметричным, так как для любых элементов *x,y* из множества натуральных чисел, из того, что «число *x* больше числа *y* на 2» следует невыполнение того, что «число *y* больше числа *x* на 2»; c) это отношение не является также транзитивным.

2. *xRy*: «число *x* делится на число *y* без остатка» (на множестве натуральных чисел). Это отношение: a) рефлексивно, так как для любого элемента *x* из множества натуральных чисел выполняется «число *x* делится на число *x* без остатка»; b) не является симметричным; c) транзитивно, так как для любых элементов *x,y,z* из множества натуральных чисел из того, что «число *x* делится на число *y* без остатка» и «число *y* делится на число *z* без остатка», следует, что «число *x* делится на число *z* без остатка».

Метод математической индукции

2) Доказать неравенство:

$$2!\cdot 4!\cdot \ldots (2n)! > \left((n+1)!\right)^n \quad (n \geq 2).$$

Решение:

Для решения задания воспользуемся методом математической индукции.

Пусть $n = 2$. Тогда исходное неравенство примет вид:

$$2!\cdot 4! > (3!)^2;\ 48 > 36.$$

Видно, что при $n = 2$ исходное неравенство выполняется.

Предположим, что для произвольного натурального числа k ($k > 2$) исходное неравенство является верным, то есть,

$$2!\cdot 4!\cdot ...(2k)! > ((k+1)!)^k \quad (k > 2).$$

Покажем, что в этом случае неравенство выполняется и для $k + 1$. То есть, докажем неравенство:

$$2!\cdot 4!\cdot ...(2k)!\cdot(2(k+1))! > ((k+2)!)^{k+1}.$$

Преобразуем правую часть неравенства:

$$((k+2)\cdot(k+1)!)^{k+1} = (k+2)^{k+1}((k+1)!)^{k+1} = (k+2)^{k+1}\cdot((k+1)!)^k\cdot(k+1)!.$$

Неравенство, которое требуется доказать, примет вид:

$$2!\cdot 4!\cdot ...(2k)!\cdot(2(k+1))! > (k+2)^{k+1}\cdot((k+1)!)^k\cdot(k+1)!.$$

Так как $2!\cdot 4!\cdot ...(2k)! > ((k+1)!)^k$,

то задача сводится к доказательству неравенства: $(2(k+1))! > (k+2)^{k+1}\cdot(k+1)!.$

Рассмотрим левую часть последнего неравенства:

$$(2(k+1))! = (2k+2)\cdot(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)\cdot...\cdot(k+2)\cdot(k+1)!.$$

Поскольку выражение

$$(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)\cdot...\cdot(k+2)$$

содержит $k+1$ множителей, наименьший из которых равен $k + 2$, то

$$(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)\cdot...\cdot(k+2) > (k+2)^{k+1}.$$

Отсюда следует, что

$$(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)\cdot...\cdot(k+2)\cdot > (k+2)^{k+1}\cdot(k+1)!,$$

или

$$(2k+2)! > (k+2)^{k+1}\cdot(k+1)!.$$

Таким образом, неравенство

$$(2k+2)! > (k+2)^{k+1} \cdot (k+1)!,$$ а следовательно, и неравенство

$$2!\cdot 4!\cdot \ldots (2k)!\cdot (2(k+1))! > (k+2)^{k+1} \cdot ((k+1)!)^{k} \cdot (k+1)!.$$

выполнено. Значит, исходное неравенство имеет место для любого натурального числа *n,* не равного 1. Что и требовалось доказать.

Счетность множества рациональных чисел

3) Доказать, что множество рациональных чисел счетно.

Решение:

Рассмотрим множество рациональных чисел:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} | m \in Z, n \in N \right\}.$$

Занумеруем рациональные числа по возрастанию суммы $|m|+n$, а при одинаковой сумме – по возрастанию знаменателя, при равных знаменателях – по возрастанию числителя. При этом повторяющимся рациональным числам будем присваивать номер лишь при первом их появлении. В результате всякое рациональное число получит свой натуральный номер. Что и требовалось доказать.

Операции сложения и умножения классов пар на $\bar{Z}$

4) В кольце $\langle \bar{Z}, \oplus, \otimes \rangle$ выполните действия:

$$\left(\overline{7,9}\right) \otimes \left(\overline{4,3}\right) \oplus \left(\overline{8,9}\right) \otimes \left(\overline{6,8}\right).$$

Решение:

$$\left(\overline{7,9}\right) \otimes \left(\overline{4,3}\right) \oplus \left(\overline{8,9}\right) \otimes \left(\overline{6,8}\right) = \left(\overline{7\cdot 4+3\cdot 9, 7\cdot 3+9\cdot 4}\right) \oplus \left(\overline{8\cdot 6+9\cdot 8, 8\cdot 8+9\cdot 6}\right) =$$

$$= \left(\overline{28+27, 21+36}\right) \oplus \left(\overline{48+72, 64+54}\right) = \left(\overline{55,47}\right) \oplus \left(\overline{120,118}\right) = \left(\overline{55+120, 47+118}\right) =$$

$$= \left(\overline{175,165}\right).$$

Поле рациональных чисел

5) Докажите, что в поле рациональных чисел уравнение $x^2 = 2$ решения не имеет.

Решение:

Предположим противное: пусть рациональное число $\frac{a}{b}$ является решением уравнения $x^2 = 2$, то есть $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Будем считать, что $\frac{a}{b}$ – несократимая дробь. Так как $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$, то $a^2 = 2b^2$. Правая часть делится на 2, значит и левая делится на 2. 2 – число простое, поэтому если произведение a^2 делится на 2, то на 2 делится один из множителей, т.е. a. Следовательно, a – чётное, то есть $a=2k$. Тогда $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2b^2$. Значит, $b^2 = 2k^2$, а тогда b – чётное число. Таким образом, и a, и b делятся на 2, что противоречит тому, что дробь $\frac{a}{b}$ несократимая. Противоречие показывает, что исходное предположение неверно, и значит, уравнение $x^2 = 2$ не имеет рациональных решений. Что и требовалось доказать.

Представление периодического m-адического числа в виде рационального числа

6) Запишите в виде отношения целых чисел периодическое 5-адическое число: (243)1.

Решение:

Пусть α=(243)1. Умножим это равенство на $(10_5)^3$, т.к. в периоде 3 цифры. Получим: $\alpha \cdot (10_5)^3 = (243)1000$. Найдем разность $\alpha \cdot (10_5)^3 - \alpha = (243)1000 - (243)1 = (4)3014$.

Имеем: $\alpha = \frac{...443014}{...00444} = \frac{-...001431}{...00444} = -\frac{1431_5}{444_5}$.

9. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Максимальное количество, которое может набрать студент по итогам изучения дисциплины (в ходе текущей работы и её контроля) по обязательным формам работы – 6***0 баллов***. Это составляет 60% от общего возможного количества баллов.

1. Посещение лекций и конспектирование добавляет в рейтинг студента по 2 ***балла*** за каждое занятие.

2. Посещение практического занятия с конспектированием – 2 ***балла***.

3. Посещение 1 занятия и существенный вклад на занятии в работу всей группы – 3 балла.

3. По итогам изучения дисциплины студент выполняет контрольную работу, за выполнение каждого задания которой, он может заработать 5 ***баллов***.

Рейтинг студента по дисциплине определяется в результате суммирования данных текущей работы и итогового контроля, на который отводится ***40 баллов***. Максимальное число баллов – ***100***. Студент, набравший по итогам работы в семестре менее ***30 баллов***, не получает допуск к экзамену.

Набранные баллы переводятся в традиционные оценки по следующей шкале:

– 86 и более – «отлично»;

– 70–85– «хорошо»;

– 51–69 – «удовлетворительно»;

– 50 и менее – «неудовлетворительно».

10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Ларин, С. В. Числовые системы: учебное пособие для академического бакалавриата / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Юрайт, 2018. — 177 с. — ISBN 978-5-534-05548-1. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/416107 (дата обращения: 14.09.2020). – Текст: электронный. www.biblio-online.ru/book/F85562B1-3876-4FD3-B73A-0F90CDF438D33 .
2. Смолин, Ю. Н. Числовые системы : учебное пособие / Ю. Н. Смолин. — 2-е изд., стер. — Москва : ФЛИНТА, 2016. — 112 с. — ISBN 978-5-9765-0794-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/84194 (дата обращения: 14.09.2020).

Дополнительная литература

1. Виноградов, И. М. Основы теории чисел : учебное пособие / И. М. Виноградов. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 176 с. — ISBN 978-5-8114-5329-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/139285 (дата обращения: 14.09.2020).

2. Ермолаева, Н. Н. Практические занятия по алгебре. Элементы теории множеств, теории чисел, комбинаторики. Алгебраические структуры : учебное пособие / Н. Н. Ермолаева, В. А. Козынченко, Г. И. Курбатова ; под редакцией Г. И. Курбатовой. — Санкт-Петербург : Лань, 2014. — 112 с. — ISBN 978-5-8114-1657-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/49469 (дата обращения: 14.09.2020).

3. Киселев, А. П. Алгебра. Ч. II : учебник / А. П. Киселев ; под редакцией Н. А. Глаголева. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 248 с. — ISBN 978-5-9221-1548-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/63668 (дата обращения: 14.09.2020).